

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES

1.	Representa gráficamente la función $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$.
----	---

Dominio:

Dom (f) = $\mathbb{R} - \{\text{puntos que anulan el denominador}\}$

$$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

Dom (f) = $\mathbb{R} - \{-1, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$

Simetrías:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^2 - 1} = \frac{x^2}{x^2 - 1} = f(x) \Rightarrow f(x) \text{ es par, es decir, simétrica respecto del eje } OY.$$

Periodicidad:

Esta función no es periódica

Puntos de corte con los ejes de coordenadas:

- Con OX

$$y = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{x^2 - 1} = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$$

- Con OY

$$x = 0 \Rightarrow y = \frac{0^2}{0^2 - 1} = 0 \rightarrow (0, 0)$$

Regiones de existencia:

- Intervalos de positividad

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x^2 > 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \rightarrow (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \text{ Intervalos de negatividad}$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow x \in (-1, 1) \rightarrow (-1, 1)$$

Asíntotas:

- Asíntotas verticales

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty \text{ con } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow x = 1 \text{ es una asíntota vertical}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \infty \text{ con } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty \end{cases} \Rightarrow x = -1 \text{ es una asíntota vertical}$$

- Asíntotas horizontales

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x^2}} = 1 \Rightarrow y = 1 \text{ es una}$$

asíntota horizontal

Como consecuencia, la función no tiene asíntotas oblicuas.

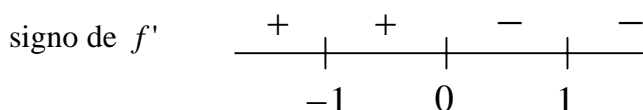
Puntos de discontinuidad:

Por tratarse de una función racional, es continua en su dominio, esto es, presenta discontinuidades en los puntos $x = -1$ y $x = 1$.

Monotonía (crecimiento, decrecimiento y extremos):

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 1) - x^2(2x)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x^3 - 2x^2 - 2x^3}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-2x^2}{(x^2 - 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2x^2}{(x^2 - 1)^2} = 0 \Leftrightarrow -2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$



$$y = f(x) \text{ es } \begin{cases} \text{creciente en } (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \\ \text{decreciente en } (0, 1) \cup (1, +\infty) \end{cases}$$

En $x = 0$ tiene un posible extremo (máximo o mínimo)¹, luego hay que calcular la derivada segunda:

$$f''(x) = \frac{-4x(x^2 - 1)^2 - (-2x^2)2(x^2 - 1)2x}{(x^2 - 1)^4} = \frac{6x^2 + 2}{(x^2 - 1)^3}$$

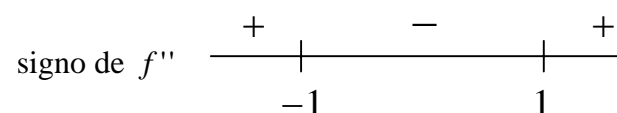
$$f''(0) = \frac{6 \cdot 0^2 + 2}{(0^2 - 1)^3} = \frac{2}{-1} = -2 < 0 \Rightarrow x = 0 \text{ es un máximo relativo de coordenadas } (0, 0).$$

Para hallar la coordenada y del máximo sustituimos $x = 0$ en $f(x)$: $f(0) = \frac{0^2}{0^2 - 1} = 0$

Curvatura (concavidad, convexidad y puntos de inflexión):

$$f''(x) = \frac{6x^2 + 2}{(x^2 - 1)^3} = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow 6x^2 = -2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{-2}{6} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{-2}{6}} \notin \mathbb{R} \text{ y por tanto la}$$

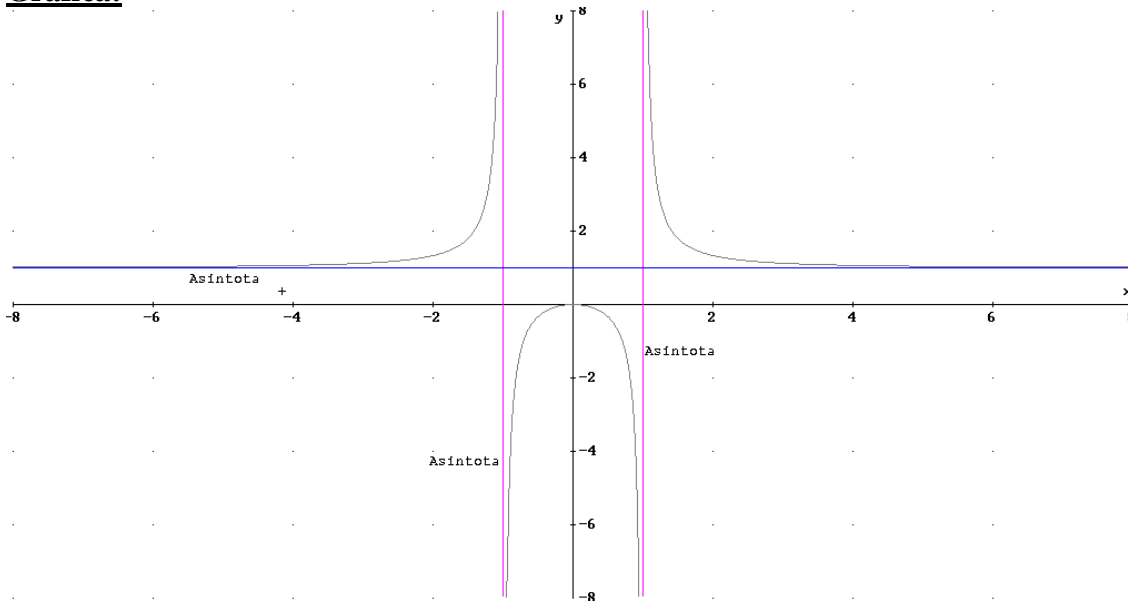
función no tiene puntos de inflexión.



$$y = f(x) \text{ es } \begin{cases} \text{convexa en } (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \\ \text{concava en } (-1, 1) \end{cases}$$

¹ En este caso sabemos que es un máximo por que la función es continua en $x = 0$ y en dicho punto pasa de ser creciente a ser decreciente.

Gráfica:



2. Representa gráficamente la función $f(x) = \frac{x}{x^2 - 9}$.

Dominio:

Dom (f) = $\mathbb{R} - \{\text{puntos que anulan el denominador}\}$

$$x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-3, 3\} = (-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, +\infty)$$

Simetrías:

$$f(-x) = \frac{(-x)}{(-x)^2 - 9} = \frac{-x}{x^2 - 9} \neq f(x) \Rightarrow f(x) \text{ no es par, es decir, no es simétrica respecto del eje } OY.$$

$$f(-x) = \frac{-x}{x^2 - 9} = -\frac{x}{x^2 - 9} = -f(x) \Rightarrow f(x) \text{ es impar, es decir, es simétrica respecto del origen de coordenadas}$$

Periodicidad:

Esta función no es periódica

Puntos de corte con los ejes de coordenadas:

- Con OX

$$y = 0 \Rightarrow \frac{x}{x^2 - 9} = 0 \Rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$$

- Con OY

$$x = 0 \Rightarrow y = \frac{0}{0^2 - 9} = 0 \rightarrow (0, 0)$$

Regiones de existencia:

- Intervalos de positividad

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 - 9 > 0 \end{cases} \quad \text{ó} \quad \begin{cases} x < 0 \\ x^2 - 9 < 0 \end{cases}$$

La solución del primer sistema de inecuaciones es $x \in (3, +\infty)$ y la del segundo $x \in (-3, 0)$, y por tanto, la función es positiva en $(-3, 0) \cup (3, +\infty)$.

- Intervalos de negatividad

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 - 9 < 0 \end{cases} \quad \text{ó} \quad \begin{cases} x < 0 \\ x^2 - 9 > 0 \end{cases}$$

La solución del primer sistema de inecuaciones es $x \in (0, 3)$ y la del segundo $x \in (-\infty, -3)$, y por tanto, la función es negativa en $(-\infty, -3) \cup (0, 3)$.

Asíntotas:

- Asíntotas verticales

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \infty \quad \text{con} \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow x = 3 \text{ es una asíntota vertical}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \infty \quad \text{con} \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = -\infty \end{cases} \Rightarrow x = -3 \text{ es una asíntota vertical}$$

- Asíntotas horizontales

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 - 9} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2 - 9}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{9}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{9}{x^2}} = 0$$

$y = 0$ es una asíntota horizontal

Como consecuencia, la función no tiene asíntotas oblicuas.

Puntos de discontinuidad:

Por tratarse de una función racional, es continua en su dominio, esto es, presenta discontinuidades en los puntos $x = -3$ y $x = 3$.

Monotonía (crecimiento, decrecimiento y extremos):

$$f'(x) = \frac{1(x^2 - 9) - x(2x)}{(x^2 - 9)^2} = \frac{x^2 - 9 - 2x^2}{(x^2 - 9)^2} = \frac{-x^2 - 9}{(x^2 - 9)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2 - 9}{(x^2 - 9)^2} = 0 \Leftrightarrow -x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -9 \text{ Imposible}$$

$$\text{signo de } f' \quad \begin{array}{c} \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \\ | \quad \quad \quad | \\ -3 \quad \quad \quad 3 \end{array}$$

$y = f(x)$ decreciente en $\mathbb{R} - \{-3, 3\}$

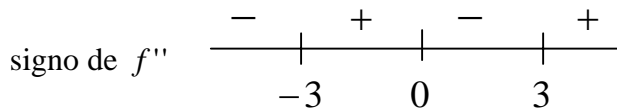
Como consecuencia esta función no tiene ni máximos ni mínimos relativos.

Curvatura (concauidad, convexidad y puntos de inflexión):

$$f''(x) = \frac{-2x(x^2-9)^2 - (-x^2-9)2(x^2-9)2x}{(x^2-9)^4} = \frac{(x^2-9)[-2x(x^2-9) - (-x^2-9)4x]}{(x^2-9)^4} =$$

$$= \frac{-2x(x^2-9) - (-x^2-9)4x}{(x^2-9)^3} = \frac{-2x^3 + 18x + 4x^3 + 36x}{(x^2-9)^3} = \frac{2x^3 + 54x}{(x^2-9)^3}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^3 + 54x}{(x^2-9)^3} = 0 \Leftrightarrow 2x^3 + 54x = 0 \Leftrightarrow x(2x^2 + 54) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x^2 + 54 = 0 !! \end{cases}$$



$$y = f(x) \text{ es } \begin{cases} \text{convexa en } (-3, 0) \cup (3, +\infty) \\ \text{concava en } (-\infty, -3) \cup (0, 3) \end{cases}$$

Como la derivada segunda sea anula en $x = 0$, en dicho punto la función puede presentar un punto de inflexión. Para ver si lo es o no, calculamos la derivada tercera:

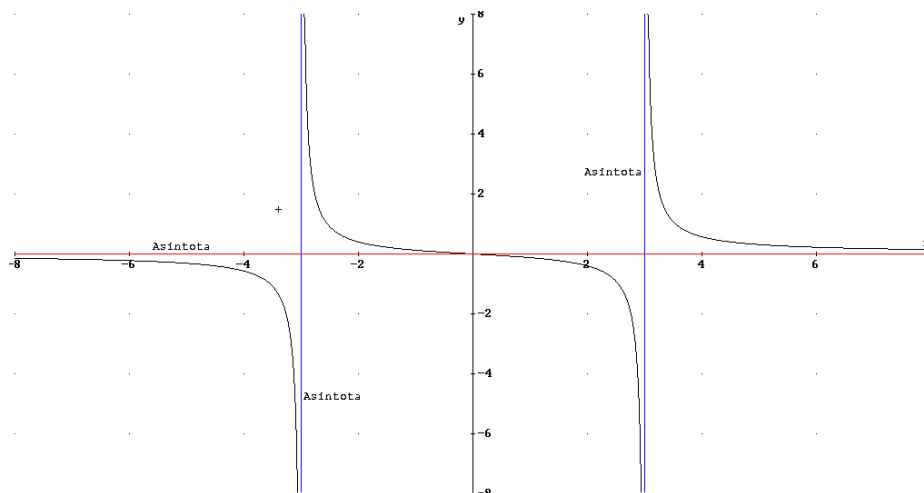
$$f'''(x) = \frac{(6x^2 + 54)(x^2 - 9)^3 - (2x^3 + 54x) \cdot 3(x^2 - 9)^2 \cdot 2x}{(x^2 - 9)^6}$$

y evaluamos dicha derivada en cero:

$$f'''(0) = \frac{(6 \cdot 0^2 + 54)(0^2 - 9)^3 - (2 \cdot 0^3 + 54 \cdot 0) \cdot 3(0^2 - 9)^2 \cdot 2 \cdot 0}{(0^2 - 9)^6} < 0$$

es decir, $x = 0$ es un punto de inflexión convexo-cóncavo de coordenadas $(0,0)$

Gráfica:



3. Representa gráficamente la función $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 1}$.

Dominio:

$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{\text{puntos que anulan el denominador}\}$

$$x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$$

Simetrías:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 4}{-x + 1} = \frac{x^2 - 4}{-x + 1} \neq f(x) \Rightarrow f(x) \text{ no es par, es decir, no es simétrica respecto del eje } OY.$$

$$f(-x) = \frac{x^2 - 4}{-x + 1} \neq -f(x) \Rightarrow f(x) \text{ no es impar, es decir, no es simétrica respecto del origen de coordenadas}$$

Periodicidad:

Esta función no es periódica

Puntos de corte con los ejes de coordenadas:

- Con OX

$$y = 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 4}{x + 1} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2 \rightarrow \begin{cases} (-2, 0) \\ (2, 0) \end{cases}$$

- Con OY

$$x = 0 \Rightarrow y = \frac{0^2 - 4}{0 + 1} = \frac{-4}{1} = -4 \rightarrow (0, -4)$$

Regiones de existencia:

- Intervalos de positividad

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4 > 0 \\ x + 1 > 0 \end{cases} \quad \text{ó} \quad \begin{cases} x^2 - 4 < 0 \\ x + 1 < 0 \end{cases}$$

La solución del primer sistema de inecuaciones es $x \in (2, +\infty)$ y la del segundo $x \in (-2, -1)$, y por tanto, la función es positiva en $(-2, -1) \cup (2, +\infty)$.

- Intervalos de negatividad

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4 > 0 \\ x + 1 < 0 \end{cases} \quad \text{ó} \quad \begin{cases} x^2 - 4 < 0 \\ x + 1 > 0 \end{cases}$$

La solución del primer sistema de inecuaciones es $x \in (-\infty, -2)$ y la del segundo $x \in (-1, 2)$, y por tanto, la función es negativa en $(-\infty, -2) \cup (-1, 2)$.

Asíntotas:

- Asíntotas verticales

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \infty \text{ con } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty \end{cases} \Rightarrow x = -1 \text{ es una asíntota vertical}$$

- Asíntotas horizontales

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4}{x + 1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{4}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \infty$$

$\Rightarrow f(x)$ no tiene asíntotas horizontales

- Asíntota oblicua

$$\begin{aligned}
 m &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4}{x^2 + x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4}{x^2 + x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{4}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} = 1 \Rightarrow m = 1 \\
 n &= \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 4}{x + 1} - x \right) = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4 - x(x+1)}{x + 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4 - x^2 - x}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x - 4}{x + 1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{-x - 4}{x}}{\frac{x + 1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{-x}{x} - \frac{4}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{1}{x}} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1 - \frac{4}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = -1 \Rightarrow n = -1
 \end{aligned}$$

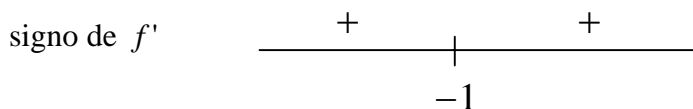
Por tanto, la recta $y = mx + n = x - 1$ es una asíntota oblicua.

Puntos de discontinuidad:

Por tratarse de una función racional, es continua en su dominio, esto es, presenta discontinuidades en los puntos $x = -1$.

Monotonía (crecimiento, decrecimiento y extremos):

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{2x(x+1) - (x^2 - 4) \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 + 2x - x^2 + 4}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x + 4}{(x+1)^2} \\
 f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x + 4}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} \notin \mathbb{R}
 \end{aligned}$$



$y = f(x)$ decreciente en $\mathbb{R} - \{-1\}$

Como consecuencia esta función no tiene ni máximos ni mínimos relativos.

Curvatura (concavidad, convexidad y puntos de inflexión):

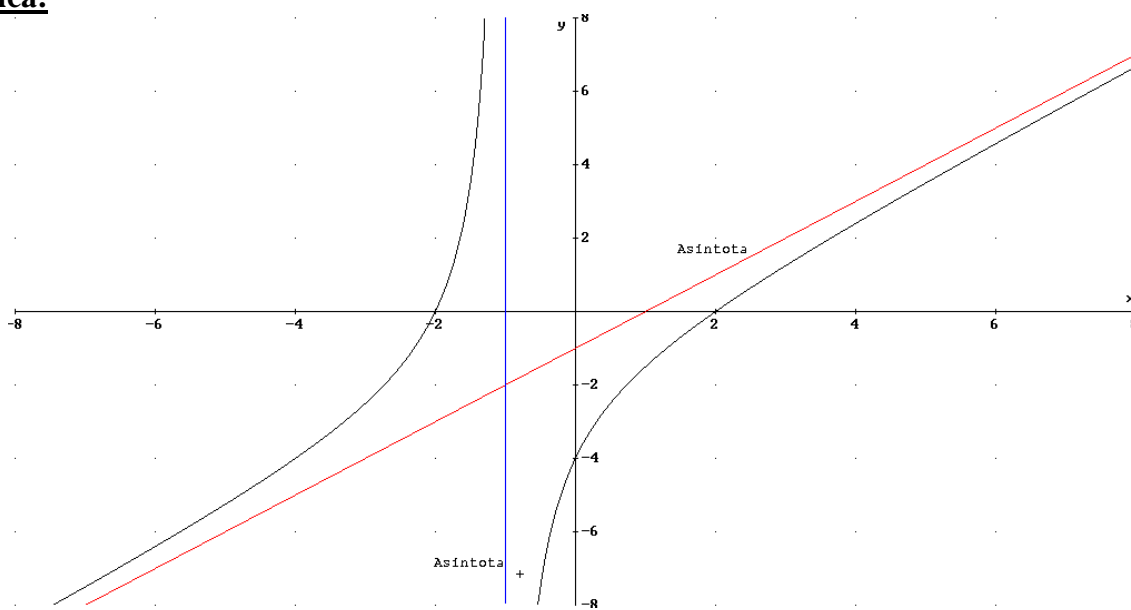
$$\begin{aligned}
 f''(x) &= \frac{(2x+2)(x+1)^2 - (x^2 + 2x + 4) \cdot 2(x+1) \cdot 1}{(x+1)^4} = \frac{(x+1) \left[(2x+2)(x+1) - (x^2 + 2x + 4) \cdot 2 \right]}{(x+1)^4} = \\
 &= \frac{(2x+2)(x+1) - 2(x^2 + 2x + 4)}{(x+1)^3} = \frac{2x^2 + 2x + 2x + 2 - 2x^2 - 4x - 8}{(x+1)^3} = \frac{-6}{(x+1)^3} \\
 f''(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{-6}{(x+1)^3} = 0 \Leftrightarrow -6 = 0 \text{ Imposible}
 \end{aligned}$$

signo de f'' $\frac{+}{-1}$ $-$

$y = f(x)$ es $\begin{cases} \text{convexa en } (-\infty, -1) \\ \text{concava en } (-1, +\infty) \end{cases}$

Como la derivada segunda no se anula, la función no tiene puntos de inflexión.

Gráfica:



4. Representa gráficamente la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 4}$.

Dominio:

$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{\text{puntos que anulan el denominador}\}$

$$x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -4 \text{ Imposible}$$

$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

Simetrías:

$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 1}{(-x)^2 + 4} = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 4} = f(x) \Rightarrow f(x)$ es par, es decir, es simétrica respecto del eje OY .

$f(-x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 4} \neq -f(x) \Rightarrow f(x)$ no es impar, es decir, no es simétrica respecto del origen de coordenadas

Periodicidad:

Esta función no es periódica

Puntos de corte con los ejes de coordenadas:

- Con OX

$$y = 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 1}{x^2 + 4} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1 \rightarrow \begin{cases} (-1, 0) \\ (1, 0) \end{cases}$$

- Con OY

$$x = 0 \Rightarrow y = \frac{0^2 - 1}{0^2 + 4} = -\frac{1}{4} \rightarrow \left(0, -\frac{1}{4}\right)$$

Regiones de existencia:

- Intervalos de positividad

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ x^2 + 4 > 0 \end{cases} \quad \text{ó} \quad \begin{cases} x^2 - 1 < 0 \\ x^2 + 4 < 0 \end{cases}$$

Por tanto, la función es positiva en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

- Intervalos de negatividad

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ x^2 + 4 < 0 \end{cases} \quad \text{ó} \quad \begin{cases} x^2 - 1 < 0 \\ x^2 + 4 > 0 \end{cases}$$

Por tanto, la función es negativa en $(-1, 1)$.

Asíntotas:

- Asíntotas verticales

No tiene (ya que el denominador no se anula)

- Asíntotas horizontales

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 4} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2 - 1}{x^2}}{\frac{x^2 + 4}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{4}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{4}{x^2}} = 1$$

$\Rightarrow y = 1$ es una asíntota horizontal

Por tanto, no hay asíntotas oblicuas.

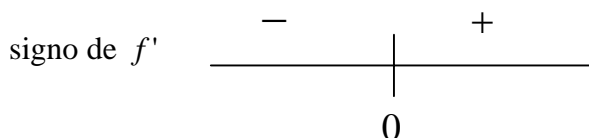
Puntos de discontinuidad:

Por tratarse de una función racional, es continua en su dominio, luego es continua en IR.

Monotonía (crecimiento, decrecimiento y extremos):

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 + 4) - (x^2 - 1)(2x)}{(x^2 + 4)^2} = \frac{2x^3 + 8x - 2x^3 + 2x}{(x^2 + 4)^2} = \frac{10x}{(x^2 + 4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{10x}{(x^2 + 4)^2} = 0 \Leftrightarrow 10x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$



$$y = f(x) \text{ es } \begin{cases} \text{decreciente en } (-\infty, 0) \\ \text{creciente en } (0, +\infty) \end{cases}$$

En $x = 0$ va a tener un mínimo, ya que la función es continua y en dicho punto pasa de ser creciente a ser decreciente. De todas formas, lo vamos a comprobar calculando la derivada segunda:

$$f''(x) = \frac{10(x^2 + 4)^2 - 10x \cdot 2(x^2 + 4) \cdot 2x}{(x^2 + 4)^4} = \frac{(x^2 + 4)[10(x^2 + 4) - 40x^2]}{(x^2 + 4)^4} = \frac{10(x^2 + 4) - 40x^2}{(x^2 + 4)^3} =$$

$$= \frac{10x^2 + 40 - 40x^2}{(x^2 + 4)^3} = \frac{-30x^2 + 40}{(x^2 + 4)^3}$$

y evaluamos dicha derivada en $x = 0$:

$$f''(0) = \frac{-30 \cdot 0^2 + 40}{(0^2 + 4)^3} > 0 \Rightarrow x = 0 \text{ es un mínimo}$$

Hallamos la coordenada y del mínimo: $f(0) = \frac{0^2 - 1}{0^2 + 4} = -\frac{1}{4} \rightarrow \text{Mínimo} \left(0, -\frac{1}{4}\right)$

Curvatura (concavidad, convexidad y puntos de inflexión):

$$f'''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-30x^2 + 40}{(x^2 + 4)^3} = 0 \Leftrightarrow -30x^2 + 40 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{-40}{-30} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$$

signo de f''' $\begin{array}{c} - \quad | \quad + \quad | \quad - \\ \hline -\frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \quad \quad \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{array}$

$$y = f(x) \text{ es } \begin{cases} \text{convexa en } \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \\ \text{concava en } \left(-\infty, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty\right) \end{cases}$$

Los puntos $x = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ y $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ son puntos de inflexión. Lo comprobamos calculando la derivada tercera y evaluando:

$$f'''(x) = \frac{-60x(x^2 + 4)^3 - (-30x^2 + 40) \cdot 3(x^2 + 4) \cdot 2x}{(x^2 + 4)^6}$$

$$f'''\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) > 0 \Rightarrow x = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ es un punto de inflexión cóncavo-convexo de coordenadas}$$

$$\left(\frac{-2\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{16}\right)$$

$$f'''\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) < 0 \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ es un punto de inflexión convexo-cóncavo de coordenadas } \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{16}\right)$$

Gráfica:



5. Representa gráficamente la función $f(x) = \ln \sqrt{x^2 + 1}$.

Dominio:

El dominio de la función logaritmo es $(0, +\infty)$ y el dominio de una función radical de índice par es el conjunto de los x tales que el radicando es ≥ 0 .

En nuestro caso, como $x^2 + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, se tiene que el dominio de la función $f(x)$ es \mathbb{R} .

Simetrías:

$$f(-x) = \ln \sqrt{(-x)^2 + 1} = \ln \sqrt{x^2 + 1} = f(x) \Rightarrow f(x) \text{ es par, es decir, simétrica respecto del eje } OY.$$

Periodicidad:

Esta función no es periódica

Puntos de corte con los ejes de coordenadas:

- Con OX

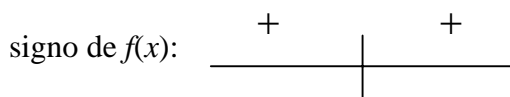
$$y = 0 \Rightarrow \ln \sqrt{x^2 + 1} = 0 \Rightarrow e^{\ln \sqrt{x^2 + 1}} = e^0 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 1} = 1 \Rightarrow x^2 + 1 = 1 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \rightarrow (0,0)$$

- Con OY

$$x = 0 \Rightarrow y = \ln \sqrt{0^2 + 1} = \ln 1 = 0 \rightarrow (0,0)$$

Regiones de existencia:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$



Así, $f(x)$ es positiva en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

Asíntotas:

Esta función no tiene asíntotas.

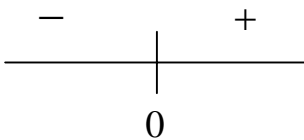
Puntos de discontinuidad:

Por ser composición de funciones continuas es continua en todo su dominio.

Monotonía (crecimiento, decrecimiento y extremos):

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} (x^2+1)^{\frac{1}{2}-1} 2x = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{x^2+1}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{x^2+1} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

signo de f' 

$y = f(x)$ es $\begin{cases} \text{creciente en } (0, +\infty) \\ \text{decreciente en } (-\infty, 0) \end{cases}$

En $x = 0$ tiene un posible extremo (máximo o mínimo)², luego hay que calcular la derivada segunda:

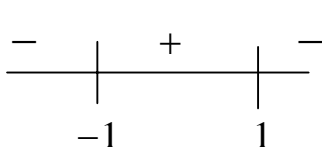
$$f''(x) = \frac{1 \cdot (x^2+1) - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(0) = \frac{-0^2+1}{(0^2+1)^2} = 1 > 0 \Rightarrow x = 0 \text{ es un mínimo}$$

Para hallar la coordenada y del máximo sustituimos $x = 0$ en $f(x)$: $f(0) = 0 \Rightarrow (0, 0)$

Curvatura (concavidad, convexidad y puntos de inflexión):

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow -x^2+1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

signo de f'' 

$y = f(x)$ $\begin{cases} \text{convexa en } (-1, 1) \\ \text{cóncava en } (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \end{cases}$ $y = f(x)$ es $\begin{cases} \text{convexa en } (-1, 1) \\ \text{cóncava en } (-\infty, 1) \cup (1, +\infty) \end{cases}$

Los puntos $x = \pm 1$ son posibles puntos de inflexión. Para verlo, calculamos la derivada tercera:

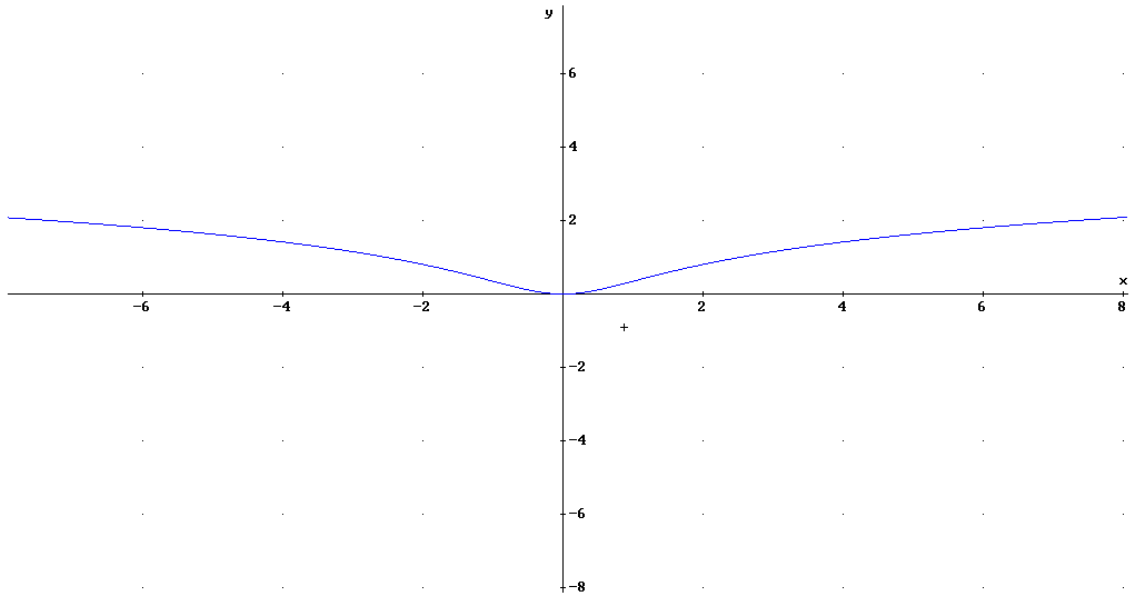
$$f'''(x) = \frac{-2x(x^2+1)^2 - (-x^2+1) \cdot 2(x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4} = \frac{(x^2+1)[-2x(x^2+1) - 4x(-x^2+1)]}{(x^2+1)^4} =$$
$$= \frac{-2x(x^2+1) - 4x(-x^2+1)}{(x^2+1)^3} = \frac{-2x^3 - 2x + 4x^3 - 4x}{(x^2+1)^3} = \frac{x^3 - 6x}{(x^2+1)^3}$$

$$f'''(-1) > 0 \Rightarrow x = -1 \text{ es un punto de inflexión convexo-cóncavo} \rightarrow (-1, 0.35)$$

$$f'''(1) < 0 \Rightarrow x = 1 \text{ es un punto de inflexión cóncavo-convexo} \rightarrow (1, 0.35)$$

Gráfica:

² En este caso sabemos que es un mínimo por que la función es continua en $x = 0$ y en dicho punto pasa de ser decreciente a ser creciente.



6. Representa gráficamente la función $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$.

Dominio:

$$Dom(f) = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Simetrías:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{-x-1} = \frac{x^2}{-x-1} \neq f(x) \Rightarrow f(x) \text{ no es par, es decir, no es simétrica respecto del eje } OY.$$

$$f(-x) \neq -\frac{x^2}{x-1} = -f(x) \Rightarrow f(x) \text{ no es impar, es decir, no es simétrica respecto del origen de coordenadas.}$$

Periodicidad:

Esta función no es periódica

Puntos de corte con los ejes de coordenadas:

- Con OX

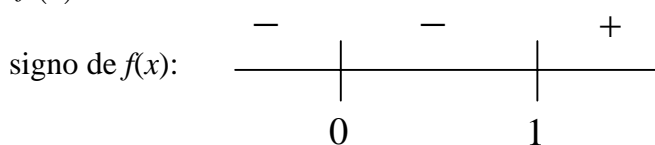
$$y = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{x-1} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$$

- Con OY

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{0^2}{0-1} = 0 \rightarrow (0, 0)$$

Regiones de existencia:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$



Así, $f(x)$ es $\begin{cases} \text{positiva en } (1, +\infty) \\ \text{negativa en } (-\infty, 0) \cup (0, 1) \end{cases}$

Puntos de discontinuidad:

Es continua en todo su dominio.

Asíntotas:

- Asíntotas verticales

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x-1} = \left[\frac{1}{0} \right] = \infty \text{ con } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \end{cases}$$

Por tanto, la recta $x = 1$ es una asíntota vertical.

- Asíntotas horizontales

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x-1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x-1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{x}{x^2} - \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} = \infty$$

Es decir, esta función no tiene asíntotas horizontales.

- Asíntotas oblicuas

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x-1} = 1 \Rightarrow m = 1$$

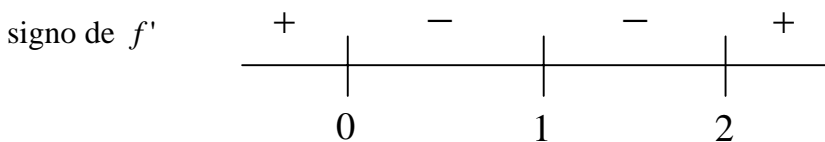
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - x(x-1)}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x^2 + x}{x-1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x-1} = 1 \Rightarrow n = 1 \end{aligned}$$

Así, la recta $y = x + 1$ es una asíntota oblicua.

Monotonía (crecimiento, decrecimiento y extremos):

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \end{cases}$$



$y = f(x)$ es $\begin{cases} \text{creciente en } (-\infty, 0) \cup (2, +\infty) \\ \text{decreciente en } (0, 1) \cup (1, 2) \end{cases}$

En $x = 0$ y $x = 2$ tiene posibles extremos (máximo o mínimo), luego hay que calcular la derivada segunda:

$$f''(x) = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2-2x)2(x-1) \cdot 1}{(x-1)^3} = \frac{(2x-2)(x-1) - 2(x^2-2x)}{(x-1)^3} =$$

$$= \frac{2x^2 - 2x - 2x + 2 - 2x^2 + 4x}{(x-1)^3} = \frac{2}{(x-1)^3}$$

$$f''(0) < 0 \Rightarrow x = 0 \text{ es un máximo} \rightarrow (0, 0)$$

$$f''(0) > 0 \Rightarrow x = 2 \text{ es un mínimo} \rightarrow \left(2, \frac{4}{3}\right)$$

Curvatura (concavidad, convexidad y puntos de inflexión):

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{(x-1)^3} = 0 \text{ Absurdo}$$

signo de f''

-	+
1	

$$y = f(x) \text{ es } \begin{cases} \text{convexa en } (1, +\infty) \\ \text{cóncava en } (-\infty, 1) \end{cases}$$

Esta función no tiene puntos de inflexión.

Gráfica:

