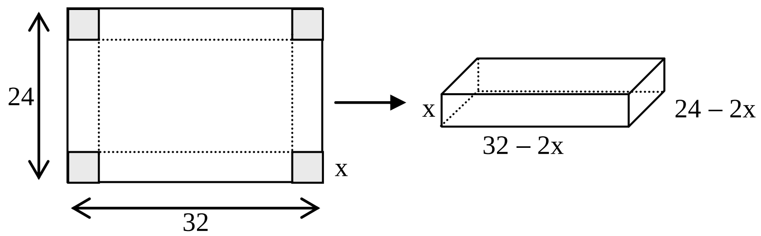
PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

Planteamiento y resolución de los problemas de optimización
Se quiere construir una caja, sin tapa, partiendo de una lámina rectangular de 32 cm de larga por 24 de ancha. Para ello se recortará un cuadradito en cada esquina y se doblará. ¿Cuál debe ser el lado del cuadradito cortado para que el volumen de la caja resultante sea máximo?

A partir del enunciado puede seguirse el proceso que se detalla a continuación:
1. Determinar el objetivo del problema: lo que hay que hacer máxima o mínima.
En el ejemplo anterior el objetivo es que el *volumen de la caja sea máximo.*

2. Expresar en forma de función tal objetivo.
La caja es un prisma rectangular: volumen = área de la base por la altura.
Para mejor comprensión conviene hacer un dibujo.



Si se corta un cuadradito de lado x, el volumen de la caja obtenida será:
$$V = (32-2x)(24-2x)x \Rightarrow V = 4x^3 - 112x^2 + 768x$$

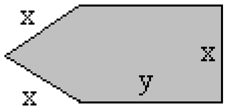
3. Los puntos máximos o mínimos se encuentran, si existen, entre las soluciones de $V' = 0$.
$$V' = 12x^2 - 224x + 768 = 0 \to x = \frac{28 \pm \sqrt{208}}{3} \text{ (hemos simplificado)}$$
Se obtienen x ≈ 4,53 y x ≈ 14,14

4. Para ver cuál de ellos es el máximo hacemos $V'' = 24x - 224$ y sustituimos.
Como $V''(4{,}53) < 0$ y $V''(14{,}14) > 0$, el máximo se da para x = 4,53. Esta es la solución buscada.

Nota: El valor x = 14,14 no es posible, pues 24 cm no da para cortar dos trozos de tamaño 14,14 cada uno.

PAJ05

1. Se dispone de una tela metálica de 100 metros de longitud para vallar una región como la de la figura. ¿Cuáles son los valores de x e y que hacen que el área encerrada sea máxima? (2,5 puntos)



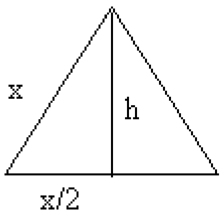
Solución:

Se trata de un problema de optimización.

Objetivo: que el área de la figura sea máxima.

La figura está formada por un triángulo equilátero de lado x y por un rectángulo de lados x e y.

Área del triángulo: $A_T = \dfrac{x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}x}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2$. Véase la figura.



La altura del triángulo es: $h = \sqrt{x^2 - \left(\dfrac{x}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x$

Área del rectángulo: $A_R = xy$

Área total: $A = \dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2 + xy$

Condición: perímetro de la figura = 100 m $\rightarrow$ 100 = 3x + 2y $\Rightarrow$ $y = 50 - \dfrac{3}{2}x$

Sustituyendo en la expresión anterior, se tiene:

$$A(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + 50x - \frac{3}{2}x^2$$

Esta función alcanza el máximo en las soluciones de A´(x) = 0 que hacen negativa a A´´(x).

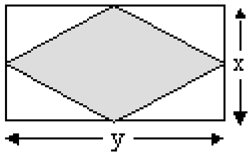
$$A'(x) = \frac{\sqrt{3}-6}{2}x + 50 = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{100}{6-\sqrt{3}} = \frac{100(6+\sqrt{3})}{33}$$

Como $A''(x) = \dfrac{\sqrt{3}-6}{2} < 0$, para ese valor hallado se tendrá el máximo buscado.

El valor de *y* será: $y = 50 - \dfrac{50(6+\sqrt{3})}{11}$.

PAS05

2. Se dispone de una tela metálica de 100 metros de longitud para vallar una región rectangular. ¿Cuáles son los valores de x e y , dimensiones del rectángulo, que hacen que el área del romboide, formado por la unión de los puntos medios de los lados, sea máxima? (2,5 puntos)



Solución:

Se trata de un problema de optimización.

Objetivo: que el área del romboide sea máxima. Su área es la mitad que la del rectángulo. Por tanto:

Área del romboide: $A_R = \frac{x \cdot y}{2}$.

Condición: perímetro del rectángulo = 100 m $\rightarrow$ 100 = 2x + 2y $\Rightarrow$ $y = 50 - x$
Sustituyendo en la expresión anterior, se tiene:

$$A(x) = 25x - \frac{1}{2}x^2$$

Esta función alcanza el máximo en las soluciones de A´(x) = 0 que hacen negativa a A´´(x).

$$A'(x) = 25 - x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 25$$

Como $A''(x) = -1 < 0$, para ese valor hallado se tendrá el máximo buscado.
El valor de *y* será: $y = 25$.

Por tanto, tanto el rectángulo como el romboide son cuadrados. El "rectángulo" tendrá lado 25; el "romboide" será un cuadrado de lado $\frac{25}{\sqrt{2}}$.

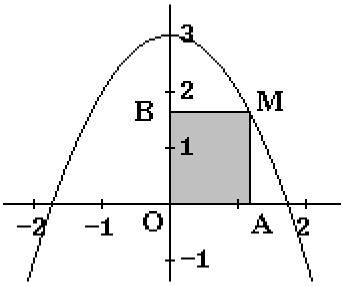
CTS05

3. Considera la función $f(x) = 3 - x^2$ y un punto de su gráfica, M, situado en el primer cuadrante (x ≥ 0, y ≥ 0). Si por el punto M se trazan paralelas a los ejes de coordenadas, su intersección con OX y OY determina dos puntos, A y B, respectivamente.

a) Haz una gráfica de los elementos del problema.
b) Halla las coordenadas del punto M que hace que el rectángulo OAMB tenga área máxima.

Solución:

a) La curva es una parábola. Puede representarse dando valores.
La situación es la siguiente.



b) Si el punto M = (x, y), las coordenadas de A y B son: A = (x, 0) y B = (0, y).

El área del rectángulo será:

$$S = xy$$

Como $y = 3 - x^2$, sustituyendo se tiene:

$$S(x) = x(3 - x^2) = 3x - x^3$$

El máximo de S(x) se da en las soluciones de S´(x) = 0 que hagan negativa a S´´(x).

$$S'(x) = 3 - 3x^2 = 0 \;\Rightarrow\; x = 1 \text{ y } x = -1 \text{ (esta última no vale)}$$

Como $S''(x) = -6x$, se tiene que S´´(1) = –6 < 0; luego para ese valor de x se tendrá la superficie máxima.

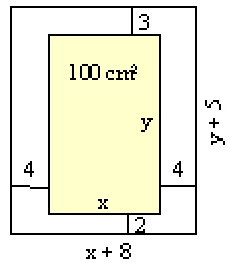
Por tanto M = (1, 2).

CMJ05

4. Una imprenta recibe el encargo de diseñar un cartel con las siguientes características: la zona impresa debe ocupar 100 cm^2, el margen superior debe medir 3 cm, el inferior 2 cm, y los márgenes laterales 4 cm cada uno.
Calcula las dimensiones que debe tener el cartel de modo que se utilice la menor cantidad de papel posible.

Solución:

Si las dimensiones de la parte impresa son x por y, el cartel será como el que dibujamos.



La cantidad de papel que se necesita, y que se desea que sea mínima, es:
S = (x + 8) (y + 5)
Con la condición de que xy = 100 $\Rightarrow$ y = 100/x

Sustituyendo en S, queda:

$$S(x) = (x+8)\left(\frac{100}{x}+5\right) \Rightarrow S(x) = 5x + \frac{800}{x} + 140$$

Esta función es mínima en las soluciones de S´= 0 que hacen positiva a S´´.

$$S´(x) = 5 - \frac{800}{x^2} \Rightarrow S´´(x) = \frac{1600}{x^3}$$

$$S´(x) = 0 \Rightarrow x^2 = 160 \Rightarrow x = \sqrt{160} = 4\sqrt{10} \Rightarrow y = \frac{100}{4\sqrt{10}} = 2{,}5\sqrt{10}$$

Como para ese valor S´´ es positiva se tiene la solución mínima buscada.

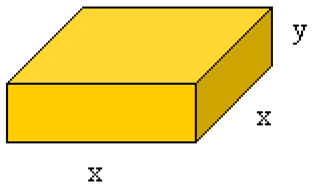
Las dimensiones del cartel deben ser:
ancho: $x + 8 = 8 + 4\sqrt{10}$
alto: $y + 5 = 5 + 2{,}5\sqrt{10}$

CMS05

5. De todos los prismas rectos de base cuadrada y tales que el perímetro de una cara lateral es de 30 cm, halla las dimensiones del que tiene volumen máximo.

Solución:

Si x es el lado de la base e y la altura del prisma, el volumen será $V = x^2y$. Esta es la función que se desea hacer máxima.
Se sabe que $2x + 2y = 30 \Rightarrow y = 15 - x$.



Luego

$$V(x) = x^2y = x^2(15 - x) = 15x^2 - x^3$$

El máximo de V se da en la solución de V´= 0 que hace negativa a V´´.

$$V'(x) = 30x - 3x^2 = 3x(10 - x)\,; \qquad V''(x) = 30 - 6x$$

La derivada se anula para x = 0 y x = 10. Como V´´(!0) = –30 < 0, para ese valor se tiene el máximo buscado.

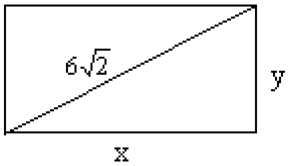
Las dimensiones serán 10 × 10 × 5; y el volumen 500 cm^3.

RMS05

6. De todos los rectángulos de diagonal $6\sqrt{2}$, encontrar las dimensiones del de perímetro máximo.

Solución:

Los rectángulos son de la forma



Su perímetro es P = 2x + 2y, siendo la relación entre los lados $x^2 + y^2 = \left(6\sqrt{2}\right)^2$.

Despejando ($y = \sqrt{72 - x^2}$) y sustituyendo en P queda:

$$P(x) = 2x + 2\sqrt{72 - x^2}$$

El máximo de P se obtiene en las soluciones de P´(x) que hacen negativa a P´´(x).

$$P´(x) = 2 + \frac{2(-2x)}{2\sqrt{72 - x^2}} = 2 - \frac{2x}{\sqrt{72 - x^2}} = 0 \;\Rightarrow\; 2x = 2\sqrt{72 - x^2} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; x^2 = 72 - x^2 \;\Rightarrow\; x = 6$$

En vez de hacer P´´(x), porque resulta engorrosa, podemos estudiar el signo de P´(x) a izquierda y derecha de x = 6. Así,

si x < 6, P´(x) > 0 $\rightarrow$ P(x) es creciente.

si x > 6, P´(x) < 0 $\rightarrow$ P(x) es decreciente

Como la función crece a la izquierda de x = 6 y decrece a su derecha, para x = 6 se da el máximo de P(x).

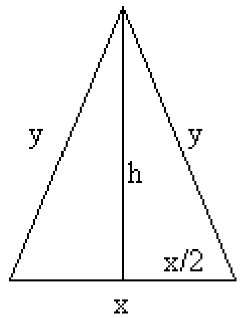
Si el lado x = 6, el otro lado vale también 6. Así pues, se trata de un cuadrado de lado 6.

MAJ04

7. Calcular la base y la altura de un triángulo isósceles de perímetro 8 y área máxima.

Solución:

Sea el triángulo de la figura.



Su perímetro vale 8 $\Rightarrow$ 2y + x = 8 $\Rightarrow$ $y = \dfrac{8-x}{2}$

Por Pitágoras: $y^2 = h^2 + \left(\dfrac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow h = \sqrt{y^2 - \dfrac{x^2}{4}}$

Sustituyendo el valor de $y = \dfrac{8-x}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow h = \sqrt{\frac{64-16x+x^2}{4} - \frac{x^2}{4}} = \sqrt{16-4x}$$

El área del triángulo es $A = \dfrac{x \cdot h}{2}$.

Sustituyendo h por su valor, $A(x) = \dfrac{x\sqrt{16-4x}}{2} = \sqrt{4x^2 - x^3}$

Para que A sea máxima: A´(x) = 0 y A´´(x) < 0:

$$A'(x) = \frac{8x-3x^2}{2\sqrt{4x^2-x^3}} = 0 \Rightarrow 8x - 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 8/3$$

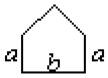
En vez de calcular la derivada segunda, que resulta muy engorroso, estudiamos el crecimiento y el decrecimiento de A(x).

Para x < 0 no tiene sentido ver el signo de A´.
Para 0 < x < 8/3, A´(x) > 0 $\Rightarrow$ A(x) crece.
Para x > 8/3, A´(x) < 0 $\Rightarrow$ A(x) decrece.

Como la función crece a la izquierda de x = 8/3 y decrece a su derecha, en x = 8/3 se da el máximo.

Por tanto, la base pedida es x = 8/3, mientras que la altura valdrá $h = \sqrt{16-4(8/3)} = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$

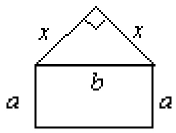
CMJ03

8. El perímetro de la ventana del dibujo mide 6 metros. Los dos lados superiores forman entre sí un ángulo de 90º. 

Calcula la longitud de los lados *a* y *b* para que el área de la ventana sea máxima.

Solución:

Suponemos que los dos lados superiores son iguales (el enunciado no lo dice, pero así lo sugiere la figura). Si su medida es x se tendrá:



Por Pitágoras:

$$x^2 + x^2 = b^2 \;\Rightarrow\; x = \frac{b}{\sqrt{2}}$$

El perímetro es: $2a + b + 2x = 6 \;\to\; 2a + b + \frac{2b}{\sqrt{2}} = 6 \;\Rightarrow\; a = \frac{6 - b(1+\sqrt{2})}{2}$

El área de la ventana es la suma del área de la sección rectangular más la de la sección triangular:

$$A = ab + \frac{x^2}{2} = \frac{6 - b(1+\sqrt{2})}{2} \cdot b + \frac{b^2}{4} \;\Rightarrow\; A(b) = \frac{12b - (1+2\sqrt{2})b^2}{4}$$

Para que A sea máxima: $A' = 0$; $A'' < 0$.

$$A'(b) = \frac{12 - 2(1+2\sqrt{2})b}{4} = 0 \;\Rightarrow\; b = \frac{6}{1+2\sqrt{2}}$$

$A''(b) = -\frac{(1+2\sqrt{2})}{2} < 0 \to$ luego, para el valor de *b* hallado se tiene el máximo de A.

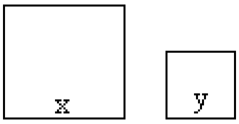
Si $b = \frac{6}{1+2\sqrt{2}} \to a = \frac{6 - \frac{6(1+\sqrt{2})}{1+2\sqrt{2}}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{1+2\sqrt{2}}$

ARJ04

9. Tenemos que hacer dos chapas cuadradas de dos distintos materiales. Los dos materiales tienen precios respectivamente de 2 y 3 euros por centímetro cuadrado. ¿Cómo henos de elegir los lados de los cuadrados si queremos que el coste total sea mínimo y si además nos piden que la suma de los perímetros de los dos cuadrados ha de ser de un metro? (2,5 puntos)

Solución:

Sean los cuadrados siguientes:



Perímetro = 4x + 4y = 100 cm

Superficie = $x^2 + y^2$

Coste = $2x^2 + 3y^2$

Despejando *y* en la ecuación del perímetro: $y = \frac{100-4x}{4} = 25 - x$

Sustituimos en la expresión del coste:

$$C(x) = 2x^2 + 3(25-x)^2 \Rightarrow C(x) = 5x^2 - 150x + 1875$$

El coste será mínimo en la solución de C´(x) = 0 que haga positiva C´´(x).

$$C'(x) = 10x - 150 = 0 \Rightarrow x = 15$$

Como C´´(x) = 10 > 0, para ese valor de x = 15 se obtiene el mínimo buscado.

Por tanto, los lados deben ser de 15 cm y de 25 – 15 = 10 cm.

ARS04

10. Descomponer el número *e* en dos sumandos positivos de forma que la suma de los logaritmos neperianos de los sumandos sea máxima (1,5 puntos). Calcular dicha suma (1 punto)

Solución:

Sean los sumandos x y e –x:

Se desea que S(x) = ln x + ln(e – x) sea máxima.

El máximo se da en las soluciones de S´(x) = 0 que hacen negativa a S´´(x).

$$S'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e-x} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{e-x}{x(e-x)} - \frac{x}{x(e-x)} = 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{e - x - x = 0} \;\Rightarrow\; x = \frac{e}{2}$$

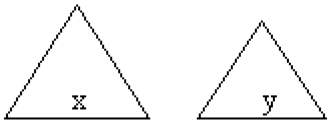
Como $S''(x) = \frac{-1}{x^2} - \frac{1}{(e-x)^2}$ es suma de dos números negativos, S´´(x) < 0 para cualquier valor de x; en consecuencia, para $x = \frac{e}{2}$ se tendrá el máximo buscado.

La suma pedida es:

$$S = \ln\frac{e}{2} + \ln\frac{e}{2} = 2\ln\frac{e}{2} = 2(\ln e - \ln 2) = 2 - 2\ln 2$$

PAS04

11. Con 60 centímetros de alambre se construyen dos triángulos equiláteros cuyos lados miden x e y. ¿Qué valores de x e y hacen que la suma de las áreas de los triángulos sea mínima. (2,5 puntos)



Solución:

La altura del triángulo de lado x es:

$$h_x = \sqrt{x^2 - \frac{x^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}x,$$

la del triángulo de lado y es, $h_y = \frac{\sqrt{3}}{2}y$

Se cumple que 3x + 3y = 60 $\Rightarrow$ y = 20 – x

Se desea que

$$S = S_x + S_y = \frac{x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}x}{2} + \frac{y\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}y}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}(x^2 + y^2)$$

sea mínima.

Sustituyendo y = 20 – x, se tiene: $S = \frac{\sqrt{3}}{4}(x^2 + (20-x)^2) = \frac{\sqrt{3}}{4}(2x^2 - 40x + 400)$

Para que S sea mínima: S´= 0 y S´´ > 0:

$$S´= \frac{\sqrt{3}}{2}(x-10) = 0 \Rightarrow \text{x = 10}$$

Como $S´´= \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$, para ese valor de x = 10 se tiene el mínimo buscado.

En consecuencia, los lados será x = 10 e y = 10; o sea, dos triángulos equiláteros iguales.

CMS04

12. Expresa el número 60 como suma de tres números positivos de forma que el segundo sea doble del primero.
Si el producto de los tres es máximo, determina el valor de dicho producto.

Solución:

Sean x, y, z los números.

Se sabe que $y = 2x$; y que $x + y + z = 60 \Rightarrow 3x + z = 60 \Rightarrow z = 60 - 3x$

El producto de los tres números es:

$$P = xyz = x \cdot 2x \cdot (60 - 3x) = -6x^3 + 120x^2$$

El producto en función de x es: $P(x) = -6x^3 + 120x^2$

Este producto es máximo en los valores de x que cumplen que $P'(x) = 0$ y $P''(x) > 0$

$$P'(x) = -18x^2 + 240x = 6x(-3x + 40) = 0 \Rightarrow x = 0;\ x = 40/3.$$

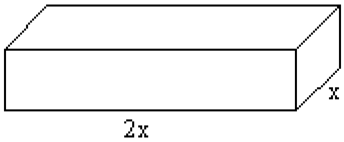
Como $P''(x) = -36x + 240$ se tiene que $P''(40/3) = -120 < 0$. Por tanto, el producto será máximo cuando $x = 40/3$.

Los otros dos números son $y = 2x = 80/3$; $z = 20$.

El producto máximo es $P = \frac{40}{3} \cdot \frac{80}{3} \cdot 20 \approx 7111{,}11$

EXS04

13. Se desea construir un paralelepípedo rectangular de 9 litros de volumen y tal que un lado de la base sea doble que el otro. Determinar las longitudes de sus lados para que el área total de sus 6 caras sea mínima.



Solución:

Si su altura es h, el volumen de este paralelepípedo vale:

$V = 2x \cdot x \cdot h = 2x^2h$

El área total de sus 6 caras es:

$$A = 2 \cdot (2x \cdot x) + 2 \cdot (2x \cdot h) + 2 \cdot (x \cdot h) \Rightarrow A = 4x^2 + 6xh$$

Como $V = 2x^2h = 9 \Rightarrow h = \dfrac{9}{2x^2}$

Sustituyendo en A:

$$A(x) = 4x^2 + \frac{27}{x}$$

Esta función es mínima en las soluciones de A´ = 0 que hacen positiva a A´´.

$$A'(x) = 8x - \frac{27}{x^2} = 0 \Rightarrow 8x^3 - 27 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{3}{2}$$

Como $A''(x) = 8 + \dfrac{54}{x^3} > 0$ para todo x > 0, para $x = \dfrac{3}{2}$ se tiene la solución mínima.

Por tanto, el lado más largo valdrá 3, y la altura $h = \dfrac{9}{2(3/2)^2} = 2$

MAS05

14. Dada la función $f(x)=\frac{1}{x}$ se pide:

a) (1 punto). Hallar la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto $(a, f(a))$ para $a > 0$.

b) (1 punto). Hallar los puntos de corte de la recta tangente hallada en el apartado a) con los dos ejes coordenados.

c) (1 punto). Hallar el valor de $a > 0$ que hace que la distancia entre los dos puntos hallados sea mínima.

Solución:

a) La ecuación de la recta tangente a f(x) en el punto $(a, f(a))$ es:

$$y - f(a) = f´(a)(x-a)$$

En este caso:

$$f(x)=\frac{1}{x} \quad \to \quad f(a)=\frac{1}{a}$$

$$f´(x)=\frac{-1}{x^2} \to f´(a)=-\frac{1}{a^2}$$

Se tendrá: $y-\frac{1}{a}=-\frac{1}{a^2}(x-a) \Rightarrow y=-\frac{1}{a^2}x+\frac{2}{a}$

b) Corte con eje OY, (se hace x = 0) $\Rightarrow$ $y=\frac{2}{a}$. Punto $\left(0,\frac{2}{a}\right)$.

Corte con eje OX, (la y = 0) $\Rightarrow$ $0=-\frac{1}{a^2}x+\frac{2}{a}$. $\Rightarrow$ $x=2a$. Punto $(2a,0)$.

c) La distancia entre los dos puntos de corte es:

$$d=\sqrt{(2a)^2+\left(\frac{2}{a}\right)^2}=\sqrt{4a^2+\frac{4}{a^2}}$$

Esta distancia será mínima cuando lo sea su cuadrado, $d^2 = D = 4a^2+\frac{4}{a^2}$.

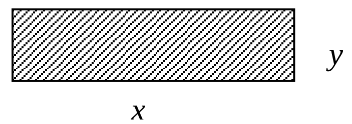
El valor mínimo se da en las soluciones de D´= 0 que hagan D´´ > 0.
(Derivamos con respecto a a.)

$$D´=8a-\frac{8}{a^3}=0 \Rightarrow 8a^4-8=0 \Rightarrow a = 1 \text{ (la solución } a = -1 \text{ se descarta)}$$

Como $D´´=8+\frac{24}{a^4}$ > 0, para a = 1 se dará el valor mínimo.

RELACIÓN DE PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

1. En un concurso se da a cada participante un alambre de dos metros de longitud para que doblándolo convenientemente hagan con el mismo un cuadrilátero con los cuatro ángulos rectos. Aquellos que lo logren reciben como premio tantos euros como decímetros cuadrados tenga de superficie el cuadrilátero construido. Calcula razonadamente la cuantía del máximo premio que se pueda obtener en este concurso.



$A(x, y) = x \cdot y$ (Función Objetivo)

Condición: $2x+2y = 2$

Condición: $2x+2y = 2 \Rightarrow x+y = 1 \Rightarrow y = 1-x$

Función Objetivo: $A(x, y) = x \cdot y \Rightarrow A(x) = x \cdot (1-x) = x-x^2$

$$A'(x) = 1-2x$$

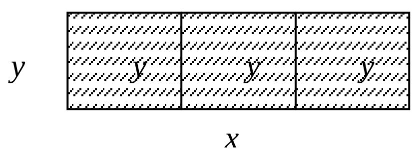
$$A'(x) = 0 \Rightarrow 1-2x = 0 \Rightarrow x = 1/2 \text{ m.}$$

$$A''(x) = -2 \Rightarrow A''(1/2) = -2 < 0 \quad \text{(es un máximo)}$$

Solución: $x = 5$ dm. e $y = 5$ dm., siendo Área = 25 dm^2.

Cuantía máxima a percibir por el premio = 25 €.

2. Un jardinero dispone de 160 metros de alambre que va a utilizar para cercar una zona rectangular y dividirla en tres partes. Las alambradas de las divisiones deben quedar paralelas a uno de los lados del rectángulo. ¿Qué dimensiones debe tener la zona cercada para que su área sea la mayor posible?



$A(x, y) = x \cdot y$ (Función objetivo)

Condición: $2x+4y = 160$

Condición: $2x+4y = 160 \Rightarrow y = \dfrac{80-x}{2}$

Función: $A(x, y) = x \cdot y$

$$A(x) = x \cdot \left(\frac{80-x}{2}\right) = 40x - \frac{x^2}{2}$$

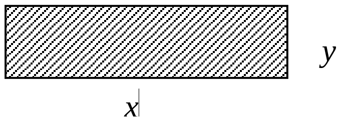
$A'(x) = 40 - x \quad \Rightarrow \quad A'(x) = 0 \Rightarrow x = 40$ m.

$A''(x) = -1 < 0$ (el punto es un máximo)

Para $x = 40$ m. resulta $y = \dfrac{80-40}{2} \Rightarrow y = 20$ m.

Solución: $x = 40$ m, $y = 20$ m.

3. Se dispone de 400 metros de alambrada para vallar un solar rectangular. ¿Qué dimensiones deberá tener el solar para que con esa alambrada se limite la mayor área posible? Razonar el proceso.



Función: $A(x, y) = x \cdot y$
Condición: $2x+2y = 400$

Condición: $2x+2y = 400 \Rightarrow x + y = 200 \Rightarrow y = 200 - x$

Función: $A(x, y) = x \cdot y$

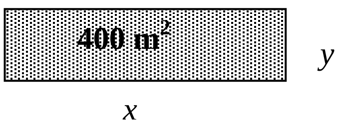
$A(x) = x \cdot (200 - x) = 200x - x^2$

$A'(x) = 200 - 2x \Rightarrow A'(x) = 0 \Rightarrow x = 100$ m

$A''(x) = -2 < 0 \Rightarrow x = 100$ es un máximo, siendo $y = 200-100=100$

Solución: $x = 100$ e $y = 100$, es un cuadrado

4. Un terreno de forma rectangular tiene 400 m^2 y va a ser vallado. El precio del metro lineal de valla es de 4 euros. ¿Cuáles serán las dimensiones del solar que hacen que el costo de la valla sea mínimo?



Perímetro del vertedero: $P = 2x+2y$

Coste cerca: $4 \cdot P = 4(2x)+4(2y) = 8x+8y$ (función objetivo)

Condición: $x \cdot y = 400$

Condición: $x \cdot y = 400 \Rightarrow y = \dfrac{400}{x}$

Coste cerca: $C(x, y) = 8x+8y$

$$C(x) = 8x+8\left(\frac{400}{x}\right) = 8x+\frac{3200}{x}$$

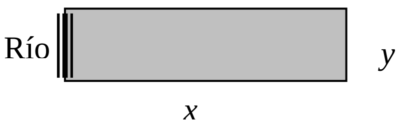
$$C'(x) = 8-\frac{3200}{x^2} \Rightarrow C'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2=400 \quad \Rightarrow \ x = \pm\, 20;\ \text{Solución válida } x = 20 \text{ m.}$$

$$C''(x) = 3200\cdot\frac{2}{x^3} \quad \Rightarrow \ C''(20)= 0.8 > 0 \qquad \text{Es un mínimo}$$

Para $x = 20$ m., siendo $y = \dfrac{400}{x} \ \Rightarrow\ y = 400/20 = 20$ m.

Solución: Las dimensiones del solar son cuadradas con x = 20m. e y = 20m.

5. Supongamos que el solar del problema anterior tiene 200 m^2 y un lado a lo largo del río requiere una valla más costosa de 5 euros el metro lineal. ¿Qué dimensiones darán el costo más bajo?



Función: $C(x, y) = 4\cdot(2x) + 4y + 5y$
Condición: $x\cdot y = 200$

Condición: $x\cdot y = 200 \ \Rightarrow\ y = \dfrac{200}{x}$

Función objetivo: $C(x, y) = 4\cdot(2x) + 4y + 5y = 8x + 9y$

$$C(x) = 8x + 9\frac{200}{x} = 8x + \frac{1800}{x}$$

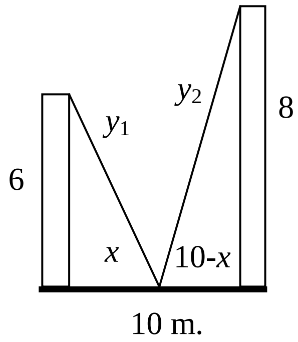
$$C'(x) = 8x+ \frac{1800}{x^2} \Rightarrow C'(x)=0 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{225} = \pm 15 \ \text{(Solución válida: 15 m.)}$$

$$C''(x) = 1800\frac{2}{x^2} = \frac{3600}{x^3} \quad \Rightarrow \quad C''(15) = \frac{3600}{15^3} > 0\,.$$

Luego, en x =15 hay un mínimo, siendo $y = 40/3$.

Solución: Las dimensiones del solar serán en este caso x =15 m. e $y = 40/3$ m.

6. *(El Problema del Cable más Corto)* Dos postes con longitudes de 6 y 8 metros respectivamente se colocan verticalmente sobre el piso con sus bases separadas una distancia de 10 metros. Calcule aproximadamente la longitud mínima de un cable que pueda ir desde la punta de uno de los postes hasta un punto en el suelo entre los postes y luego hasta la punta del otro poste.



Función: $L_{cable} = y_1 + y_2$

Condición: $y_1^2 = 36+x^2$

$y_2^2 = 64+(10\text{-}x)^2$

$$L_{cable} = L(x) = \sqrt{36+x^2} + \sqrt{64+(10-x)^2}$$

$$L'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{36+x^2}} + \frac{-2(10-x)}{2\sqrt{64+(10-x)^2}}$$

$$L'(x) = 0 \Rightarrow x \cdot \sqrt{64+(10-x)^2} = (10-x)\sqrt{36+x^2}$$

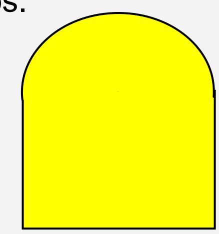
$$\Rightarrow 7x^2+180x-900 = 0 \quad \begin{cases} x_1 = -30 \ \text{ solución no válidad} \\ x_2 = \dfrac{30}{7} \end{cases}$$

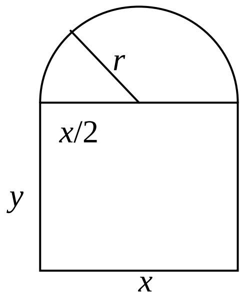
$$L''(x) = \frac{36}{\sqrt{\left(36+x^2\right)^3}} + \frac{64}{\sqrt{\left[64+(10-x)^2\right]^3}} > 0 \ \Rightarrow \ L''(30/7) > 0 \ \Rightarrow \ x = 30/7 \text{ es un mínimo}$$

$$L(30/7) = \sqrt{36+\left(\frac{30}{7}\right)^2} + \sqrt{64+\left(10-\frac{30}{7}\right)^2}$$

Solución: Longitud mínima = L(30/7) = 2.32 + 9.83 = 17.20 m.

7. (*El Primer Problema de la Ventana)* Una ventana tiene la forma de un rectángulo coronado con un semicírculo. Encuentre las dimensiones de la ventana que deja pasar más luz, si su perímetro mide 5 metros.





$L_{\text{circunferencia}} = L = 2\pi r \Rightarrow L_{\text{semicircunferencia}} = \frac{L}{2} = \pi r$

Perímetro rectángulo = $x+2y$

Perímetro total = $x + 2y + \pi r = 5$ (condición)

Función: Área: $A(x, y) = x \cdot y + \frac{\pi \cdot r^2}{2}$

Condición: $x + 2y + \frac{\pi \cdot x}{2} = 5 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{10 - (2+\pi) \cdot x}{4}$

Función: $A(x, y) = x \cdot y + \frac{\pi \cdot r^2}{2} = x \cdot y + \frac{\pi \cdot x^2/4}{2}$

$$A(x) = x \cdot \frac{10 - \left(2+\pi\right) \cdot x}{4} + \frac{\pi \cdot x^2}{8}$$

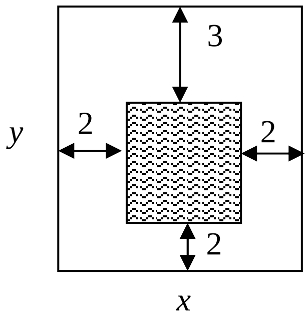
$$A'(x) = \frac{10 - 4x - \pi \cdot x}{4} \quad \Rightarrow \quad A'(x) = 0 \quad \Rightarrow x = \frac{10}{4+\pi} = 1.4\,\text{m}$$

$$A''(x) = \frac{-4-\pi}{4} < 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1.4 \text{ es un máximo}$$

$$y = \frac{10 - \left(2+\pi\right) \cdot 10/4+\pi}{4} = 0.7 \text{ m}$$

Solución: Dimensiones de la ventana: Ancho: x = 1.4 m.; Alto: $y + r$ = 0.7 + 0.7 =1.4 m.

8. Las páginas de un libro deben medir cada una 600 cm^2 de área. Sus márgenes laterales y el inferior miden 2 cm. y el superior mide 3 cm. Calcular las dimensiones de la página que permitan obtener la mayor área impresa posible.



Alto de la página impresa: y-5
Ancho de la página impresa: x-4
Área impresa = $(x-4)\cdot(y-5)$ (función objetivo)
Área páginas = $x\cdot y = 600$ (condición)

Condición: $x\cdot y = 600 \Rightarrow \quad y = 600/x$

Función: $A(x, y) = (x-4)\cdot\left(\frac{600}{x} - 5\right)$

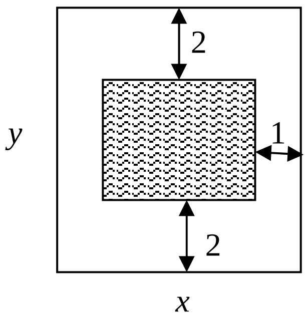
$$A(x) = -5x+620-\frac{2400}{x}$$

$A'(x) = -5+\frac{2.400}{x^2} \Rightarrow A'(x)=0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{480} \Rightarrow x=\pm 4\sqrt{30}$ (La solución negativa no es válida)

$$A''(4\sqrt{30}) = \frac{-4.800}{\left(4\sqrt{30}\right)^3} < 0\text{, es un máximo, siendo } y = \frac{150\sqrt{30}}{30} \Rightarrow y = 5\sqrt{30}$$

Solución: $x = 4\sqrt{30}$ cm. e $y = 5\sqrt{30}$ cm.

9. Una hoja de papel debe contener 18 cm^2 de texto impreso. Los márgenes superior e inferior han de tener 2 cm. cada uno, y los laterales 1 cm. Halla las dimensiones de la hoja para que el gasto de papel sea mínimo.



Función: $A(x, y) = x \cdot y$
Condición: $(x-4)\cdot(y-2)=18$

Condición: $(x\text{-}4)\cdot(y\text{-}2)=18 \quad \Rightarrow \quad y=\dfrac{10+2x}{x-4}$

Función: $A(x, y) = x \cdot y$

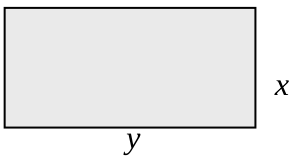
$$A(x) = x\cdot\frac{10+2x}{x-4} \quad \Rightarrow \quad A(x)=\frac{10+2x^2}{x-4}$$

$$A'(x) = \frac{2x^2-16x-40}{(x-4)^2} \quad \Rightarrow A'(x) = 0 \Rightarrow \; x=10 \text{ y } \; x=-2 \text{ (solución negativa no es válida).}$$

$$A''(x)=\frac{(4x-16)(x-4)^2-2(x-4)(2x^2-16x-40)}{(x-4)^4} \Rightarrow A''(10) > 0\text{, es un mínimo.}$$

Solución: $x=10$ e $y=5$.

> **10.** Un pastor dispone de 1000 m de tela metálica para construir una cerca rectangular aprovechando una pared ya existente. Halla las dimensiones de la cerca para que el área encerrada sea máxima.



Función: $f(x, y) = x\cdot y$

Condición: $2x + y = 1.000 \;\Rightarrow\; y=1000\text{-}2x$

$f(x, y) = x\cdot y$

$f(x) = x\cdot(1.000\text{-}2x)$

$f(x)=1.000\,x - 2\,x^2$

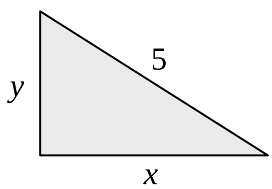
$f'(x) = 1.000 - 4x \;\Rightarrow f'(x) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = 250$

$f''(x) = -4 \;\Rightarrow\; f''(250) < 0.$

Por lo tanto, $x = 250$ es un máximo.

Solución: $x=250$ e $y=500$.

> **11.** Un segmento de longitud de 5 cm. apoya sus extremos en los semiejes positivos OX y OY, de tal manera que forma con éstos un triángulo. Halla las dimensiones del triángulo de área máxima así construido.



Función: $f(x, y)=\dfrac{x\cdot y}{2}$

Condición $x^2 + y^2 = 5$

Condición: $x^2 + y^2 = 5 \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{5 - x^2}$

Función: $f(x, y) = \dfrac{x \cdot y}{2}$

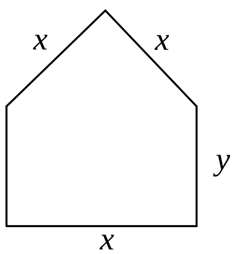
$$f(x) = \frac{x \cdot \sqrt{5 - x^2}}{2}$$

$$f'(x) = \frac{5 - 3x^2}{2\sqrt{5 - x^2}} \Rightarrow f'(x) = 0 \qquad \Rightarrow x = \pm\sqrt{5/3}$$ (La solución negativa no es válida).

$$f''(x) = \frac{-10x}{5 - x^2} \Rightarrow f''\left(\sqrt{5/3} < 0\right)$$. Por lo tanto, es un máximo.

Solución: $x = \sqrt{5/3}$; $y = \sqrt{\dfrac{10}{3}}$

12. Se considera una ventana rectangular en la que el lado superior se ha sustituido por un triángulo equilátero. Sabiendo que el perímetro de la ventana es 6,6 m, hallar sus dimensiones para que la superficie sea máxima.



Función: A $_{\text{total}}$ = A $_{\text{triángulo}}$ + A $_{\text{rectángulo}}$

Condición: $3x+2y = 6.6$

Condición: $3x + 2y = 6.6 \quad \Rightarrow \quad y = 3.3 - 1.5\,x$

$$A_{total} = f(x, y) = x \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2} + x \cdot y = \frac{x^2\sqrt{3}}{2} + x \cdot y$$

$$f(x) = \frac{x^2\sqrt{3}}{2} + x \cdot (83.3 - 1.5\,x)$$

$$f(x) = 3.3\,x - 1.07\,x^2$$

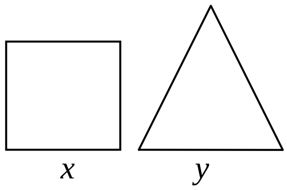
$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3.3 - 2.14x = 0 \quad \Rightarrow x = 1.54$$

$$f''(x) = -2'14 \quad \Rightarrow f''(1.54) < 0.$$

Luego, $x = 1.54$ es máximo.

Solución: $x = 1.54$; $y = 0.99$

13. Dividir un segmento de 6 cm. de longitud en dos partes, con la propiedad de que la suma de las áreas del cuadrado y del triángulo equilátero construidos sobre ellos sea máxima.



$A_{total} = A_{triángulo} + A_{cuadrado}$

Condición: $x + y = 6$

Condición: $x + y = 6 \quad \Rightarrow \quad x = 6 - y$

Función: $A_{total} = f(x, y) = \dfrac{\sqrt{3}y^2}{4} + x^2$

Sustituimos y obtenemos:

$f(y) = \dfrac{\sqrt{3}y^2}{4} + (6 - y)^2$

$f(y) = 1.43y^2 - 2y + 36$

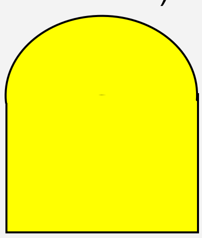
$f'(y) = 2'86y - 2 \quad \Rightarrow \quad f'(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0.7$

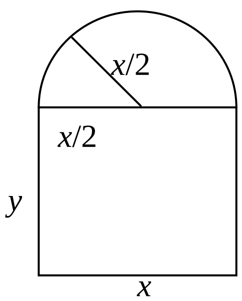
$f''(y) = -2 \quad \Rightarrow \quad f''(0.7) < 0$

Luego, en $y = 0.7$ es máximo.

Solución: $x = 5.3$; $y = 0.7$

14. Se considera una ventana como la que se indica en la figura (la parte inferior es rectangular y la superior una semicircunferencia). El perímetro de la ventana mide 6 m. Halla las dimensiones "x" e "y" del rectángulo para que la superficie de la ventana sea máxima (Expresa el resultado en función de π).





Condición: $x + 2y + \dfrac{\pi x}{2} = 6$, luego $y = \dfrac{12 - 2x - \pi x}{4}$

Función: $f(x, y) = xy + \dfrac{\pi \left(\dfrac{x}{2}\right)^2}{2}$

$$f(x) = x\left(\frac{12-2x-\pi x}{4}\right)+\frac{\pi x^2}{8}$$

$$f(x) = \frac{24x-4x^2-\pi x^2}{8}$$

$$f'(x) = \frac{1}{8}(24-8x-2\pi x)$$

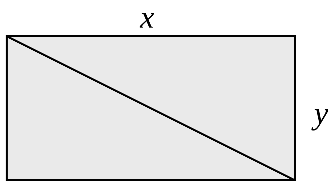
$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{12}{4+\pi}$$

$$f''(x) = -1-\frac{\pi}{4}$$

$$f''\left(\frac{12}{4+\pi}\right) = -1-\frac{\pi}{4} < 0 \Rightarrow x = \frac{12}{4+\pi} \text{ es un máximo}$$

Solución: $x = \dfrac{12}{4+\pi} = 1.68$; $y = \dfrac{12-2\cdot 1.68-\pi\cdot 1.68}{4} = 0.84$

15. Entre todos los rectángulos de perímetro 12 m. ¿cuál es el que tiene la diagonal menor? Razonar el proceso seguido.



Condición: $2x + 2y = 12 \Rightarrow y = 6-x$

Función: $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

$$f(x) = \sqrt{x^2+(6-x)^2}$$

$$f(x) = \sqrt{2x^2-12x+36}$$

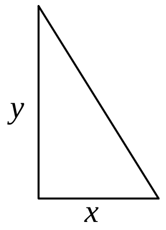
$$f'(x) = \frac{2x-6}{\sqrt{2x^2-12+36}}$$

Para $f'(x) = 0$ tenemos que $x = 3$

$$f''(x) = \frac{36}{\left(\sqrt{2x^2-12x+36}\right)^3}$$ y sustituimos $x = 3$, $f''(3) > 0$, por lo tanto es mínimo.

Solución: $x = 3$ e $y = 3$

16. Calcula el área máxima que puede tiene un triángulo rectángulo tal que la suma de la longitudes de sus dos catetos vale 4 cm.



Condición: $x+y = 4$; $y = 4-x$

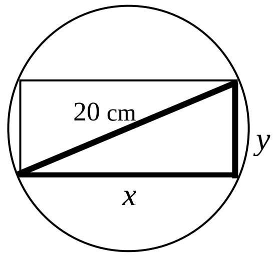
Función: Área = $f(x,y) = x \cdot y/2$

$$f(x,y) = \frac{xy}{2}$$
$$f(x) = \frac{x(4-x)}{2}$$
$$f(x) = \frac{4x-x^2}{2}$$
$$f'(x) = 2-x$$
$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$$
$$f''(x) = -1 \Rightarrow \quad f''(2) < 0$$

de donde tenemos que $x = 2$ es máximo.

Solución: $x = 2$ e $y = 2$.

17. Halla las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en una circunferencia de 10 cm. de radio. Razonar el proceso seguido.



Condición: $x^2 + y^2 = (20)^2 = 400 \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{400 - x^2}$

Función = Área = $x \cdot y$

$$f(x,y) = xy$$
$$f(x) = x\sqrt{400-x^2}$$
$$f'(x) = \frac{400-2x^2}{\sqrt{400-x^2}}$$
$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 10\sqrt{2}$$

La solución negativa no es válida.

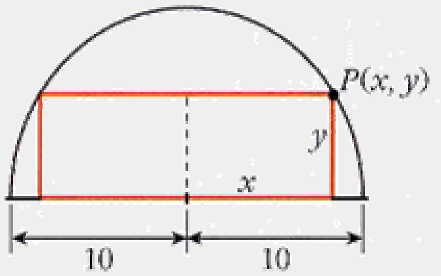
$$f''(x)=\frac{-4x\sqrt{400-x^2}-\dfrac{-2x}{2\sqrt{400-x^2}}\left(400-2x^2\right)}{400-x^2}$$

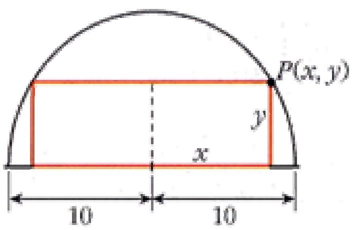
$$f''(10\sqrt{2})=\frac{-\sqrt{400}}{5}<0 \quad \text{es un mínimo}$$

$$y=\sqrt{400-\left(10\sqrt{2}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad y=10\sqrt{2}$$

Solución: $x=10\sqrt{2};\quad y=10\sqrt{2}$

18. En un jardín con forma semicírculo de radio 10 m se va a instalar un parterre rectangular, uno de cuyos lados está sobre el diámetro y el opuesto a él tiene sus extremos en la parte curva. Calcula las dimensiones del parterre para que su área sea máxima.





Condición: P(x,y) pertenece a la Circunferencia

$$x^2+y^2=100 \Rightarrow y=\sqrt{100-x^2}$$

Función: $f(x,y)=2xy$

$$f\left(x,y\right)=2xy$$

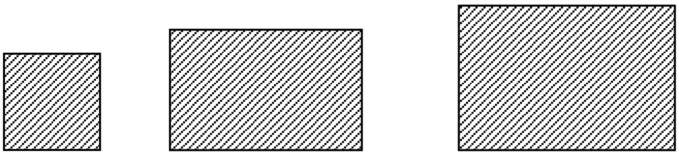
$$f\left(x\right)=2x\sqrt{100-x^2}$$

$$f'(x)=\frac{200-4x^2}{\sqrt{100-x^2}} \Rightarrow f'\left(x\right)=0 \Rightarrow x=\pm5\sqrt{2} \text{ (La solución negativa no es válida)}$$

$$f''(5\sqrt{2})<0 \text{ (máximo)}$$

Solución: Dimensión del parterre será de base = $10\sqrt{2}$ m; altura $=5\sqrt{2}$ m. Siendo el área máxima de 100 m^2.

19. Calcule las dimensiones de tres campos cuadrados de modo que: el perímetro de uno de ellos sea triple del perímetro de otro, se necesiten exactamente 1248 metros de valla para vallar los tres y la suma de las áreas de los tres campos sea la mínima posible.



x $\quad$ y $\quad$ z

Llamamos x, y, z, a los lados de las tres parcelas.

Condiciones:

i) $z = 3x$

ii) $4x+4y+4z = 1248$

de donde $z =3x$, entonces $y = 312 – 4x$

Función: $S(x,y,z) = x^2+ y^2+ z^2$

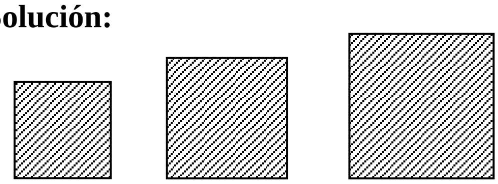
$$S(x) = x^2 + (312\text{-}4x)^2 +9x^2$$

$$S(x) = 26x^2\text{-} 2496x + 312^2$$

$$S'(x) = 52x - 2496 \text{ y para } S'(x) = 0 \text{ tenemos que } x = 48$$

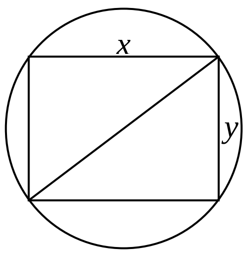
$$S''(x) = 52 \Rightarrow S''(48) > 0, \text{ por tanto, es mínimo.}$$

Solución:



$x = 48$ m $\quad$ $y = 120$ m $\quad$ $z =144$ m.

20. Una arquitecta quiere construir un jardín rectangular en un terreno circular de 100 metros de radio. Halla las dimensiones de dicho jardín para que el área sea máxima.



Condición: $x^2 + y^2 =100^2$, luego tenemos que $y = \sqrt{100^2 - x^2}$

Función: Área del jardín rectangular

$$A(x,y) = xy$$
$$A(x) = x\sqrt{100^2 - x^2}$$

El valor que haga máxima el área, también hará máxima a $A^2(x)$ y los cálculos se simplifican haciendo:

$$B(x) = A^2(x) = x^2(10000 - x^2) = 10000x^2 - x^4$$
$$B'(x) = 20000x - 4x^3 \Rightarrow B'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ Se descarta} \\ x = 70.71\text{m} \end{cases}$$
$$B''(x) = 20000 - 12x^2 \Rightarrow B''(70.71) < 0 \ (\text{máximo})$$

Solución: Para $x =$ 70.71 resulta $y = \sqrt{100^2 - 70.71^2} = 70.71\text{m}$

21. Descomponer el número *e* en dos sumandos positivos de forma que la suma de los logaritmos neperianos de los sumandos sea máxima. Calcular dicha suma.

Condición: $x+y = e$, de donde tenemos que $y = e-x$

Función: $S(x,y) = \ln(x) + \ln(y)$

$S(x) = \ln(x) + \ln(e-x)$

$$S'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e-x} \Rightarrow S'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{e}{2}$$

$$S''(x) = \frac{-1}{x^2} - \frac{1}{(e-x)^2} \Rightarrow S''(\frac{e}{2}) = \frac{-8}{e^2} < 0$$

luego, tenemos que es máximo.

La suma pedida será: $suma = \ln\frac{e}{2} + \ln\left(e - \frac{e}{2}\right) = 2 - 2\ln 2$.

Solución: $x = e/2$ y la suma S =2-2ln2

22. Una empresa ha decidido mejorar su seguridad instalando 9 alarmas. Un especialista en el tema señala que dada la estructura de la empresa sólo puede optar por dos tipos de alarmas, de tipo A o de tipo B; además, afirma que la seguridad de la empresa se puede expresar como la décima parte del producto entre el número de alarmas de tipo A instaladas y el cuadrado del número de alarmas instaladas de tipo B. ¿Cuántas alarmas de cada tipo se deben instalar en la empresa para maximizar su seguridad?

Alarmas tipo A = x

Alarmas tipo B = y

Condición: $x + y = 9$, luego $y = 9-x$

Función: La Seguridad se expresa como: $\frac{xy^2}{10} = f(x,y)$

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{10}$$
$$f(x) = \frac{x(9-x)^2}{10}$$
$$f(x) = \frac{81x - 36x^2 + x^3}{10}$$
$$f'(x) = \frac{81 - 36x + 3x^2}{10} \Rightarrow f'(x) = 0$$

los valores de la x que anulan la primera derivada son $x = 9$ y $x = 3$

$$f''(x) = \frac{-36 + 6x}{10}$$
$$f''(9) = \frac{-36 + 54}{10} > 0$$
$$f''(3) = \frac{-36 + 18}{10} < 0$$

luego, x=9 es mínimo y x=3 es máximo.

Solución: Será necesario instalar de tipo A = x = 3 alarmas y de tipo B = y = 6 alarmas.

23. Calcula dos números que cumplan que al sumarlos resulte 10 y la resta de uno de ellos menos el inverso del otro sea mínima.

Condición: $x + y = 10$, de donde $y = 10-x$

La función:

$$f(x,y) = x - \frac{1}{y}$$
$$f(x) = x - \frac{1}{10-x} = \frac{9-x^2}{10-x}$$
$$f'(x) = \frac{x^2 - 20x + 9}{(10-x)^2}$$

Como $f'(x) = 0$ tenemos que $x = 19.54$ y $x = 0.46$.

$$f''(x) = \frac{-180}{(10-x)^3}$$
$$f''(19.54) > 0 \quad \text{mínimo}$$
$$f''(0.46) < 0 \quad \text{máximo}$$

Solución: x=19.54 e y=-9.54.

24. Si un cultivador valenciano planta 200 naranjos por hectárea, el rendimiento promedio es de 300 naranjas por árbol. Por cada árbol adicional que siembre por hectárea, el cultivador obtendrá 15 naranjas menos por árbol. ¿Cuántos árboles por hectárea darán la mejor cosecha?

Nº naranjos / hectárea = 200
Rendimiento / árbol = 300 naranjas
x = nº árboles a plantar
R (x) = Rendimiento(x)

$$R(x) = (200+x)\cdot(300-15x)$$
$$R(x) = 60000 - 2700x - 15x^2$$
$$R'(x) = -2700 - 30x$$
$$R'(x) = 0 \Rightarrow x = -90$$. Solución absurda.

Conclusión: Sin plantar árboles la producción que se obtiene es mejor que si aumentamos el número de frutales de esta variedad.

25. El propietario de un edificio tiene alquilados los 40 pisos del mismo a un precio de 600 € cada uno. Por cada 60€ que el propietario aumenta el precio observa que pierde un inquilino. ¿a qué precio le convienen alquilar los pisos para obtener la mayor ganancia posible?(Ayuda: llamar x = nº de 60 € que aumenta o lo que es lo mismo el nº inquilinos perdidos.)

40 pisos
600 euros / cada uno

- Si aumenta x euros por cada piso cobra 600 + x, pero alquila $40 - \frac{x}{60}$ pisos.
- La función es el beneficio obtenido:

$$B(x) = (600+x)\cdot\left(40 - \frac{x}{60}\right) \quad \text{con} \quad 0 < x < 2400$$

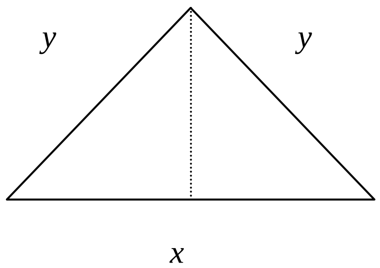
$$B(x) = 2400 + 30x - \frac{x^2}{60}$$

$$B'(x) = 30 - \frac{2x}{60} \Rightarrow B'(x) = 0 \Rightarrow x = 900$$

$$B''(x) = \frac{-x}{30} \Rightarrow B''(900) < 0 \Rightarrow \text{ Es Máximo.}$$

Solución: Aumentará 15·60€ = 900

26. Entre todos los triángulos isósceles (dos lados iguales) de perímetro 30 cm., ¿cuál es el de área máxima?



Condición: $x + 2y = 30 \Rightarrow y = \dfrac{30-x}{2}$

$$h = \sqrt{y^2 - \frac{x^2}{4}}$$

Función: $A(x,y) = \dfrac{x \cdot \sqrt{y^2 - \frac{x^2}{4}}}{2}$

$$A(x) = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{30-x}{2}\right)^2 - \frac{x^2}{4}} = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{225 - 15x} = \sqrt{\frac{225\ x^2}{4} - \frac{15x^3}{4}}$$

$$A'(x) = \frac{450 - 15x}{4 \cdot \sqrt{225 - 15x}} \Rightarrow A'(x) = 0 \Rightarrow x = 10$$

$A''(10) < 0 \Rightarrow$ Es un máximo

Solución: $x = 10$, $y = 10$

27. Para la fabricación de un determinado producto, se necesita invertir dinero en contratar empleados y comprar máquinas. El dueño de la fábrica ha estimado que si compra x máquinas y contrata "y" empleados, el número de unidades de producto que podía fabricar vendría dado por la función: $f(x,y) = 90x \cdot y^2$ Cada máquina le supone una inversión de 2500 € y cada contrato de un nuevo empleado otro de 1500 € Si el empresario sólo dispone de un presupuesto de 22500€ para este fin, determine el número de obreros que debe contratar y el número de máquinas que debe comprar para maximizar la producción.

x = máquinas.
y = empleados.

Condición: $2500x + 1500y = 22500 \Rightarrow y = \dfrac{45-5x}{3}$

Función: $f(x,y) = 90xy^2$

$$f(x) = 90x \cdot \left(\frac{45-5x}{3}\right)^2$$
$$f(x) = 250x^3 - 4500x^2 + 20500x$$
$$f'(x) = 750x^2 - 9000x + 20500$$
$$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 3 \,;\, x_2 = 9$$
$$f''(x) = 1500x - 9000$$
$$f''(3) < 0 \Rightarrow \text{ Es Máximo.}$$
$$f''(9) > 0 \Rightarrow \text{ Es Mínimo.}$$

Solución: x = 3, y = 30.

28. Una esmeralda pesa 16 grs. y sabemos que su valor es proporcional al cuadrado de su peso. Si partimos en dos trozos la esmeralda, halla el peso que debe tener cada uno de ellos para que su valor sea mínimo.

Condición: $x + y = 16 \Rightarrow y = 16 - x$

x = peso de un trozo.
y = peso del otro trozo.

La función que queremos optimizar es la que nos da el valor de la esmeralda después de dividirla, que dependerá del peso de cada trozo.

Función: $f(x,y) = kx^2 + ky^2$

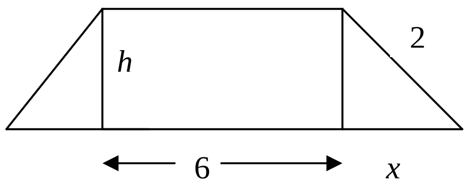
$$f(x,y) = k\left(x^2 + y^2\right)$$
$$f(x) = k\left(x^2 + (16-x)^2\right)$$
$$f(x) = k\left(2x^2 - 32x + 256\right)$$
$$f'(x) = k(4x - 32)$$
$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 8, \text{ consideramos } k > 0$$
$$f''(x) = 4k$$
$$f''(8) > 0 \Rightarrow \text{ Es mínimo.}$$

Solución: x = 8 gramos e y = 8 gramos.

RELACIÓN DE PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

Ejercicios de ampliación

29. La base menor de un trapecio isósceles mide 6 metros y la longitud de los lados no paralelos es de 2 metros. Calcula cuánto debe medir la base mayor para que el área del trapecio sea máxima.



Condición (por Pitágoras): $h^2 + x^2 = 4 \Rightarrow h = \sqrt{4-x^2}$

Función: $A_{trapecio}$

$$A_{trapecio} = \frac{(BASE + base)\cdot h}{2} = \frac{(6+2x)\cdot h}{2} = (3+x)h = f(x,h)$$

$$f(x) = (3+x)\sqrt{4-x^2}$$

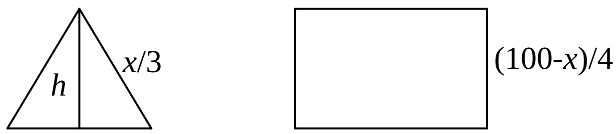
$$f'(x) = \frac{4-6x-3x^2}{\sqrt{4-x^2}} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-3-\sqrt{21}}{2} < 0 \text{ Se descarta} \\ x_2 = \dfrac{-3+\sqrt{21}}{2} > 0 \end{cases}$$

$$f''(x) = \frac{6x^3+24x^2-32x-24}{\left(\sqrt{4-x^2}\right)^3} \Rightarrow f''\left(\frac{-3+\sqrt{21}}{2}\right) < 0 \text{ es máximo}$$

Solución: $x = \dfrac{-3+\sqrt{21}}{2}$ e $y = -3+\sqrt{21}$

(el valor $y = -3-\sqrt{21}$ se descarta)

30. Se divide un alambre de 100 m de longitud en dos segmentos de longitudes x y 100-x. Con el de longitud x se forma un triángulo equilátero y con el otro segmento se forma un cuadrado. Sea f(x) la suma de las áreas del triángulo y del cuadrado. Indicar razonadamente para qué valor de x se obtiene que la suma de las áreas del triángulo y del cuadrado es mínima.



Condición:

Altura del triángulo $h=\sqrt{\left(\frac{x}{3}\right)^2-\left(\frac{x}{6}\right)^2}=\frac{x\sqrt{3}}{6}$

Área del triángulo $a_{triángulo}=\frac{\frac{x}{3}\frac{x\sqrt{3}}{6}}{2}=\frac{x^2\sqrt{3}}{36}$

Área del cuadrado $a_{cuadrado}=\left(\frac{100-x}{4}\right)^2$

Función: $a_{triángulo}+a_{cuadrado}=f(x)$

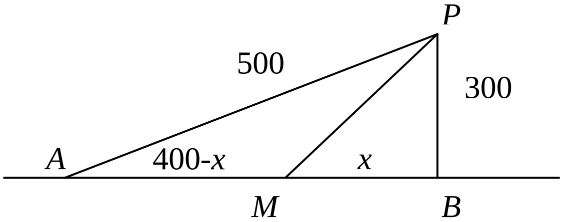
$$f(x)=\frac{x^2\sqrt{3}}{36}+\left(\frac{100-x}{4}\right)^2$$

$$f'(x)=\frac{x\sqrt{3}}{18}-\frac{100-x}{2}\Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow x=\frac{900}{\sqrt{3}+9}=83.86$$

$$f''(x)=\frac{\sqrt{3}+9}{18}>0\ (\text{mínimo})$$

Solución: Para $x=83.86$ resulta la suma de áreas mínima, siendo $h=\frac{83.86\cdot\sqrt{3}}{6}=24.21$

31. En una carretera a través del desierto un automóvil debe de ir desde la ciudad A hasta el oasis P situado a 500 Km de distancia de A. Puede aprovechar para ello una carretera recta que une las ciudades A y B y que le permite ir a una velocidad de 100 Km/h, mientras que por el desierto la velocidad es de 60 Km/h. Sabiendo que la distancia más corta de P a la carretera que une las ciudades A y B es de 300 Km, determina la ruta que deberá usar para ir de A a P en el menor tiempo posible.



La ruta a seguir es *AMP*

Aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo *ABP* se obtiene: $\overline{AB}=\sqrt{500^2-300^2}=400$

En el triángulo *MBP* se obtiene $\overline{MP}=\sqrt{x^2+300^2}$

Y el tiempo que tarda el automóvil en recorrer la distancia $AM + MP$ es: $t(x) = \frac{4-x}{100} + \frac{\sqrt{x^2+300^2}}{60}$

Derivando, $t'(x) = \frac{-1}{100} + \frac{x}{60\sqrt{x^2+300^2}}$

Si hacemos $t'(x) = 0 \Rightarrow$ obtenemos $\frac{x}{60\sqrt{x^2+300^2}} = \frac{1}{100} \Rightarrow x = \pm 225$

La solución negativa no tiene sentido: $\overline{AM} = 400 - 225 = 175$

El automóvil deja la carretera a 175 km de la ciudad *A*.

Podemos comprobar que es un mínimo utilizando la segunda derivada:

$$t''(x) = \frac{60(x^2+300^2) - 60x}{60^2 \cdot \left(x^2+300^2\right) \cdot \sqrt{x^2+300^2}} \quad \Rightarrow \quad t''(x) = \frac{x^2+300^2-x}{60\,\left(x^2+300^2\right) \cdot \sqrt{x^2+300^2}}$$

Para $x = 225 \Rightarrow t''(x) > 0$, por lo tanto, es un mínimo.

Solución: La ruta a seguir es *AMP*, de A a M hay 175 Km. y de M a P hay $\sqrt{225^2+300^2} = 375$ Km., con lo que recorrerá en total 550 Km. a una velocidad de 100 Km/h.

32. Sea T un triángulo de perímetro 60 cm. Uno de los lados del triángulo T mide x cm. y los dos lados tienen la misma longitud.

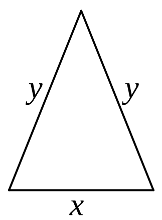
a) Deducir razonadamente las expresiones de las funciones A y f tales que:

A(x) = Área del triángulo T

F(x) = $\{A(x)\}^2$

Indicar además entre que valores puede variar x.

b) Obtener, razonadamente, el valor de x para el que f (x) alcanza el valor máximo.



Condición: $x + 2y = 60 \Rightarrow y = \frac{60-x}{2}$

La altura del triángulo será: $h = \sqrt{y^2 - \frac{x^2}{4}}$

a)

Solución:

$$A(x,y) = \mathrm{A}_{\text{triángulo}} = \frac{x\sqrt{y^2 - \frac{x^2}{4}}}{2} \quad \Rightarrow \quad A(x) = \frac{x\sqrt{\left(\frac{60-x}{2}\right)^2 - \frac{x^2}{4}}}{2}$$

$$F(x,y) = \left(A(x,y)\right)^2 = \frac{x^2}{4}\left(y^2 - \frac{x^2}{4}\right) \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{x^2}{4}\left(\left(\frac{60-x}{2}\right)^2 - \frac{x^2}{4}\right)$$

b)

$$F(x) = \frac{x^2}{4}\left(\frac{(60-x)^2}{4} - \frac{x^2}{4}\right) = \frac{x^2}{4}(900-3x)$$

$$F'(x) = 900x - 45x^2$$

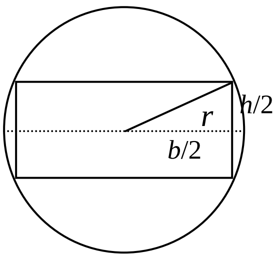
$$F'(x) = 0 \quad \Rightarrow 900x - 45x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \ \text{ y } \quad x = 20$$

Por las condiciones del problema descartamos $x = 0$, siendo:

$F''(x) = -90x \quad \Rightarrow \quad F''(20) < 0$. Por lo tanto es máximo.

Solución: $x = 20$ e $y = 20$.

33. Comprueba que el rectángulo de mayor área que puede inscribirse en una circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = r^2$ es un cuadrado de lado $\sqrt{2}r$ **.**



Condición:

$$r^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2$$

$$r^2 = \frac{b^2 + h^2}{4}$$

$$h = \sqrt{4r^2 - b}$$

Función = Área = $b \cdot h$

$$f(b,h) = b \cdot h$$

$$f(b) = b\sqrt{4r^2 - b^2}$$

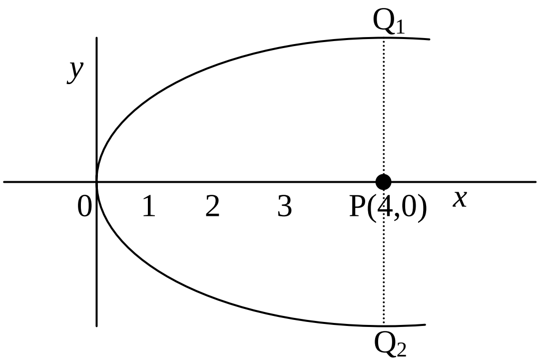
$$f'(b) = \sqrt{4r^2 - b^2} - \frac{b^2}{\sqrt{4r^2 - b^2}} \Rightarrow f'(b) = 0 \Rightarrow b = \sqrt{2}r$$

$$f''(b) = -\frac{b^2}{\sqrt{4r^2 - b^2}} - \frac{2b\left(4r^2 - b^2\right) + b^4}{\sqrt{\left(4r^2 - b^2\right)^3}} < 0$$

$$h = \sqrt{4r^2 - b^2} = \sqrt{4r^2 - \left(\sqrt{2}r\right)^2} = \sqrt{2}r$$

Solución : El área es máxima para: $b = \sqrt{2}r;\quad h = \sqrt{2}r$

34. Determine los puntos de la curva $y^2 = 4x$ que están a distancia mínima del punto P (4, 0).



Condición: $y^2 = 4x$ de donde $y = 2\sqrt{x}$

Un punto de la curva tiene la forma P(x, $\pm 2\sqrt{x}$)

Función: $d(P,Q) = \sqrt{(x-4)^2 + \left(\pm 2\sqrt{x}\right)^2}$

$$d(P,Q) = \sqrt{(x-4)^2 + \left(\pm 2\sqrt{x}\right)^2}$$

$$d(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 16}$$

$$d'(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2 - 4x + 16}} \Rightarrow d'(x) = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$d''(x) = \frac{12}{\sqrt{\left(x^2 - 4x + 16\right)^3}} \Rightarrow d''(2) > 0$$

El punto x = 2 es mínimo.

Solución: $Q_1(2, 2\sqrt{2})$ y $Q_2(2, -2\sqrt{2})$

35. Un rectángulo tiene por vértices los puntos de coordenadas $(0,0)$, $(a,0)$, $(0,b)$ y (a,b), de modo que el punto (a,b) tiene coordenadas positivas y está situado en la curva de ecuación: $y = \frac{1}{x^2} + 4$. De todos estos rectángulos hallar razonadamente el de área mínima.

Condición: Si (a, b) pertenece a la curva, verifica: $b = \frac{1}{a^2} + 4$

Función: El área del rectángulo es $A(a) = a\left(\frac{1}{a^2} + 4\right) = \frac{1}{a} + 4a$

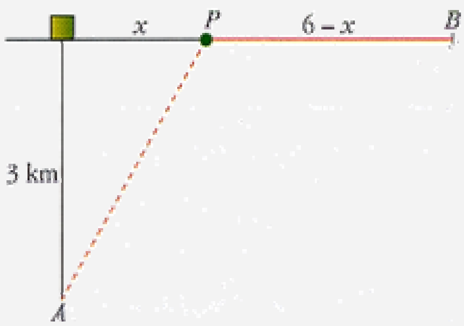
$$A'(a) = \frac{-1}{a^2} + 4 \Rightarrow A'(a) = 0 \Rightarrow a = \pm\frac{1}{2}$$

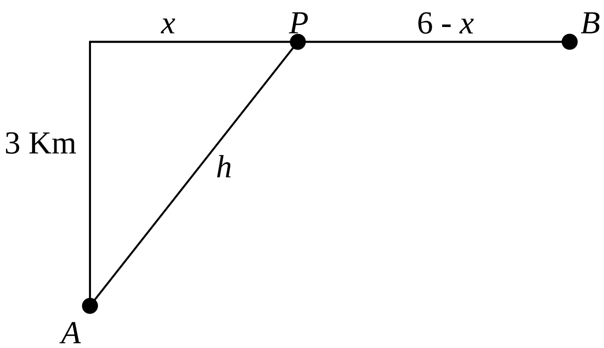
El valor a = -1/2 no es valido por que se indica que las coordenadas son positivas.

$$A''(a) = \frac{2}{a^3} \Rightarrow A''(\frac{1}{2}) > 0 \text{ (es mínimo)}$$

Solución: Los vértices serán (0,0), (1/2,0), (1/2,8) y (0,8)

36. (Problema del tiempo mínimo).- Un nadador, A, se encuentra a 3 km. De la playa enfrente de una caseta. Desea ir a B, en la misma playa, a 6 Km. De la caseta. Sabiendo que nada a 3 km/h y que anda por la arena a 5 km/h, averigua a qué lugar debe dirigirse a nado para llegar a B en el menor tiempo posible.





$h = \sqrt{9 + x^2}$ a 3 Km/h

Recorre $6 - x$ a 5 Km/h

Tiempo empleado:

$$t(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{3} + \frac{6 - x}{5}$$

$$t´(x) = \frac{2x}{6\sqrt{x^2+9}} - \frac{1}{5}$$

Haciendo $t´(x) = 0 \Rightarrow 10x - 6\sqrt{x^2+9} = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{9}{4} = 2´25\ ; x_2 = \frac{-9}{4}$ (No valida)

$t´´(2´25) > 0 \Rightarrow$ Es mínimo.

Solución:

- Debe dirigirse a un punto que esté a 2.25 Km de la caseta.
- Tiempo que tarda en llegar:

$$t = \frac{\sqrt{2´25^2+9}}{3} + \frac{6-2´25}{5}$$

t = 2 horas.

37. Determina el punto de la gráfica de la función $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 7x + 5$ en el que la pendiente de la recta tangente es máxima. ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente en ese punto?

Condición: $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 7x + 5$

Pendiente: $p(x) = f´(x) = -3x^2 + 12x - 7$

$p´(x) = -6x + 12 \quad , \quad p´(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$

$p´´(x) = -6 \quad , \quad p´´(2) < 0 \quad \Rightarrow \quad Es\ Máximo$

Solución:

Punto buscado: P(2, f(2))

P(2, 7)

Ecuación Recta Tangente: $y - 7 = p(2)\ (x - 2)$

$y - 7 = 5·(x - 2)$

CAPÍTULO

10

Optimización

[1]

10.1 Problemas de optimización

Un problema de optimización consiste en minimizar o maximizar el valor de una variable. En otras palabras se trata de calcular o determinar el valor mínimo o el valor máximo de una función de una variable.
Se debe tener presente que la variable que se desea minimizar o maximizar debe ser expresada como función de otra de las variables relacionadas en el problema.
En ocasiones es preciso considerar las restricciones que se tengan en el problema, ya que éstas generan igualdades entre las variables que permiten la obtención de la función de una variable que se quiere minimizar o maximizar.
En este tipo de problemas se debe contestar correctamente las siguientes preguntas:

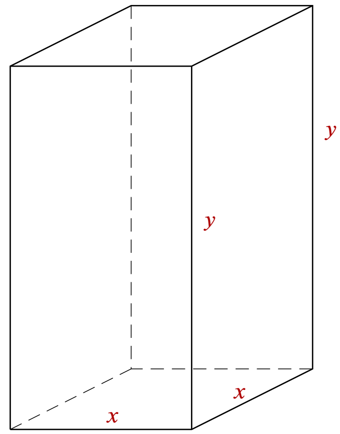
- ¿Qué se solicita en el problema?
- ¿Qué restricciones aparecen en el problema?

La respuesta correcta a la primera pregunta nos lleva a definir la función que deberá ser minimizada o maximizada.
La respuesta correcta a la segunda pregunta dará origen a (al menos) una ecuación que será auxiliar para lograr expresar a la función deseada precisamente como una función de una variable.

Ejemplo 10.1.1 *Una caja con base cuadrada y parte superior abierta debe tener un volumen de* $50\ cm^3$. *Encuentre las dimensiones de la caja que minimicen la cantidad de material que va a ser usado.*

▼ La siguiente figura representa la caja:

[1] canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008



Volumen de la caja, según la figura:

$$V = x^2y \;\&\; V = 50 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; 50 = x^2y; \text{ esta igualdad relaciona las variables del problema.}$$

De esta ecuación podemos obtener y como función de x o viceversa, despejando la variable elegida.

El área de la caja sin tapa:

$$A = x^2 + 4xy\,.$$

Ésta es la cantidad de material que deseamos que sea mínima; vemos que es una función de dos variables.

Despejamos y de la restricción dada, esto es, de la fórmula del volumen:

$$y = \frac{50}{x^2}\,.$$

Sustituimos en el área y obtenemos una función de una sola variable:

$$A(x) = x^2 + 4x\left(\frac{50}{x^2}\right) = x^2 + \frac{200}{x} = x^2 + 200x^{-1}\,.$$

Derivando:

$$A'(x) = 2x - 200x^{-2} = 2x - \frac{200}{x^2} = \frac{2x^3 - 200}{x^2}\,;$$
$$A''(x) = 2 + 200\left(\frac{2}{x^3}\right) = 2 + \frac{400}{x^3} > 0\,.$$

Calculamos puntos críticos:

$$A'(x) = 0 \;\Rightarrow\; 2x^3 - 200 = 0 \;\Rightarrow\; x^3 = 100 \;\Rightarrow\; x = \sqrt[3]{100}\,\text{cm}\,.$$

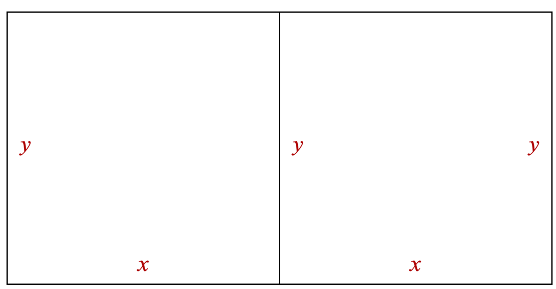
Es un mínimo absoluto pues $A''(x) > 0$ para cualquier $x > 0$. El valor correspondiente de la otra variable es

$$y = \frac{50}{100^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{2}\frac{100}{100^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{2}100^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{100} = \frac{1}{2}x\,\text{cm}\,.$$

□

Ejemplo 10.1.2 *Un ranchero tiene* 300 *m de malla para cercar dos corrales rectangulares iguales y contiguos, es decir, que comparten un lado de la cerca. Determinar las dimensiones de los corrales para que el área cercada sea máxima.*

▼ La siguiente figura representa los corrales contiguos:



Tenemos que el perímetro y el área de los corrales son, respectivamente:

$$P = 4x + 3y = 300 \quad \& \quad A = 2xy\,.$$

Pero como $y = \dfrac{300 - 4x}{3}$:

$$A(x) = \frac{2x(300 - 4x)}{3} = 200x - \frac{8}{3}x^2\,.$$

Derivando y obteniendo los puntos críticos:

$$A'(x) = 200 - \frac{16}{3}x = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{16}{3}x = 200 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{3\cdot 200}{16} = \frac{75}{2} \text{ es el punto crítico}$$

y como

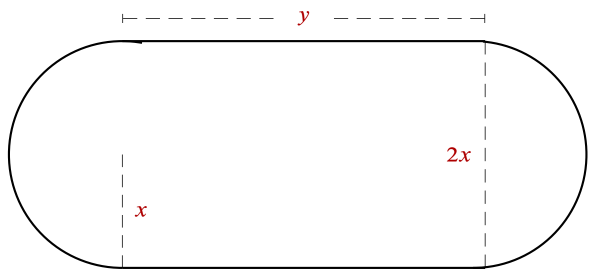
$$A''(x) = -\frac{16}{3} < 0, \text{ entonces se trata de un máximo.}$$

El área máxima ocurre para $x = \dfrac{75}{2}$ m & $y = \dfrac{300 - 150}{3} = 50$ m, que son las dimensiones pedidas.

□

Ejemplo 10.1.3 *Un terreno tiene la forma de un rectángulo con dos semicírculos en los extremos. Si el perímetro del terreno es de* 50 *m, encontrar las dimensiones del terreno para que tenga el área máxima.*

▼ El terreno lo representamos por la siguiente figura:



El área del terreno es

$$A = 2xy + \pi x^2 .$$

El perímetro, $P = 50$ m, está dado por $P = 2y + 2\pi x$, por lo que

$$2y + 2\pi x = 50 \Rightarrow y = \frac{50 - 2\pi x}{2} = 25 - \pi x.$$

Si sustituimos este valor en la fórmula del área, la tendremos expresada como función de una variable x:

$$A(x) = 2x(25 - \pi x) + \pi x^2 = 50x + x^2(\pi - 2\pi) = 50x - \pi x^2.$$

Su punto crítico se obtiene cuando $A'(x) = 0$. Esto es:

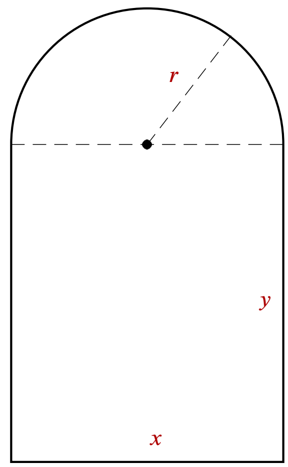
$$A'(x) = \left(50x - \pi x^2\right)' = 50 - 2\pi x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{50}{2\pi} = \frac{25}{\pi}.$$

Como $A''(x) = -2\pi < 0$, se trata en efecto de un máximo; además $y = 25 - \pi\frac{25}{\pi} = 0$, es decir, el área máxima se obtiene cuando el terreno tiene la forma circular.
Éste fue un típico problema isoperimétrico, en el que se pide hallar una figura de área máxima teniendo el perímetro fijo, como se cuenta que se construyó la ciudad de Cartago sobre el máximo terreno que se pudiese abarcar con una cuerda hecha a partir de una piel de vaca.

□

Ejemplo 10.1.4 *Una ventana presenta forma de un rectángulo coronado por un semicírculo. Encuentre las dimensiones de la ventana con área máxima, si su perímetro es de* 10 *m.*

▼ Un croquis de la ventana es el siguiente:



Si A es el área que deseamos que sea máxima y P es el perímetro de la ventana, entonces

$$A = xy + \frac{1}{2}\pi r^2 \ \& \ P = x + 2y + \pi r.$$

Pero debido a que $r = \dfrac{x}{2}$ y a que $P = 10$:

$$A = xy + \frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 \ \& \ 10 = x + 2y + \pi\left(\frac{x}{2}\right);$$
$$A = xy + \frac{\pi}{8}x^2 \ \& \ 10 = x\left(1 + \frac{\pi}{2}\right) + 2y.$$

Es decir, tenemos una función de dos variables $\left(A = xy + \dfrac{\pi}{8}x^2\right)$ y una ecuación $\left[x\left(1 + \dfrac{\pi}{2}\right) + 2y = 10\right]$. De la ecuación despejamos la variable y para luego sustituirla en la función A.

$$\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)x + 2y = 10 \ \Rightarrow \ 2y = 10 - \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)x \ \Rightarrow \ y = \frac{1}{2}\left[10 - \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)x\right] =$$
$$= \frac{10}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{2+\pi}{2}\right)x \ \Rightarrow \ y = 5 - \frac{2+\pi}{4}x;$$

sustituyendo ahora en A:

$$A(x) = xy + \frac{\pi}{8}x^2 = x\left(5 - \frac{2+\pi}{4}x\right) + \frac{\pi}{8}x^2 = 5x - \frac{2+\pi}{4}x^2 + \frac{\pi}{8}x^2 =$$
$$= \frac{\pi}{8}x^2 - \frac{2+\pi}{4}x^2 + 5x = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{2+\pi}{4}\right)x^2 + 5x =$$
$$= \frac{\pi - 2(2+\pi)}{8}x^2 + 5x = \frac{\pi - 4 - 2\pi}{8}x^2 + 5x =$$
$$= \frac{-\pi - 4}{8}x^2 + 5x \ \Rightarrow \ A(x) = -\frac{\pi + 4}{8}x^2 + 5x;$$

$A(x)$ es la función de la variable x que queremos maximizar. Derivando y calculando puntos críticos:

$$A'(x) = -\frac{\pi+4}{8}(2x) + 5 = -\frac{\pi+4}{4}x + 5;$$
$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi+4}{4}x + 5 = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi+4}{4}x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{20}{\pi+4}.$$

Entonces, $A(x)$ tiene un punto crítico en $x_1 = \dfrac{20}{\pi+4}$.

$$A'(x) = -\frac{\pi+4}{4}x + 5 \Rightarrow A''(x) = -\frac{\pi+4}{4} \text{ para cada } x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A''(x_1) = -\frac{\pi+4}{4} \Rightarrow A''(x_1) < 0.$$

$A(x)$ tiene un máximo local estricto en $x_1 = \dfrac{20}{\pi+4}$.

Entonces el área A de la ventana es máxima cuando $x = \dfrac{20}{\pi+4}$ m, para la cual

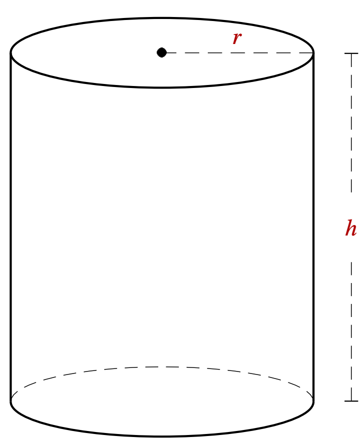
$$y = 5 - \frac{2+\pi}{4}x = 5 - \left(\frac{\pi+2}{4}\right)\left(\frac{20}{\pi+4}\right) = 5 - \frac{5(\pi+2)}{\pi+4} =$$
$$= 5\left(1 - \frac{\pi+2}{\pi+4}\right) = 5\left(\frac{\pi+4-\pi-2}{\pi+4}\right) = 5\left(\frac{2}{\pi+4}\right) = \frac{10}{\pi+4};$$

es decir, cuando $x = \dfrac{20}{\pi+4}$ m y cuando $y = \dfrac{10}{\pi+4}$ m. Vemos que $y = \dfrac{x}{2}$.

□

Ejemplo 10.1.5 *Se desea construir un recipiente cilíndrico de metal con tapa que tenga una superficie total de 80 cm^2. Determine sus dimensiones de modo que tenga el mayor volumen posible.*

▼ La figura del cilindro es la siguiente:



Se desea maximizar el volumen $V = \pi r^2 h$ que depende de dos variables r & h.
Se sabe que el área total $A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$ debe ser igual a 80 cm^2.
Es decir, se sabe que $2\pi r^2 + 2\pi r h = 80$.
Tenemos entonces:

Una función $V = \pi r^2 h$;

Una ecuación $2\pi r^2 + 2\pi r h = 80$.

De la ecuación despejamos una de las variables (la que nos convenga) para sustituirla en la función. Conviene despejar h ya que para r se obtiene una ecuación cuadrática.

$$2\pi r^2 + 2\pi r h = 80 \Rightarrow \pi r^2 + \pi r h = 40 \Rightarrow \pi r h = 40 - \pi r^2 \Rightarrow h = \frac{40 - \pi r^2}{\pi r}.$$

Sustituyendo en V obtendremos el volumen V como función de una única variable: r

$V = \pi r^2 h = \pi r^2 \left(\dfrac{40 - \pi r^2}{\pi r}\right) = r(40 - \pi r^2) \Rightarrow V(r) = 40r - \pi r^3$ que es la función a maximizar.

Derivando y obteniendo puntos críticos:

$$\begin{aligned} V'(r) &= 40 - 3\pi r^2; \\ V'(r) &= 0 \Leftrightarrow 40 - 3\pi r^2 = 0 \Leftrightarrow r^2 = \frac{40}{3\pi} \approx 4.2441 \Rightarrow \\ &\Rightarrow r = \pm\sqrt{4.2441} \approx \pm 2.0601. \end{aligned}$$

En el contexto del problema se ignora el valor negativo de r y sólo nos importa $r_1 \approx 2.0601$;

$$V'(r) = 40 - 3\pi r^2 \Rightarrow V''(r) = -6\pi r;$$
$$V''(r_1) = -6\pi r_1 \approx -6\pi(2.0601) < 0.$$

Por lo anterior, la función $V(r)$ tiene un máximo cuando $r = 2.0601$.
La altura h del cilindro entonces es

$$h_1 = \frac{40 - \pi r_1^2}{\pi r_1} \approx \frac{40 - \pi(2.0601)^2}{\pi(2.0601)} \approx 4.1203.$$

Por lo tanto, las dimensiones del cilindro con volumen máximo son

$$r_1 \approx 2.0601 \text{ cm } \ \& \ h_1 \approx 4.1203 \text{ cm}.$$

Observamos que $h_1 = 2r_1$, pues

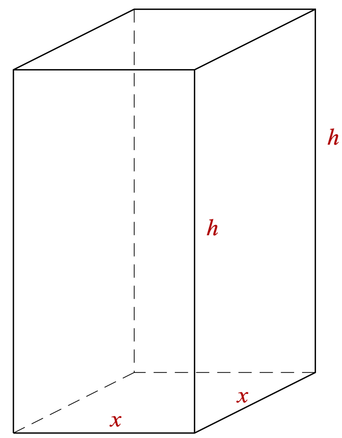
$$\frac{40 - \pi r_1^2}{\pi r_1} = 2r_1 \Leftrightarrow 40 - \pi r_1^2 = 2\pi r_1^2 \Leftrightarrow 40 = 3\pi r_1^2 \Leftrightarrow r_1^2 = \frac{40}{3\pi}, \text{ que es el caso.}$$

□

Ejemplo 10.1.6 *Se va a construir una cisterna rectangular con base y tapa cuadradas para almacenar* 12 000 $pies^3$ *de agua. Si el concreto para construir la base y los lados tiene un costo de* \$100 *por* pie^2 *y el material para construir la tapa cuesta* \$200 *por* pie^2 *¿cuáles son las dimensiones de la cisterna que minimizan el costo de su construcción?*

▼ ¿Qué se quiere en el problema?
Determinar las dimensiones de la cisterna que minimizan el costo de su construcción.
Suponiendo que las dimensiones de la cisterna son: x pies el lado de la base cuadrada y h pies su altura. ¿Cuál es el costo de su construcción?

La siguiente figura representa a la cisterna:



Para encontrar las dimensiones (x & h) que minimizan el costo de su construcción se necesita la expresión del costo de la cisterna. Usamos la tabla siguiente:

	Costo unitario (\$) por pie^2	*Área (pie*^{2}*)*	*Costo total* (\$)
Base	100	x^2	$100x^2$
Tapa	200	x^2	$200x^2$
Caras laterales	100	$4xh$	$400xh$
	Costo de la cisterna: $300x^2 + 400xh$		

El costo total de la contrucción de la cisterna es:

$$C = 300x^2 + 400xh \text{ pesos} .$$

En el problema aparece la siguiente restricción: el volumen de la cisterna debe ser igual a 12 000 pies^3, es decir, que $x^2h = 12\,000$.
Tenemos pues:
Una función $C = 300x^2 + 400xh$ y una ecuación $x^2h = 12\,000$.
De la ecuación despejamos una de las variables (la que más convenga) para sustituirla en la función.
Conviene despejar h.

$$x^2h = 12\,000 \Rightarrow h = \frac{12\,000}{x^2} .$$

Sustituyendo en la función se obtiene

$$C = 300x^2 + 400xh = 300x^2 + 400x\left(\frac{12\,000}{x^2}\right) ;$$

$$C(x) = 300x^2 + \frac{4\,800\,000}{x} .$$

Ésta es la función (de una sola variable: x) que se quiere minimizar.

$$C(x) = 300x^2 + 4\,800\,000x^{-1} \Rightarrow C'(x) = 600x - 4\,800\,000x^{-2} .$$

Derivando y calculando sus puntos críticos:

$$C'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 600x - \frac{4\,800\,000}{x^2} = 0 \;\Leftrightarrow\; 600x = \frac{4\,800\,000}{x^2} \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; x^3 = \frac{4\,800\,000}{600} = 8\,000 \;\Leftrightarrow\; x = \sqrt[3]{8\,000} = 20\,.$$

Es decir, la función $C(x)$ tiene un punto crítico en $x = 20$. Ahora bien

$$C'(x) = 600x - 4\,800\,000x^{-2} \;\Rightarrow\; C''(x) = 600 + 9\,600\,000x^{-3} > 0 \text{ para cualquier } x > 0\,.$$

Lo cual implica que el punto crítico es un mínimo para $C(x)$ (por el criterio de la segunda derivada). El costo C de la cisterna es mínimo cuando $x = 20$ pies y por tanto

$$h = \frac{12\,000}{x^2} = \frac{12\,000}{(20)^2} = \frac{12\,000}{400} = 30\,.$$

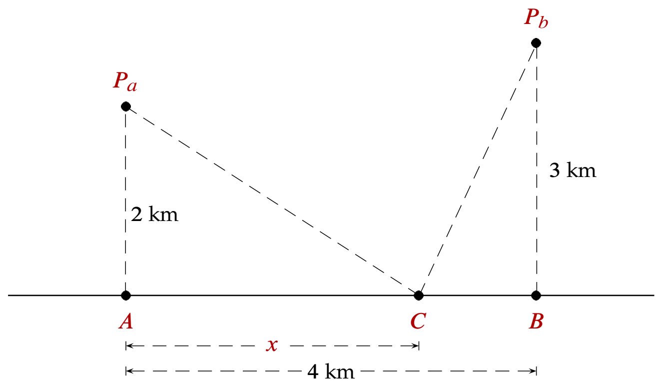
Esto es, el costo mínimo es cuando $x = 20$ pies y $h = 30$ pies. Con lo cual:

$$\begin{aligned} C &= 300x^2 + 400xh\,;\\ C_{\min} &= C(20) = 300(20)^2 + 400(20)(30) = 120\,000 + 240\,000\,;\\ C_{\min} &= \$360\,000\,. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 10.1.7 *Dos poblados P_a y P_b están a 2 km y 3 km, respectivamente, de los puntos más cercanos A y B sobre una línea de transmisión, los cuales están a 4 km uno del otro. Si los dos poblados se van a conectar con un cable a un mismo punto de la línea, ¿cuál debe ser la ubicación de dicho punto para utilizar el mínimo de cable?*

▼



Sea C el punto de conexión ubicado, digamos, a x km del punto A y por supuesto a $4 - x$ km del punto B.
Si l es la longitud del cable utilizado para conectar P_a y P_b con C, entonces:

$$l = \overline{P_aC} + \overline{P_bC} = \sqrt{x^2 + 2^2} + \sqrt{(4 - x)^2 + 3^3}\,.$$

La función a minimizar es:

$$l(x) = \sqrt{x^2+4} + \sqrt{(4-x)^2+9} = (x^2+4)^{\frac{1}{2}} + \left[(4-x)^2+9\right]^{\frac{1}{2}} .$$

Derivando y obteniendo puntos críticos:

$$l'(x) = \frac{1}{2}(x^2+4)^{-\frac{1}{2}}2x + \frac{1}{2}\left[(4-x)^2+9\right]^{-\frac{1}{2}}2(4-x)(-1) ;$$
$$l'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} - \frac{4-x}{\sqrt{(4-x)^2+9}} ;$$
$$l'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} - \frac{4-x}{\sqrt{(4-x)^2+9}} = 0 \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{4-x}{\sqrt{(4-x)^2+9}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x\sqrt{(4-x)^2+9} = (4-x)\sqrt{x^2+4} .$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad:

$$x^2[(4-x)^2+9] = (4-x)^2(x^2+4) \Rightarrow x^2(4-x)^2 + 9x^2 = x^2(4-x)^2 + 4(4-x)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 9x^2 = 4(4-x)^2 \Rightarrow 9x^2 = 4(16-8x+x^2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 9x^2 = 64 - 32x + 4x^2 \Rightarrow 5x^2 + 32x - 64 = 0 .$$

Esta última ecuación tiene por soluciones:

$$x = \frac{-32 \pm \sqrt{(32)^2 - 4(5)(-64)}}{2(5)} = \frac{-32 \pm \sqrt{2304}}{10} = \frac{-32 \pm 48}{10} .$$

De donde se obtienen dos puntos críticos que son:

$$x_1 = \frac{-32+48}{10} = \frac{16}{10} = 1.6 \text{ así como } x_2 = \frac{-32-48}{10} = \frac{-80}{10} = -8 .$$

Claramente el valor $x_2 = -8 < 0$ es descartado y sólo consideramos $x_1 = 1.6$.

Ya que

$$l''(x) = \frac{4}{(x^2+4)^{\frac{3}{2}}} + \frac{9}{[(4-x)^2+9]^{\frac{3}{2}}} ,$$

entonces $l''(x) > 0$ para cada x. En particular $l''(1.6) > 0$, por lo que $l(x)$ es mínima cuando $x = 1.6$ km.

Puesto que $0 \le x \le 4$, calculemos los números $l(0)$, $l(1.6)$ y $l(4)$ a manera de ejemplo:

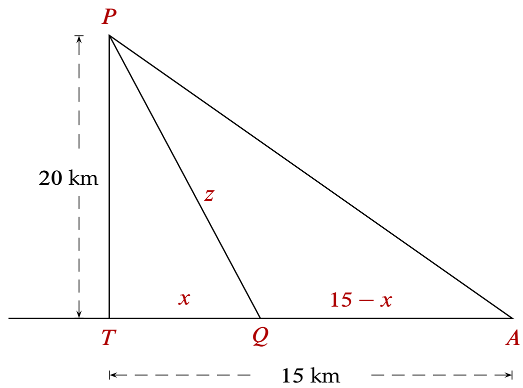
$$l(0) = \sqrt{0^2+4} + \sqrt{(4-0)^2+9} = 2 + \sqrt{25} = 2 + 5 = 7 ;$$
$$l(1.6) = \sqrt{(1.6)^2+4} + \sqrt{(4-1.6)^2+9} = \sqrt{6.56} + \sqrt{14.76} \approx 6.4 ;$$
$$l(4) = \sqrt{4^2+4} + \sqrt{(4-4)^2+9} = \sqrt{20} + 3 \approx 7.5 .$$

Se ve pues que $l(x)$ es menor cuando $x = 1.6$ km, siendo la longitud mínima del cable igual a 6.4 km aproximadamente.

□

Ejemplo 10.1.8 *Se requiere construir un oleoducto desde una plataforma marina que está localizada al norte 20 km mar adentro, hasta unos tanques de almacenamiento que están en la playa y 15 km al este. Si el costo de construcción de cada km de oleoducto en el mar es de 2 000 000 de dólares y en tierra es de 1 000 000, ¿a qué distancia hacia el este debe salir el oleoducto submarino a la playa para que el costo de la construcción sea mínimo?*

▼ Usamos la siguiente figura:



Consideremos que la plataforma está en P y que T es el punto de la playa más cercano a ella; que A es donde están los tanques de almacenamiento y Q es el punto de la playa donde debe de salir el oleoducto submarino.

Si x representa la distancia del punto T al punto Q, entonces considerando el triángulo rectángulo PTQ:

$$z^2 = x^2 + (20)^2 \;\Rightarrow\; z = \sqrt{x^2 + 400}\,,$$

que es la porción de oleoducto submarino; $\overline{QA} = 15 - x$ es la porción de oleoducto en tierra.

Es importante notar que $0 \le x \le 15$.

El costo de construir z kilómetros de oleoducto submarino, a razón de 2 000 000 de dólares por km es de $2z$ millones de dólares y el costo de construir $15-x$ km de oleoducto terrestre, a razón de 1 000 000 de dólares por km es $1 \cdot (15 - x)$ millones de dólares. Entonces, el costo total de la construcción del oleoducto (en millones de dólares) es

$$C = 2z + (15 - x) = 2\sqrt{x^2 + 400} + 15 - x \;\Rightarrow\; C(x) = 2\sqrt{x^2 + 400} + 15 - x = 2(x^2 + 400)^{\frac{1}{2}} + 15 - x$$

que es la función a minimizar. Derivando y calculando puntos críticos:

$$C'(x) = 2\left(\frac{1}{2}\right)(x^2 + 400)^{-\frac{1}{2}}2x - 1 = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 400}} - 1\,;$$

$$C'(x) = 0 \;\Rightarrow\; C'(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 - 400}} - 1 = 0 \;\Rightarrow\; \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 400}} = 1 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 2x = \sqrt{x^2 + 400} \;\Rightarrow\; 4x^2 = x^2 + 400 \;\Rightarrow\; 3x^2 = 400 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; x^2 = \frac{400}{3} \;\Rightarrow\; x = \pm\frac{20}{\sqrt{3}}\,.$$

Por ser $x \geq 0$ podemos descartar $x = -\dfrac{20}{\sqrt{3}} < 0$ y solamente analizaremos el costo en $x = \dfrac{20}{\sqrt{3}}$.

$$C'(x) = 2x(x^2 + 400)^{-\frac{1}{2}} - 1\,;$$
$$C''(x) = 2x\left(-\frac{1}{2}\right)(x^2+400)^{-\frac{3}{2}}2x + 2(x^2+400)^{-\frac{1}{2}} = \frac{-2x^2}{(x^2+400)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2}{(x^2+400)^{\frac{1}{2}}}\,;$$
$$C''(x) = \frac{-2x^2 + 2(x^2+400)}{(x^2+400)^{\frac{3}{2}}} = \frac{800}{(x^2+400)^{\frac{3}{2}}}\,.$$

Vemos que $C''(x) > 0$ para cualquier x.

Por lo cual $C(x)$ tiene un mínimo local estricto en $x = \dfrac{20}{\sqrt{3}}$.

Ahora bien, no debemos olvidar que $0 \leq x \leq 15$.

¿Cuál será el costo $C(x)$ en los casos extremos $x = 0$ y en $x = 15$?

Ya que $C(x) = 2\sqrt{x^2 + 400} + 15 - x$, entonces

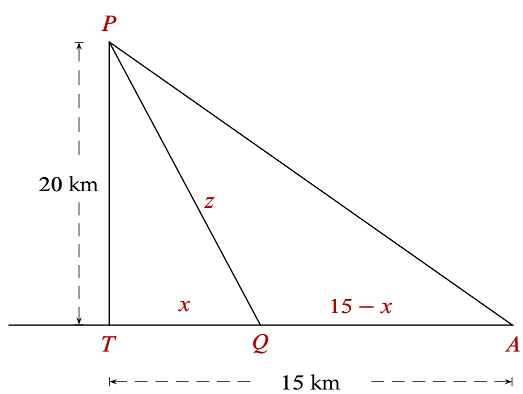
$$C(0) = 2\sqrt{400} + 15 = 55\,;$$
$$C\left(\frac{20}{\sqrt{3}}\right) = 2\sqrt{\frac{400}{9} + 400} + 15 - \frac{20}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{\frac{400 + 3\,600}{9}} + 15 - \frac{20}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{\frac{4\,000}{9}} + 15 - \frac{20}{\sqrt{3}} =$$
$$= \frac{2\sqrt{4\,000}}{3} + 15 - \frac{20}{\sqrt{3}} \approx 45.6167\,;$$
$$C(15) = 2\sqrt{225 + 400} + 15 - 15 = 50\,.$$

El costo mínimo de la construcción del oleoducto es de 45.6167 millones de dólares y se tiene cuando $x = \dfrac{20}{\sqrt{3}} \approx 11.547$ km.

□

Ejemplo 10.1.9 *Se requiere construir un oleoducto desde una plataforma marina que está localizada al norte 20 km mar adentro, hasta unos tanques de almacenamiento que están en la playa y 15 km al este. Si el costo de construcción de cada kilómetro de oleoducto en el mar es de 3 000 000 y en tierra es de 2 000 000, ¿qué tan alejado debe salir el oleoducto submarino a la playa para que el costo de la construcción sea mínimo?*

▼ Usamos la siguiente figura:



El costo de construir z km de oleoducto submarino, a razón de 3 000 000 de dólares por km, es de $3z$ millones de dólares y el costo de construir $15 - x$ km de oleoducto terrestre, a razón de 2 000 000 de dólares por km, es $2(15 - x)$ millones de dólares.

Entonces, el costo total de la construcción del oleoducto es (en millones de dólares)

$$C = 3z + 2(15 - x) = 3\sqrt{x^2 + 400} + 2(15 - x)\,;$$
$$C(x) = 3\sqrt{x^2 + 400} + 2(15 - x) = 3(x^2 + 400)^{\frac{1}{2}} + 30 - 2x\,;$$

que es la función a minimizar. Derivando y obteniendo puntos críticos:

$$C'(x) = 3\left(\frac{1}{2}\right)(x^2 + 400)^{-\frac{1}{2}}2x - 2 = \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 400}} - 2\,;$$
$$C'(x) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 400}} - 2 = 0 \;\Rightarrow\; \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 400}} = 2 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; 3x = 2\sqrt{x^2 + 400} \;\Rightarrow\; 9x^2 = 4(x^2 + 400) \;\Rightarrow\; 5x^2 = 1\,600 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; x^2 = \frac{1\,600}{5} = 320 \;\Rightarrow\; x = \pm\sqrt{320}\,.$$

Por ser $x \geq 0$, podemos descartar $x = -\sqrt{320}$.

Pero cuidado, $x = \sqrt{320} \approx 17.889$ no cumple con la restricción $0 \leq x \leq 15$. Esto nos indica que la función costo $C(x)$ no tiene puntos críticos en el intervalo cerrado $[0, 15]$, por lo cual no hay mínimo local estricto (ni máximo) para el costo $C(x)$ en $[0, 15]$.

Esto es, la función $C(x)$ es estrictamente creciente o decreciente en el intervalo $[0, 15]$.

Por lo tanto, el costo mínimo aparece en uno de los extremos del intervalo y, por ende, el costo máximo aparece en el otro extremo.

Valuamos pues $C(x)$ en $x = 0$ y en $x = 15$.

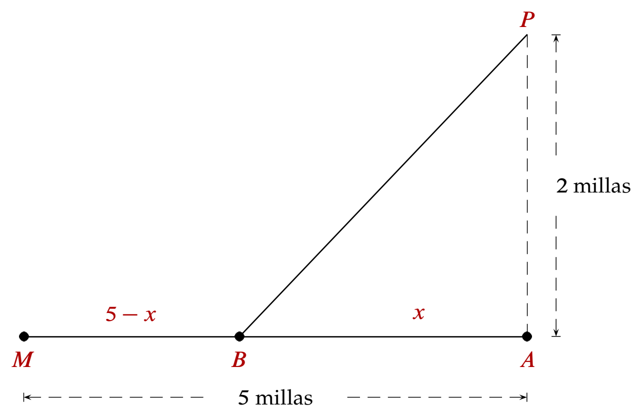
$$C(x = 0) = 3\sqrt{400} + 2(15) = 3(20) + 30 = 90\,;$$
$$C(x = 15) = 3\sqrt{225 + 400} + 2(0) = 3\sqrt{625} = 3(25) = 75\,.$$

Por lo tanto, el costo mínimo de la construcción del oleoducto es de 75 000 000 de dólares y se obtiene cuando todo el oleoducto es submarino y sale a la playa precisamente donde están los tanques de almacenamiento.
Notamos además que en $[0, 15]$ la función $C(x)$ es decreciente, ya que $C'(x) < 0$ si $0 \leq x < \sqrt{320} \approx 17.889$.

□

Ejemplo 10.1.10 *En un concurso de resistencia, los participantes están 2 millas mar adentro y tienen que llegar a un sitio en la orilla (tierra firme) que está a 5 millas al oeste (la orilla va de este a oeste). Suponiendo que un concursante puede nadar 4 millas por hora y correr 10 millas por hora, ¿hacia qué punto de la orilla debe nadar para minimizar el tiempo total de recorrido?*

▼ Usamos la figura siguiente:



Sean P el punto de partida, A el punto de la playa más cercano a P, M la meta y B el punto de la playa donde el concursante sale del mar.
Es decir: $\overline{PA} = 2$ millas, $\overline{MA} = 5$ millas, $\overline{PB}$ es el recorrido nadando y $\overline{BM}$ es el recorrido corriendo por la playa.
Si suponemos que B está a x millas de A, entonces

$$\overline{BA} = x \Rightarrow \overline{MB} = 5 - x \;\&\; \overline{BP} = \sqrt{\overline{BA}^2 + \overline{AP}^2} = \sqrt{x^2 + 2^2} = \sqrt{x^2 + 4}.$$

Si el concursante nada $\overline{PB} = \sqrt{x^2 + 4}$ millas a razón de 4 millas por hora, entonces el tiempo que tarda nadando es $t_n = \dfrac{\sqrt{x^2 + 4}}{4}$ horas.
Si el concursante corre $\overline{MB} = 5 - x$ millas a razón de 10 millas por hora, entonces el tiempo que tarda corriendo es $t_c = \dfrac{5 - x}{10}$ horas.
El tiempo total de recorrido del concursante es

$$t = t_n + t_c = \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{4} + \frac{5 - x}{10}.$$

Es decir,

$$t(x) = \frac{1}{4}(x^2 + 4)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} - \frac{x}{10} \text{ con } 0 \le x \le 5,$$

que es la función que debemos minimizar.

Derivando y obteniendo los puntos críticos:

$$
\begin{aligned}
t'(x) &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)(x^2+4)^{-1/2}2x - \frac{1}{10} = \frac{x}{4\sqrt{x^2+4}} - \frac{1}{10};\\
t'(x) = 0 \;&\Rightarrow\; \frac{x}{4\sqrt{x^2+4}} - \frac{1}{10} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{x}{4\sqrt{x^2+4}} = \frac{1}{10} \;\Rightarrow\\
&\Rightarrow\; 10x = 4\sqrt{x^2+4} \;\Rightarrow\; (10x)^2 = 4^2(x^2+4) \;\Rightarrow\; 100x^2 = 16x^2+64 \;\Rightarrow\\
&\Rightarrow\; 100x^2 - 16x^2 = 64 \;\Rightarrow\; 84x^2 = 64 \;\Rightarrow\; x^2 = \frac{64}{84} \approx 0.762 \;\Rightarrow\\
&\Rightarrow\; x \approx \pm\sqrt{0.762} \approx \pm 0.87.
\end{aligned}
$$

Entonces $t(x)$ tiene un punto crítico en $x \approx 0.87$ millas.

Ya que $t''(x) = \dfrac{1}{(x^2+4)^{\frac{3}{2}}}$, entonces $t''(x) > 0$ para cada x. En particular $t''(0.87) > 0$ por lo que $tx)$ es mínimo cuando $x = 0.87$ millas.
A manera de ejemplo valuamos $t(x)$ en $x = 0.87$, $x = 0$ & $x = 5$, para comparar los tiempos obtenidos.

$$
\begin{aligned}
t(x) &= \frac{\sqrt{x^2+4}}{4} + \frac{5-x}{10};\\
t(0.87) &= \frac{\sqrt{(0.87)^2+4}}{4} + \frac{5-0.87}{10} \approx 0.958 \text{ hora};\\
t(0) &= \frac{\sqrt{0^2+4}}{4} + \frac{5-0}{10} = 1 \text{ hora};\\
t(5) &= \frac{\sqrt{5^2+4}}{4} + \frac{5-5}{10} \approx 1.34629 \text{ h}.
\end{aligned}
$$

Luego el tiempo mínimo es 0.958 de hora, esto es 57 min 29.727 s.

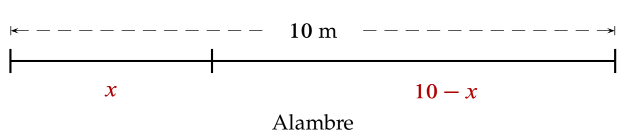
□

Ejemplo 10.1.11 *Un trozo de alambre de* 10 *m de largo se corta en dos partes. Una se dobla para formar un cuadrado y la otra para formar un triángulo equilátero. Hallar cómo debe cortarse el alambre de modo que el área encerrada sea:*

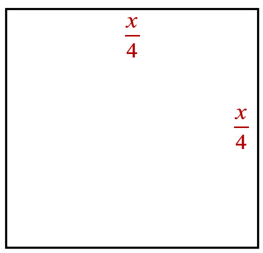
1. *Máxima.*
2. *Mínima.*

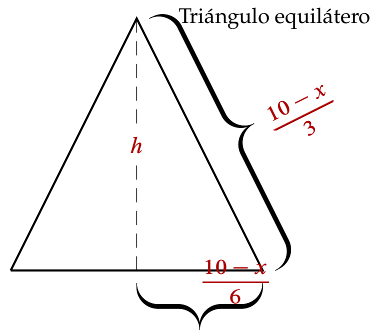
Interpretar prácticamente los resultados.

▼ Usando la siguiente figura



La parte x del alambre se usa para el cuadrado, por lo tanto cada lado tiene longitud $\dfrac{x}{4}$.
La parte $10-x$ del alambre se usa para el triángulo equilátero, por lo tanto cada lado tiene longitud $\dfrac{10-x}{3}$.





De la figura del triángulo, usando el teorema de Pitágoras, obtenemos la siguiente relación:

$$h^2 + \left(\frac{10-x}{6}\right)^2 = \left(\frac{10-x}{3}\right)^2 \Rightarrow h^2 = \frac{1}{9}(10-x)^2 - \frac{1}{36}(10-x)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow h^2 = \frac{3}{36}(10-x)^2 \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{6}(10-x).$$

El área del cuadrado es

$$A_C(x) = \frac{x^2}{16}.$$

El área del triángulo es

$$A_T(x) = \frac{1}{2} \times \text{base} \times \text{altura} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}(10-x) \times \frac{\sqrt{3}}{6}(10-x) = \frac{\sqrt{3}}{36}(10-x)^2.$$

El área de ambas figuras es

$$A(x) = A_T(x) + A_C(x) = \frac{\sqrt{3}}{36}(10-x)^2 + \frac{x^2}{16}.$$

Ésta es la función a la cual deseamos calcular sus máximo y mínimo.

Nótese que el dominio de esta función es $D_A = [0, 10]$ (la longitud del alambre es de 10 m).

Calculamos la primera derivada:

$$A'(x) = \frac{1}{8}x + \frac{\sqrt{3}}{36} \times 2(10-x)(-1) = \frac{1}{8}x - \frac{\sqrt{3}}{18}(10-x) =$$
$$= \frac{1}{8}x - \frac{5\sqrt{3}}{9} + \frac{\sqrt{3}}{18}x = \frac{9+4\sqrt{3}}{72}x - \frac{5\sqrt{3}}{9}.$$

Calculamos el punto crítico:

$$A'(x) = 0 \Rightarrow \frac{9+4\sqrt{3}}{72}x - \frac{5\sqrt{3}}{9} = 0 \Rightarrow x = \frac{72(5\sqrt{3})}{9(9+4\sqrt{3})} = \frac{40\sqrt{3}}{9+4\sqrt{3}} \approx 4.34965.$$

Puesto que al calcular la segunda derivada obtenemos:

$$A''(x) = \frac{9 + 4\sqrt{3}}{72} > 0,$$

entonces el punto crítico anterior es un mínimo local.
Calculamos la función $A(x)$ en los extremos de su dominio:

$$A(0) = \frac{\sqrt{3}}{36}100 \approx 4.81125 \text{ y } A(10) = \frac{100}{16} = 6.25.$$

Vemos entonces que la máxima área encerrada es cuando $x = 10$, es decir, cuando sólo se construye el cuadrado.
Y la mínima área encerrada es cuando $x = 4.34965$, caso en el que se construyen ambas figuras.

□

Ejemplo 10.1.12 *Determinar las dimensiones del cilindro circular recto de máximo volumen que puede ser inscrito en una esfera de radio R.*

▼ Consideramos un cilindro recto con base circular de radio r y altura h (inscrito en una esfera). Suponiendo (imaginando) que tanto la esfera como el cilindro son transparentes y que sólo sus contornos se ven, esto es, si consideramos una sección transversal del cuerpo, la figura representativa de ellos es la misma que se tiene para una circunferencia de radio R y un rectángulo inscrito en ella de base $2r$ y altura h.

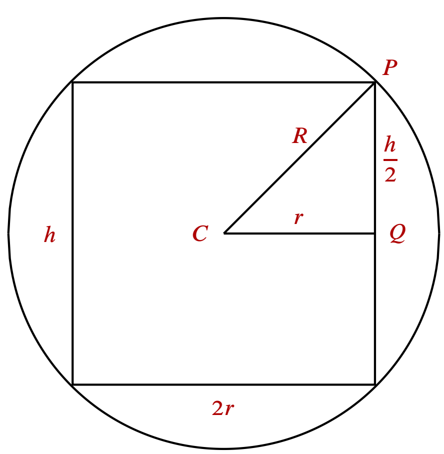
El volumen del cilindro es

$$V = \pi r^2 h$$

que es una función de dos variables (r y h).
En el triángulo rectángulo CQP (por el teorema de Pitágoras) obtenemos

$$R^2 = r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2$$

que es una ecuación representativa de una restricción, (la esfera es de radio R).



Tenemos pues una función:

$$V = \pi r^2 h$$

y por el teorema de Pitágoras obtenemos la ecuación:

$$R^2 = r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 .$$

De la ecuación despejaremos una de las variables para luego sustituirla en la función.
¿Cuál variable se despeja? La que más convenga.
En este caso conviene despejar r^2, a saber:

$$r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4} .$$

Sustituyendo en la función:

$$V = \pi r^2 h = \pi(R^2 - \frac{h^2}{4})h = \pi(R^2 h - \frac{1}{4}h^3) .$$

Así tenemos (R es una constante):

$$V(h) = \pi \left(R^2 h - \frac{1}{4}h^3\right) ;$$

que es la función a maximizar. Derivando para obtener puntos críticos:

$$\begin{aligned}
&V'(h) = \pi(R^2 - \frac{3}{4}h^2) ;\\
&V'(h) = 0 \Rightarrow \pi(R^2 - \frac{3}{4}h^2) = 0 \Rightarrow R^2 - \frac{3}{4}h^2 = 0 \Rightarrow \frac{3}{4}h^2 = R^2 \Rightarrow\\
&\quad \Rightarrow h^2 = \frac{4}{3}R^2 \Rightarrow h = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}R .
\end{aligned}$$

Esto implica que la función $V(h)$ tiene dos puntos críticos, uno para $h = \frac{2}{\sqrt{3}}R$ y el otro para $h = -\frac{2}{\sqrt{3}}R$. Pero este último $\left(h = -\frac{2}{\sqrt{3}}R\right)$ no tiene significado en el contexto del problema por ser un valor negativo (que daría lugar a una altura negativa).
Por lo tanto veamos qué tipo de punto crítico tiene $V(h)$ para $h = \frac{2}{\sqrt{3}}R$:

$$\begin{aligned}
V'(h) &= \pi\left(R^2 - \frac{3}{4}h^2\right) = \pi R^2 - \frac{3}{4}\pi h^2 ;\\
V''(h) &= -\frac{3}{2}\pi h < 0, \text{ para cualquier } h > 0 .
\end{aligned}$$

Luego $V(h)$ tiene un máximo local estricto cuando $h = \frac{2}{\sqrt{3}}R$. Además

$$r = \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}h^2} = \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}R^2\right)} = \sqrt{\frac{2}{3}}R .$$

Por lo tanto el volumen del cilindro es máximo cuando

$$h = \frac{2}{\sqrt{3}}R \text{ y } r = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}R\,.$$

Dicho volumen máximo es

$$V_{max} = \pi r^2 h = \pi\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}R\right)^2 (\frac{2}{\sqrt{3}}R) = \frac{4}{3\sqrt{3}}\pi R^3\,.$$

Notemos que

$$V(h) = \pi h(R^2 - \frac{1}{4}h^2) \text{ con } 0 \le h \le 2R\,.$$

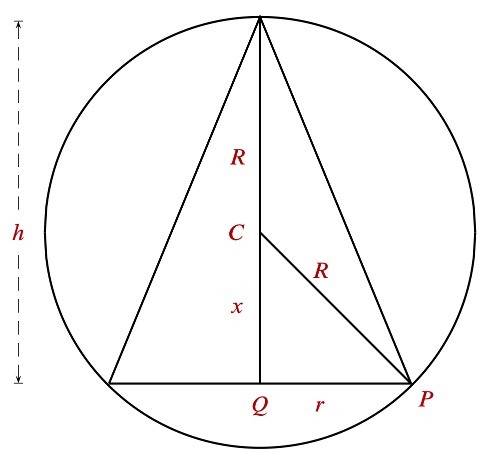
También que $h = 0 \;\Rightarrow\; V(h = 0) = 0$ y además que $h = 2R \;\Rightarrow\; V(h = 2R) = 0$.

□

Ejemplo 10.1.13 *Determinar las dimensiones del cono circular recto de máximo volumen que puede ser inscrito en una esfera de radio R.*

▼ Consideramos una esfera de radio $R > 0$ y un cono que tiene base circular de radio $r > 0$ y altura $h > 0$.

Una sección transversal perpendicular a la base del cono y que pase por su eje se muestra en el croquis siguiente:



El volumen del cono es

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

que es una función de dos variables (r & h).
En el triángulo rectángulo CQP, por el teorema de Pitágoras, vemos que $R^2 = x^2 + r^2$ con $x = h - R$, por lo que $R^2 = (h - R)^2 + r^2$, es decir, la ecuación asociada a la restricción en el problema (que la esfera sea de radio R).

Tenemos pues una función :

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

y una ecuación:

$$R^2 = (h - R)^2 + r^2 .$$

De la ecuación despejamos (por conveniencia) r^2

$$r^2 = R^2 - (h - R)^2 = R^2 - h^2 + 2hR - R^2 = 2hR - h^2 .$$

Y sustituyendo en la función:

$$V = \frac{1}{3}\pi(2hR - h^2)h .$$

Así tenemos (R es una constante):

$$V(h) = \frac{1}{3}\pi(2Rh^2 - h^3) ,$$

que es la función a maximizar. Derivando para obtener puntos críticos:

$$V'(h) = \frac{1}{3}\pi(4Rh - 3h^2) ;$$

$$V'(h) = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}\pi(4Rh - 3h^2) = 0 \Rightarrow h(4R - 3h) = 0 \Rightarrow h = 0 \text{ o bien } h = \frac{4}{3}R .$$

Esto implica que la función $V(h)$ tiene dos puntos críticos, uno para $h = 0$ y otro para $h = \frac{4}{3}R$. En el contexto del problema, el caso $h = 0$ queda descartado (ya que el volumen sería $V = 0$). Sólo consideramos el caso en que $h = \frac{4}{3}R$.

$$V'(h) = \frac{1}{3}\pi(4Rh - 3h^2) \Rightarrow V''(h) = \frac{1}{3}\pi(4R - 6h) .$$

Así:

$$V''(h = \frac{4}{3}R) = \frac{1}{3}\pi\left[4R - 6\left(\frac{4}{3}R\right)\right] = \frac{1}{3}\pi[4R - 8R] = -\frac{4}{3}\pi R < 0 .$$

Luego $V(h)$ tiene un máximo local estricto cuando $h = \frac{4}{3}R$.

Además,

$$r = \sqrt{R^2 - (h - R)^2} = \sqrt{R^2 - (\frac{4}{3}R - R)^2} \Rightarrow r = \sqrt{R^2 - \frac{1}{9}R^2} = \frac{\sqrt{8}}{3}R = \frac{2\sqrt{2}}{3}R .$$

Por lo tanto, el volumen del cono es máximo cuando $h = \frac{4}{3}R$ y cuando $r = \frac{2\sqrt{2}}{3}R$.
Dicho volumen máximo es:

$$V_{max} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}R\right)^2\left(\frac{4}{3}R\right) = \frac{32}{81}\pi R^3 .$$

Notemos que

$$V(h) = \frac{1}{3}\pi h^2(2R - h) \text{ con } 0 \le h \le 2R .$$

Además,

$$h = 0 \;\Rightarrow\; V(h = 0) = 0$$

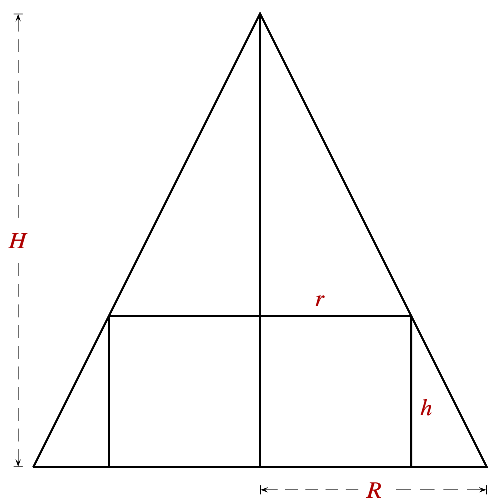
así como

$$h = 2R \;\Rightarrow\; V(h = 2R) = 0\,.$$

□

Ejemplo 10.1.14 *Determinar las dimensiones del cilindro circular recto de máximo volumen que puede ser inscrito en un cono circular recto de radio R y altura H.*

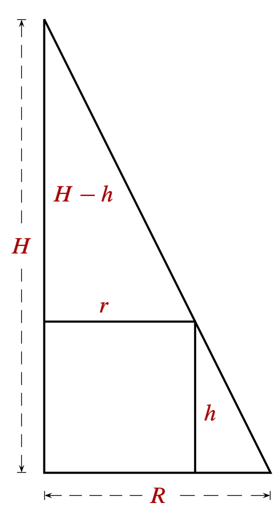
▼ Consideramos que el cilindro tiene radio r y altura h.
Una sección transversal perpendicular a la base del cono y que pase por su eje, se muestra en el croquis siguiente:



El volumen del cilindro es

$$V = \pi r^2 h\,,$$

que es una función de dos variables (r y h).
Para tener una ecuación con las mismas variables r, h veamos los dos triángulos semejantes que hay en la figura.



Por semejanza se cumple la proporción:

$$\frac{R}{H} = \frac{r}{H-h}\,.$$

De donde se obtiene la ecuación: $R(H-h) = rH$, de la cual despejaremos una de las variables para después sustituirla en la función volumen.

Despejaremos r:

$$rH = R(H-h) \Rightarrow r = \frac{R}{H}(H-h)\,;$$

sustituyendo

$$V = \pi r^2 h = \pi\left[\frac{R}{H}(H-h)\right]^2 h = \pi\frac{R^2}{H^2}(H-h)^2 h = \frac{\pi R^2}{H^2}(H^2 - 2Hh + h^2)h\,.$$

Así tenemos:

$$V(h) = \frac{\pi R^2}{H^2}(H^2 h - 2Hh^2 + h^3)\,,$$

que es la función a maximizar. Derivamos para obtener los puntos críticos:

$$V'(h) = \frac{\pi R^2}{H^2}(H^2 - 4Hh + 3h^2) = \frac{\pi R^2}{H^2}(3h^2 - 4Hh + H^2)\,;$$
$$V'(h) = 0 \Rightarrow \frac{\pi R^2}{H^2}\left(3h^2 - 4Hh + H^2\right) = 0 \Rightarrow 3h^2 - 4Hh + H^2 = 0\,.$$

Tenemos que:

$$h = \frac{4H \pm \sqrt{(-4H)^2 - 4(3)H^2}}{2(3)} = \frac{4H \pm \sqrt{16H^2 - 12H^2}}{6} =$$
$$= \frac{4H \pm \sqrt{4H^2}}{6} = \frac{4H \pm 2H}{6}\,.$$

Entonces:

$$h_1 = \frac{4H + 2H}{6} = \frac{6H}{6} = H$$

y

$$h_2 = \frac{4H - 2H}{6} = \frac{2H}{6} = \frac{1}{3}H\,.$$

Luego la función $V(h)$ tiene dos puntos críticos: uno cuando $h = h_1 = H$ y otro cuando $h = h_2 = \frac{1}{3}H$.

$V'(h) = \dfrac{\pi R^2}{H^2}(3h^2 - 4Hh + H^2) \;\Rightarrow\; V''(h) = \dfrac{\pi R^2}{H^2}(6h - 4H).$
Así:

$$V''(h_1) = \frac{\pi R^2}{H^2}(6h_1 - 4H) = \frac{\pi R^2}{H^2}(6H - 4H) = \frac{\pi R^2}{H^2}2H > 0\,;$$

$V''(h_1) > 0 \;\Rightarrow\; V(h)$ tiene un mínimo local estricto para $h_1 = H$.

Además:

$$V''(h_2) = \frac{\pi R^2}{H^2}(6h_2 - 4H) = \frac{\pi R^2}{H^2}\left[6(\frac{1}{3}H) - 4H\right] = \frac{\pi R^2}{H^2}(2H - 4H) = \frac{\pi R^2}{H^2}(-2H) < 0\,;$$

$V''(h_2) = -\dfrac{2\pi R^2}{H} < 0 \;\Rightarrow\; V(h)$ tiene un máximo local estricto para $h_2 = \dfrac{H}{3}$.

Por lo tanto el volumen $V(h)$ es máximo cuando $h = h_2 = \dfrac{1}{3}H$.
¿Qué sucede en los extremos del intervalo $[0, H]$?
$V(h = 0) = 0$ y $V(h = H) = 0$.
Por lo anterior concluimos que dicho volumen máximo es:

$$\begin{aligned} V_{max} &= \frac{\pi R^2}{H^2}\left(H - \frac{1}{3}H\right)^2 \frac{1}{3}H = \\ &= \frac{\pi R^2}{H^2}\left(\frac{2}{3}H\right)^2 \frac{1}{3}H = \\ &= \frac{\pi R^2}{H^2}\frac{4}{9}H^2\frac{1}{3}H = \\ &= \frac{4}{27}\pi R^2 H\,. \end{aligned}$$

Este volumen máximo se obtiene para el cilindro de altura $h_2 = \dfrac{1}{3}H$
y radio

$$r_2 = \frac{R}{H}(H - h_2) = \frac{R}{H}(H - \frac{1}{3}H) = \frac{2}{3}R\,.$$

□

Ejercicios 10.1.1 *Soluciones en la página 28*

1. Hallar dos números positivos cuya suma sea S y cuyo producto sea máximo.
2. Hallar dos números positivos cuyo producto sea P y cuya suma sea mínima.
3. Hallar dos números positivos cuyo producto sea P y la suma del primero más tres veces el segundo sea mínima.
4. Hallar dos números positivos tales que el segundo número sea el inverso multiplicativo del primero y la suma sea mínima.

5. Hallar dos números positivos tales que el primero más n veces el segundo sumen S y el producto sea máximo.

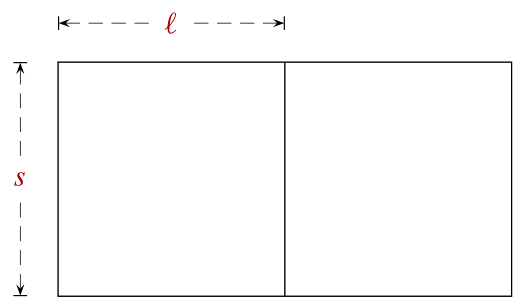
6. La suma de tres números positivos es 30. El primero más el doble del segundo, más el triple del tercero suman 60. Elegir los números de modo que el producto de los tres sea el mayor posible.

7. Un granjero que tiene 24 m de cerca desea encerrar un área rectangular y dividirla en tres corrales, colocando cercas paralelas a uno de los lados del rectángulo. ¿Cuál es el área total máxima posible de los tres corrales?

8. Un granjero que tiene C m de cerca desea encerrar un área rectangular y dividirla en cuatro corrales, colocando cercas paralelas a uno de los lados del rectángulo. ¿Cuál es el área total máxima posible de los cuatro corrales?

9. Un granjero que tiene C m de cerca desea encerrar un área rectangular y dividirla en n corrales, colocando cercas paralelas a uno de los lados del rectángulo. ¿Cuál es el área total máxima posible de los n corrales?

10. Un ranchero quiere bardear dos corrales rectangulares adyacentes idénticos, cada uno de 300 m^2 de área como se muestra en la figura.



¿Cuánto deben medir s & ℓ para que se utilice la mínima cantidad de barda?

11. Un ganadero desea cercar un prado rectangular junto a un río. El prado ha de tener 180 000 m^2 para proporcionar suficiente pasto. ¿Qué dimensiones debe tener el prado para que requiera la menor cantidad de cerca posible, teniendo en cuenta que no hay que cercar en el lado que da al río?

12. Un terreno rectangular está delimitado por un río en un lado y por una cerca eléctrica de un solo cable en los otros tres lados.

    ¿Cuáles son las dimensiones del terreno que nos dan el área máxima?

    ¿Cuál es la mayor área que pueda cercarse con un cable de 800 m?

13. Se desea hacer una caja abierta con una pieza cuadrada de material de 12 cm de lado, cortando cuadritos iguales de cada esquina. Hallar el máximo volumen que puede lograrse con una caja así.

14. Se va a construir una caja con la parte superior abierta a partir de un trozo cuadrado de cartón que tiene L metros de lado, recortando un cuadrado en cada una de las cuatro esquinas y doblando los lados hacia arriba. Encuentre el volumen más grande que puede tener la caja.

15. Halle las dimensiones del rectángulo de área máxima que se puede inscribir en un círculo de radio r.

16. Una caja con base cuadrada y parte superior abierta debe tener un volumen de V cm^3. Encuentre las dimensiones de la caja que minimicen la cantidad de material usado.

17. Una caja con base y tapa cuadradas debe tener un volumen de 50 cm^3. Encuentre las dimensiones de la caja que minimicen la cantidad de material usado.

18. Una caja con base y tapa cuadradas debe tener un volumen de V cm^3. Encuentre las dimensiones de la caja que minimicen la cantidad de material usado.

19. Se quiere construir una cisterna con base rectangular y sin tapa, de manera tal que el ancho de la base sea el doble de la altura de la cisterna. Calcular las dimensiones que debe tener la cisterna para que el volumen sea de 20 m^3 y se requiera la mínima cantidad de material en su construcción.

20. Un recipiente rectangular para almacenamiento, con la parte superior abierta, debe tener un volumen de V m^3. El largo de su base es el doble del ancho. El material para la base cuesta B pesos el metro cuadrado. El material para los costados cuesta L pesos el metro cuadrado. Encuentre las dimensiones para tener el más barato de esos recipientes.

21. Si se cuenta con 1 000 cm^2 de material para hacer una caja con base cuadrada y la parte superior abierta, encuentre el volumen máximo posible de la caja.

22. Si se cuenta con M cm^2 de material para hacer una caja con base cuadrada y la parte superior abierta, encuentre el volumen máximo posible de la caja.

23. Si se cuenta con 1 000 cm^2 de material para hacer una caja con base cuadrada, encuentre el volumen máximo posible de la caja.

24. Si se cuenta con M cm^2 de material para hacer una caja con base cuadrada, encuentre el volumen máximo posible de la caja.

25. Demuestre que, de todos los rectángulos con un área dada, el que tiene el menor perímetro es un cuadrado.

26. Demuestre que de todos los rectángulos con un perímetro dado el que tiene el área máxima es un cuadrado.

27. Un recipiente rectangular para almacenamiento, con la parte superior abierta, debe tener un volumen de 10 m^3. El largo de su base es el doble del ancho. El material para la base cuesta 3 pesos el metro cuadrado. El material para los costados cuesta 2 pesos el metro cuadrado. Encuentre las dimensiones para tener el más barato de esos recipientes.

28. Halle el punto de la recta $y = -2x + 3$ más cercano al origen.

29. Halle el punto de la recta $y = mx + b$ más cercano al origen.

30. Una ventana normanda tiene forma de un rectángulo rematado por un semicírculo. Si el perímetro de la ventana es de P m, encuentre las dimensiones de la ventana de modo que se admita la cantidad más grande posible de luz.

31. Una pista de entrenamiento consta de dos semicírculos adosados en los lados opuestos de un rectángulo. Si su perímetro es de P m, hallar las dimensiones que hacen máxima el área de la región rectangular.

32. Un triágulo rectángulo está formado por los semiejes positivos y una recta que pasa por el punto (a, b). Hallar los vértices de modo que su área sea mínima.

33. Se quiere construir un recipiente cilíndrico de base circular con tapa y una capacidad para 600 ℓ. Calcular las dimensiones que debe tener para que se requiera la mínima cantidad de material en su construcción.

    (Considerar que $1\ \ell = 1\ \text{dm}^3$.)

34. Un cilindro circular recto ha de contener V cm^3 de refresco y usar la mínima cantidad posible de material para su construcción. ¿Cuáles deben ser sus dimensiones?

35. Determine el volumen máximo posible de un cilindro circular recto si el área total de su superficie, incluyendo las dos bases circulares, es de 150π m^2.

36. Dos puntos A, B se encuentran en la orilla de una playa recta, separados 6 km entre sí. Un punto C esta frente a B a 3 km en el mar. Cuesta \$400.00 tender 1 km de tubería en la playa y \$500.00 en el mar. Determine la forma más económica de trazar la tubería desde A hasta C. (No necesariamente debe pasar por B.)

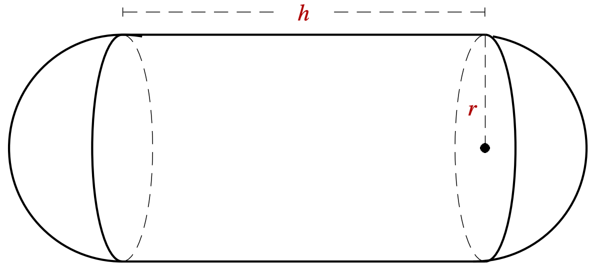
37. Dos barcos salen al mismo tiempo; uno de un muelle, con dirección sur y con velocidad de 20 km/h. El otro parte hacia el muelle desde un punto que se encuentra a 15 km al oeste, a 10 km/h. ¿En qué momento se encuentran más próximos estos dos navíos?

38. A las 13:00 horas un barco A se encuentra 20 millas al sur del barco B y viaja hacia el norte a 15 millas/h. El barco B navega hacia el oeste a 10 millas/h. ¿A qué hora se alcanza la distancia mínima entre las dos embarcaciones?

39. Se va a construir un tanque metálico de almacenamiento con volumen de 10 ℓ en forma de un cilindro circular recto rematado por dos hemisferios (medias esferas). Tomando en cuenta que el volumen de la esfera es $\frac{4}{3}\pi r^3$ y que la superficie es $4\pi r^2$, encontrar las dimensiones del tanque que minimicen la cantidad de metal.

40. Una lata de aceite tiene la forma de un cilindro con fondo plano en la base y una semiesfera en la parte superior. Si esta lata debe contener un volumen de 1 000 pulgadas cúbicas y se desprecia el espesor del material, determine las dimensiones que minimizan la cantidad de material necesario para fabricarla.

41. Se desea construir un tanque de acero con la forma de un cilindro circular recto y semiesferas en los extremos para almacenar gas propano. El costo por pie cuadrado de los extremos es el doble de la parte cilíndrica. ¿Qué dimensiones minimizan el costo si la capacidad deseada es de 10π pies^3?



42. Una página ha de contener 30 cm^2 de texto. Los márgenes superior e inferior deben ser de 2 cm y los laterales de 1 cm. Hallar las dimensiones de la página que permiten ahorrar más papel.

43. Los costos de la empresa Alfa están dados por la función $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$, donde x representa miles de artículos vendidos. Se pronostica que los costos serán mínimos si se venden entre 1 700 y 1 800 artículos.

    ¿Es verdadero el pronóstico? Justifique su respuesta.

44. Un hombre se encuentra en un punto A de la orilla de un río rectilíneo de 2 km de ancho. Sea C el punto enfrente de A en la otra orilla. El hombre desea llegar a un punto B situado a 8 km a la derecha y en la misma orilla de C.

    El hombre puede remar en su bote cruzando el río hasta el punto D entre B y C. Si rema a 6 km/h y corre a 8 km/h ¿a qué distancia debe estar D del punto C, para llegar al punto B lo más pronto posible?

45. La suma del perímetro de un círculo y un cuadrado es de 16 cm. Hallar las dimensiones de las dos figuras que hacen mínima el área total encerrada por ambas figuras.

Soluciones

Soluciones a los ejercicios del capt'ítulo 10

Ejercicios 10.1.1 *Optimización, página 23*

1. $x = \dfrac{S}{2}$ & $y = \dfrac{S}{2}$.
2. $x = \sqrt{P}$ & $y = \dfrac{P}{\sqrt{P}} = \sqrt{P}$.
3. $x = \sqrt{3P}$ & $y = \dfrac{1}{3}\sqrt{3P}$.
4. $x = 1$ & $y = 1$.
5. $x = \dfrac{S}{2}$ & $y = \dfrac{S}{2n}$.
6. $x = y = z = 10$.
7. $A = 18$ para $x = 3$ & $y = 6$.
8. $A = \dfrac{C^2}{40}$ para $x = \dfrac{C}{10}$ & $y = \dfrac{5}{2}\dfrac{C}{10}$.
9. $A = \dfrac{C^2}{8(n+1)}$ m^2 para $x = \dfrac{C}{2(n+1)}$ & $y = \dfrac{C}{4}$.
10. $s = 20$ & $l = 15$ m.
11. $x = 300$ m & $y = 600$ m.
12. $y = 200$; $x = 2y = 400$ & $A = 80\,000$.
13. Volumen máximo: $V(3) = 108$ cm^3.
14. $V\left(\dfrac{L}{6}\right) = \dfrac{2}{27}L^3$.
15. $x = \dfrac{2}{\sqrt{2}}r = y$.
16. $x = \sqrt[3]{2V}$ & $y = \dfrac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$.
17. $x = \sqrt[3]{50}$ & $y = \sqrt[3]{50}$.
18. $x = \sqrt[3]{V}$ & $y = \sqrt[3]{V}$.
19. Base cuadrada de lado $2 \times 5^{\frac{1}{3}}$ y con altura $5^{\frac{1}{3}}$.
20. $x = \sqrt[3]{\dfrac{3LV}{4B}}$ & $y = \dfrac{2}{3}\dfrac{B}{L}\left(\dfrac{3LV}{4B}\right)^{\frac{1}{3}}$.
21. $V = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1\,000}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$ para
$x = \sqrt{\dfrac{1\,000}{3}}$ & $y = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1\,000}{3}}$.
22. $V = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{M}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$.
23. $V = \dfrac{500}{3}\sqrt{\dfrac{500}{3}}$.
24. $V = \dfrac{M}{6}\sqrt{\dfrac{M}{6}}$.
25. $y = \sqrt{A} = x$.
26. $y = \dfrac{P}{4} = x$.
27. $y = \sqrt[3]{5} = x$.
28. $\left(\dfrac{6}{5}, \dfrac{3}{5}\right)$.
29. $\left(-\dfrac{bm}{1+m^2}, \dfrac{b}{1+m^2}\right)$.
30. $x = \dfrac{2P}{4+\pi}$; $y = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2P}{4+\pi}\right)$.
31. $y = \dfrac{P}{2\pi}$ & $x = \dfrac{\pi}{2}y = \dfrac{P}{4}$.
32. $x = 2a$ & $y = 2b$.
33. $r = \sqrt{\dfrac{300}{\pi}}$ & $h = 2r$.
34. $r = \left(\dfrac{V}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$; $h = 2\left(\dfrac{V}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = 2r$.
35. $V = 250\pi$ m^3.
36. El costo es 3 300 pesos.
37. $t = \dfrac{3}{10}$ h.

38. $13 + \dfrac{12}{13}$ h.

39. $r = 1.3365$ & $l = 0$.

40. $r \approx 5.75882$ & $h = r$.

41. $r \approx 1.233$ & $h \approx 4.932$.

42. $x = \sqrt{15}$ & $y = 2x$.

43. Es verdadero, pues el costo es mínimo cuando se venden 1 732.058 artículos.

44. A 2.27 km de C.

45. $x = \dfrac{16}{\pi + 4}$ & $r = \dfrac{8}{\pi + 4} = \dfrac{1}{2}x$.