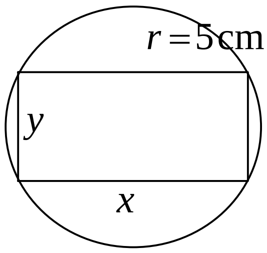
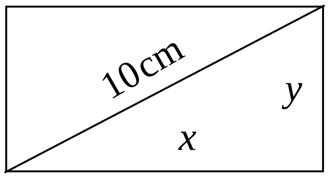
PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN DE FUNCIONES

1. Halla las dimensiones del rectángulo de área máxima que se puede inscribir en una circunferencia de radio 5 cm.





$A = xy$ máxima

Por el teorema de Pitágoras:

$$x^2 + y^2 = 10^2$$

de donde

$$y = \sqrt{100 - x^2}$$

La función a maximizar es: $f(x) = x\sqrt{100 - x^2}$

$$f(x) = x\sqrt{100 - x^2} = \sqrt{x^2\left(100 - x^2\right)} = \sqrt{100x^2 - x^4} = \left(100x^2 - x^4\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(100x^2 - x^4\right)^{-\frac{1}{2}}\left(200x - 4x^3\right) = \frac{200x - 4x^3}{2 \cdot \sqrt{100x^2 - x^4}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 200x - 4x^3 = 0 \Leftrightarrow x\left(200 - 4x^2\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 200 - 4x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{50} \end{cases}$$

El único posible extremo que nos interesa es $x = \sqrt{50}$

$$f'(x) = \frac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}}$$

$$f''(x) = \frac{-4x\sqrt{100 - x^2} - \left(100 - 2x^2\right)\dfrac{-x}{\sqrt{100 - x^2}}}{\left(\sqrt{100 - x^2}\right)^2} = \frac{-4x\left(\sqrt{100 - x^2}\right)^2 + \left(100 - 2x^2\right)x}{\left(100 - x^2\right)\sqrt{100 - x^2}} =$$

$$= \frac{-300x + 2x^3}{\left(100 - x^2\right)\sqrt{100 - x^2}}$$

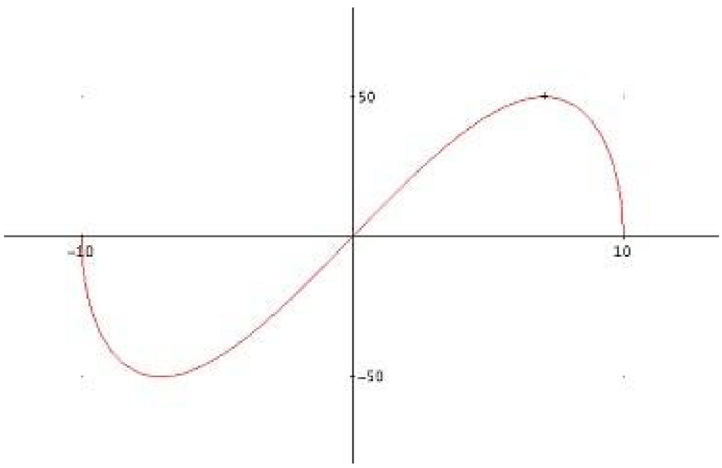
$f''\left(\sqrt{50}\right) < 0 \Rightarrow x = \sqrt{50}$ es un máximo

Calculamos el valor de *y*:

$$y = \sqrt{100 - \left(\sqrt{50}\right)^2} = \sqrt{50}$$

Por tanto, las dimensiones del rectángulo para que el área sea máxima son:

$$\begin{cases} x = \sqrt{50}\ \text{cm} \\ y = \sqrt{50}\ \text{cm} \end{cases}$$



2. Halla dos números que sumados den 20 y que su producto sea máximo.

Sean x e y los números buscados. El problema a resolver es el siguiente:

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ xy \ \text{ máximo} \end{cases}$$

Llamamos p al producto de los dos números, esto es, $p = xy$ [*]

Como $x + y = 20 \Rightarrow y = 20 - x$ y sustituyendo en [*] resulta:

$$p = x(20 - x) = 20x - x^2$$

Vamos a calcular el (o los) máximo(s) de la función $p(x)$:

$$p'(x) = 20 - 2x$$
$$p'(x) = 0 \Leftrightarrow 20 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 10$$
$$p''(x) = -2$$
$$p''(10) < 0 \Rightarrow x = 10 \ \text{ es un máximo}$$

Por tanto, los números buscados son:

$$\begin{cases} x = 10 \\ y = 20 - 10 = 10 \end{cases}$$

3. Halla dos números tales que el cuadrado de uno multiplicado por el otro sea máximo, si la suma de dichos números es 40.

Sean x e y los números buscados. El problema a resolver es el siguiente:

$$\begin{cases} x + y = 40 \\ x^2 y \ \text{ máximo} \end{cases}$$

Llamamos $p = x^2 y$. Como $x + y = 40$ se tiene que $y = 40 - x$ y por tanto:

$$p = x^2(40 - x) = 40x^2 - x^3$$

Vamos a maximizar la función $p(x)$:

$$p'(x) = 80x - 3x^2$$

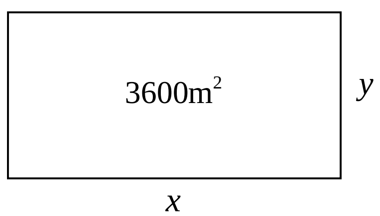
$$p'(x) = 0 \Leftrightarrow 80x - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x(80 - 3x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 80 - 3x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{80}{3} \end{cases}$$

$$p''(x) = 80 - 6x$$
$$p''(0) = 80 > 0 \Rightarrow x = 0 \ \text{ es un máximo (no nos interesa)}$$
$$p''\left(\frac{80}{3}\right) = -80 < 0 \Rightarrow x = \frac{80}{3} \ \text{ es un mínimo relativo}$$

Los números buscados son:

$$\begin{cases} x = \dfrac{80}{3} \\ y = 40 - \dfrac{80}{3} = \dfrac{40}{3} \end{cases}$$

4. Cuáles son las dimensiones de un campo rectangular de 3 600 m^2 de superficie, para poderlo cercar con una valla de longitud mínima.



Por la fórmula del área del rectángulo se tiene:

$$xy = 3600$$

Por otro lado, la superficie que tenemos que vallar es $2x + 2y$

Así, el problema a resolver es:

$$\begin{cases} xy = 3600 \\ 2x + 2y \text{ mínima} \end{cases}$$

Como $xy = 3600 \Rightarrow y = \dfrac{3600}{x}$

Llamando $f = 2x + 2y$ ý sustituyendo $y = \dfrac{3600}{x}$ obtenemos:

$$f(x) = 2x + 2\frac{3600}{x} = \frac{2x^2 + 7200}{x}$$

Vamos a minimizar *f*:

$$f'(x) = \frac{4x^2 - 2x^2 - 7200}{x^2} = \frac{2x^2 - 7200}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 7200 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 60$$

$$f''(x) = \frac{14400}{x^3}$$

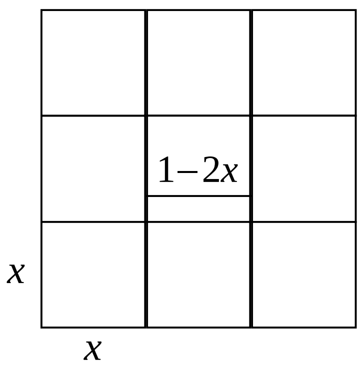
$f''(-60) < 0 \Rightarrow x = -60$ es un máximo (no nos interesa)

$f''(60) > 0 \Rightarrow x = 60$ es un mínimo

Por tanto, las dimensiones del campo son:

$$\begin{cases} x = 60 \text{ m} \\ y = \dfrac{3600}{60} = 60 \text{ m} \end{cases}$$

5. Con 1 m^2 de cartón cómo construirías una caja del mayor volumen posible.



Teniendo en cuenta el dibujo, tenemos que maximizar la función

$$v(x) = (1 - 2x)^2 x = 4x^3 - 4x^2 + x$$

Calculamos las derivadas:

$$v'(x) = 12x^2 - 8x + 1$$

$$v'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 8x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 12 \cdot 1}}{2 \cdot 12}$$

$$= \frac{8 \pm \sqrt{16}}{24} = \frac{8 \pm 4}{24} = \begin{cases} \dfrac{8+4}{24} = \dfrac{12}{24} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{8-4}{24} = \dfrac{4}{24} = \dfrac{1}{6} \end{cases}$$

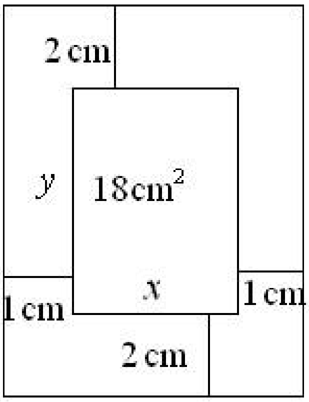
$$v''(x) = 24x - 8$$

$v''\left(\dfrac{1}{2}\right) = 12 - 8 > 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$ es un mínimo (no nos interesa)

$v''\left(\dfrac{1}{6}\right) = 4 - 8 < 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{6}$ es un máximo

Por tanto, como $1 - 2x = 1 - 2\dfrac{1}{6} = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$ las dimensiones de la caja son: $\dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{6}$ (m)

6. Una hoja de papel debe contener 18 cm^2 de texto impreso. Los márgenes superior e inferior deben ser de 2 cm y los laterales de 1 cm. ¿Cuáles deben ser las dimensiones para que resulten hojas con un coste mínimo?



Teniendo en cuenta el dibujo, la función a minimizar es:

$$s = 2x + 2x + 2 + 2 + 2 + 2 + 18 + y + y = 4x + 2y + 26$$

Por otra parte, teniendo en cuenta la fórmula del área de un rectángulo, se tiene que:

$$xy = 18$$

Así, tenemos que resolver el siguiente problema:

$$\begin{cases} xy = 18 \\ 4x + 2y + 26 \ \text{mínima} \end{cases}$$

Como $xy = 18 \Rightarrow y = \frac{18}{x}$, y por tanto, sustituyendo en *s* tenemos:

$$s = 4x + 2\frac{18}{x} + 26 = \frac{4x^2 + 36 + 26x}{x} = \frac{4x^2 + 26x + 36}{x} = s(x)$$

Vamos a minimizar $s(x)$:

$$s'(x) = \frac{(8x + 26)x - (4x^2 + 26x + 36)\cdot 1}{x^2} = \frac{8x^2 + 26x - 4x^2 - 26x - 36}{x^2} = \frac{4x^2 - 36}{x^2}$$

$$s'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{36}{4} = 9 \Rightarrow x = \sqrt{9} = 3$$

$$s''(x) = \frac{8x\cdot x^2 - (4x^2 - 36)2x}{x^4} = \frac{8x^3 - 8x^3 + 72x}{x^4} = \frac{72}{x^3}$$

$$s''(3) > 0 \Rightarrow x = 3 \ \text{es un mínimo}$$

Así las dimensiones de la zona que contiene el texto impreso son:

$$\begin{cases} x = 3 \ \text{cm} \\ y = \frac{18}{3} = 6 \ \text{cm} \end{cases}$$

y las dimensiones de la hoja de papel son: $5 \times 10 \ \text{cm}$.

7. Un agricultor sabe que si vende hoy su cosecha podrá recoger 50 000 kg, que le pagarán al precio de 20 céntimos por kg. Por cada día que espere, la cosecha disminuirá en 800 kg, pero el precio aumentará en 3 céntimos por kg. ¿Cuántos días deberá esperar para obtener el mayor beneficio?

Sea *x* = número de días que espera el agricultor.

Recoge una cosecha de $50000 - 800x$ (kg), que vende al precio de $20 + 3x$ (cent./kg). La ganancia que obtiene es:

$$g(x) = (50000 - 800x)(20 + 3x)$$

que es la función que tenemos que maximizar:

$$g'(x) = -800(20 + 3x) + (50000 - 800x)\cdot 3 = -16000 - 2400x + 150000 - 2400x =$$
$$= -4800x + 134000$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow -4800x + 134000 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{134000}{4800} = \frac{335}{12}$$

$$g''(x) = -4800$$

$$g''\left(\frac{335}{12}\right) < 0 \Rightarrow x = \frac{335}{12} \text{ es un máximo}$$

Por tanto, el agricultor deberá esperar $\frac{335}{12} \approx 27'917 \approx 28$ días para que su ganancia sea máxima.

8. Un vendedor de bolígrafos ha observado que si vende sus bolígrafos a 15 céntimos, es capaz de vender 1 000 unidades diarias, pero que por cada céntimo que aumente el precio, disminuye en 100 unidades la venta diaria de bolígrafos. Por otra parte a él le cuesta 7.5 céntimos fabricar un bolígrafo. Averiguar qué precio ha de poner para obtener el máximo beneficio.

Sea x el precio de cada bolígrafo.
El número de bolígrafos vendidos al día es $n = 1000 - 100x$, y en cada bolígrafo obtiene un beneficio igual a $x - 5$.
El beneficio total es:

$$b(x) = (1000 - 100x)(x - 5)$$

que es la función que tenemos que maximizar:

$$b'(x) = -100(x-5) + (2000 - 100x) = -100x + 500 + 2000 - 100x = -200x + 2500$$

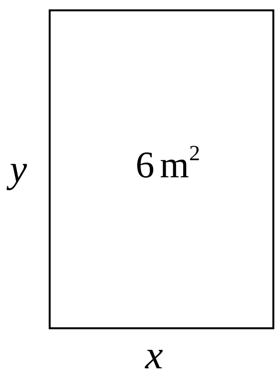
$$b'(x) = 0 \Leftrightarrow -200x + 2500 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2500}{200} = 12.5$$

$$b''(x) = -200$$

$$b''(12.5) < 0 \Rightarrow x = 12.5 \text{ es un máximo para } b(x)$$

Por tanto, el precio del bolígrafo para que el beneficio sea máximo es de 12.5 céntimos.

9. Se desea construir el marco para una ventana rectangular de 6 m^2 de superficie. El metro lineal de tramo horizontal cuesta 20 euros y el tramo vertical 30 euros.



a) Calcula las dimensiones de la ventana para que el coste del marco sea mínimo.
b) Determinar el coste del marco.

El problema a resolver es:

$$\begin{cases} xy = 6 \\ M \equiv 2x \cdot 20 + 2y \cdot 30 = 40x + 60y \end{cases}$$

Como $xy = 6 \Rightarrow y = \frac{6}{x}$ y sustituyendo en la expresión de M:

$$M = 40x + 60\frac{6}{x} = \frac{40x^2 + 360}{x} = M(x)$$

Calculamos $M'(x)$ e igualamos a cero:

$$M'(x) = \frac{80x \cdot x - (40x^2 + 360)\cdot 1}{x^2} = \frac{80x^2 - 40x^2 - 360}{x^2} = \frac{40x^2 - 360}{x^2}$$

$$M'(x) = 0 \Leftrightarrow 40x^2 - 360 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{360}{40} = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$$

Comprobamos que la solución positiva que es la que tiene sentido corresponde a un mínimo:

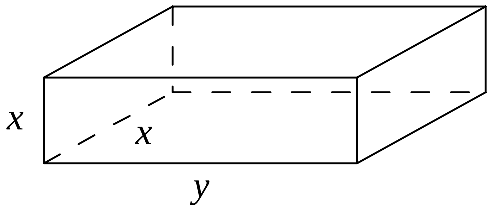
$$M''(x) = \frac{80x \cdot x^2 - (40x^2 - 360)\cdot 2x}{x^4} = \frac{80x^3 - 80x^3 + 720x}{x^4} = \frac{720x}{x^4} = \frac{720}{x^3}$$

$$M''(3) = \frac{720}{3^3} > 0 \Rightarrow x = 3 \text{ es un mínimo}$$

Por tanto, las dimensiones del marco son: $\begin{cases} x = 3\,\text{m} \\ y = 2\,\text{m} \end{cases}$

Así, el coste del marco es: $40 \cdot 3 + 60 \cdot 2 = 120 + 120 =$ 240 €.

10. En una oficina de correos sólo admiten paquetes con forma de paralelepípedo rectangular, tales que la anchura sea igual a la altura y, además, la suma de sus tres dimensiones debe ser de 72 cm. Halla las dimensiones del paralelepípedo para que el volumen sea máximo.



El problema a resolver es:

$$\begin{cases} x + x + y = 72 \\ v \equiv x^2 y \ \text{ máximo} \end{cases}$$

Como $2x + y = 72 \Rightarrow y = 72 - 2x$ ý sustituyendo en la expresión de *v*:

$$v = x^2(72 - 2x) = 72x^2 - 2x^3 = v(x)$$

Maximizamos $v(x)$:

$$v'(x) = 144x - 6x^2$$

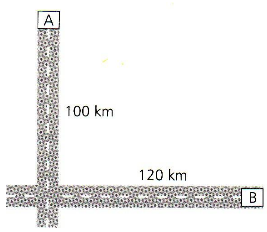
$$v'(x) = 0 \Leftrightarrow x(144 - 6x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \ \text{ (No vale)} \\ x = \dfrac{144}{6} = 24 \end{cases}$$

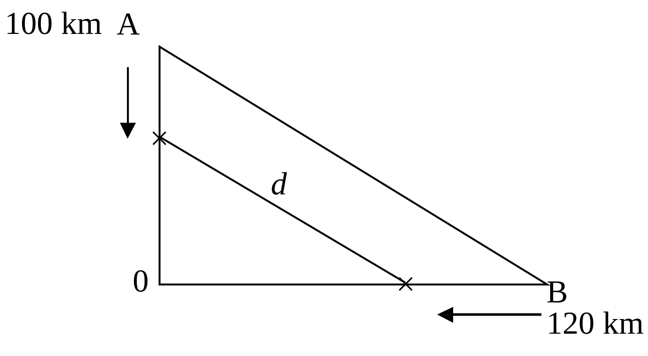
$$v''(x) = 144 - 12x$$

$$v''(24) = -144 < 0 \Rightarrow x = 24 \ \text{ es un máximo}$$

Por tanto, las dimensiones de la caja son: $24 \times 24 \times 24$ (cm).

11. Dos coches circulan por dos carreteras perpendiculares. El primero sale de la ciudad A a 100 km/h y el segundo de la ciudad B a 120 km/h en sentido al cruce de ambas carreteras.
La distancia de A hasta el cruce es de 100 km y desde B hasta el cruce, de 120 km. ¿En qué momento la distancia entre los dos coches es mínima?





Sea *d* la distancia que hay que minimizar. Sabemos que

$$e = v \cdot t$$

El espacio que le falta por recorrer a A es: 100-100*t*

El espacio que falta por recorrer a B es:120-120*t*

Aplicando el teorema de Pitágoras: $d(t) = \sqrt{(100 - 100t)^2 + (120 - 120t)^2}$

Desarrollando y agrupando:

$$d(t) = 20\sqrt{66t^2 - 122t + 66}$$

Calculamos la derivada primera e igualamos a cero:

$$d'(t)=20\frac{1}{2}\left(66t^2-122t+66\right)^{-\frac{1}{2}}(122t-122)=\ldots=\frac{10\sqrt{2(66t-61)}}{\sqrt{33t^2-61t+33}}$$

$$d'(t)=0\Leftrightarrow 10\sqrt{2(66t-61)}=0\Leftrightarrow 66t-61=0\Leftrightarrow t=\frac{61}{66}$$

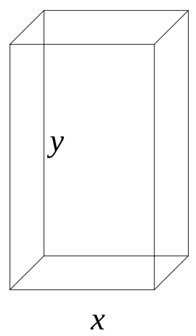
Calculamos la derivada segunda y sustituimos:

$$d''(t)=\frac{3175\sqrt{2}}{\sqrt{\left(33t^2-66t+33\right)^3}}$$

$$d''\left(\frac{61}{66}\right)=\frac{264\sqrt{41910}}{127}>0\Rightarrow t=\frac{61}{66}\text{ es un mínimo}$$

Por tanto, la distancia entre los dos coches es mínima para $t=\frac{61}{66}\simeq 0,924$ horas, que son, aproximadamente, 55,44 minutos.

12. Queremos diseñar un envase cuya forma sea un prisma regular de base cuadrada y capacidad 80 cm^3. Para la tapa y la superficie lateral usamos un determinado material; pero para la base debemos emplear un material un 50% más caro. Halla las dimensiones de este envase (longitud del lado de la base y altura) para que su precio sea el menor posible.



Si suponemos que el precio del material para la tapa y los laterales es de una unidad por cm^2, el precio para 1 cm^2 de la base será de 1.5 unidades. El precio del envase, que es la función que debemos minimizar, es:

$$p=x^2+4xy+1.5x^2=2.5x^2+4xy$$

Esta función depende de dos variables, pero como sabemos que el volumen es de 80 cm^3, se tiene:

$$V=x^2y=80\Rightarrow y=\frac{80}{x^2}$$

Sustituyendo en la función:

$$p=2.5x^2+4x\frac{80}{x^2}=2.5x^2+\frac{320}{x}=p(x)$$

Derivamos e igualamos a cero:

$$p'(x)=5x-\frac{320}{x^2}$$

$$p'(x)=0\Leftrightarrow 5x^3-320=0\Leftrightarrow x^3=64\Leftrightarrow x=4\ \text{cm}$$

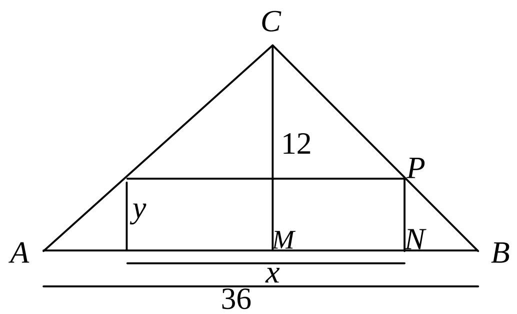
Para comprobar que se trata del precio mínimo, calculamos la derivada segunda y sustituimos:

$$p''(x)=5+\frac{640}{x^3}$$

$$p''(4)>0\Rightarrow x=4\ \text{es un mínimo}$$

El envase de precio mínimo tiene una base cuadrada de 4 cm de lado y una altura de 5 cm.

13. Halla las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede inscribirse en un triángulo isósceles cuya base es el lado desigual y mide 36 cm y la altura correspondiente mide 12 cm. Supón que un lado del rectángulo está en la base del triángulo.



La función que debemos hacer máxima es el área del rectángulo: $A = xy$

Como esta función depende de dos variables, debemos buscar una relación entre ellas.
Los triángulos *CMB* y *PNB* son semejantes, por tanto:

$$\frac{MB}{CM} = \frac{BN}{PN} \Leftrightarrow \frac{18}{12} = \frac{18 - \frac{x}{2}}{y} \Leftrightarrow 3y = 36 - x$$
$$\Rightarrow x = 36 - y^2$$

Sustituimos en la función a maximizar:

$$A = 36y - 3y^2 = A(y)$$

Derivamos e igualamos a cero:

$$A'(y) = 36 - 6y$$
$$A'(y) = 0 \Leftrightarrow 36 - 6y = 0 \Leftrightarrow y = 6$$

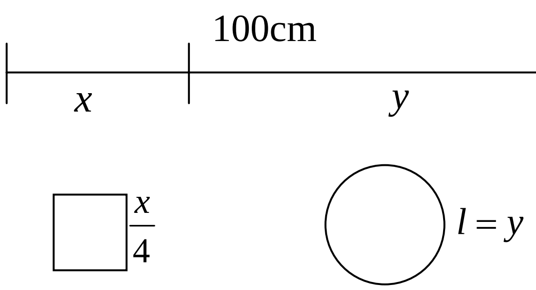
Sustituimos en la derivada segunda:

$A''(6) = -6 < 0 \Rightarrow y = 6$ es un máximo

Por tanto, las dimensiones del rectángulo son: $\begin{cases} y = 6\,\text{cm} \\ x = 18\,\text{cm} \end{cases}$

14. Un hilo de 100 cm se divide en dos trozos de longitudes *x* e *y*; con el primero se forma un cuadrado y con el segundo un círculo. Razonadamente:

a) Halla *x* e *y* para que la suma de las áreas del cuadrado y del círculo sea máxima.
b) Halla x e y para que la suma de las áreas del cuadrado y del círculo sea mínima.



La longitud de la circunferencia es $2\pi r = y$, y por tanto el radio es $r = \frac{y}{2\pi}$.

La función que tenemos que maximizar y minimizar es la suma de las áreas:

$$S = \frac{x^2}{16} + \frac{\pi y^2}{4\pi^2} = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4\pi}$$

Además, sabemos que $x + y = 100$, es decir, $y = 100 - x$.

Sustituyendo:

$$S = \frac{x^2}{16} + \frac{(100 - x)^2}{4\pi} = S(x)$$

Derivamos e igualamos a cero:

$$S'(x) = \frac{x}{8} + \frac{-(100 - x)}{2\pi} = \frac{x}{8} - \frac{100 - x}{2\pi}$$
$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{8} - \frac{100 - x}{2\pi} = 0 \Leftrightarrow 2\pi x = 800 - 8x \Leftrightarrow x(2\pi + 8) = 800 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = \frac{800}{2\pi + 8} = \frac{400}{\pi + 4}$$

Calculamos la derivada segunda y sustituimos:

$S''(x) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2\pi} > 0 \Rightarrow x = \frac{400}{\pi + 4}$ es un mínimo

Por tanto, el valor hallado corresponde a un mínimo. Es decir, cuando $x = \dfrac{400}{\pi + 4}$ e $y = 100 - \dfrac{400}{\pi + 4} = \dfrac{100\pi}{\pi + 4}$ la suma de las áreas es **mínima**.

El área será máxima en uno de los extremos del intervalo $[0,100]$ en el que toma valores la variable *x*.

Si $x = 0$ e $y = 100$, el radio del círculo es $r = \dfrac{100}{2\pi}$, el área del cuadrado es 0 y el área del círculo es:

$$A_{círculo} = \pi \cdot \frac{100^2}{4\pi^2} = \frac{10000}{4\pi} \approx 795.8 \text{ cm}^2$$

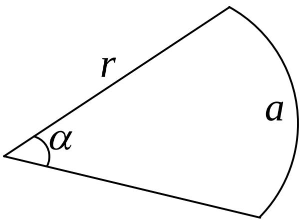
Si $x = 100$ e $y = 0$, el lado del cuadrado es 25 cm y el área del cuadrado es:

$$A_{cuadrado} = 25^2 = 625 \, \text{cm}^2$$

Así, la función se hace **máxima** cuando $x = 0$, es decir, cuando todo el hilo se utiliza en hacer un círculo.

15. Un jardinero quiere hacer un parterre[1] en forma de sector circular y que tenga de perímetro 20 m. Se pregunta acerca del radio que debe tomar para lograr que el área del parterre sea máxima.

a) Expresa el área del parterre, *S*, como función del radio *r*.
b) Determina el valor del radio que maximiza *S*.
c) ¿Cuál es la amplitud de este sector de máxima superficie?
d) ¿Qué criterio se utilizará para garantizar que la solución encontrada corresponde ciertamente a un máximo?



Consideramos un sector circular de radio *r*, arco *a* y ángulo α.
Deducimos la fórmula del área de dicho sector a partir de la fórmula del área de círculo y de la longitud de la circunferencia.

$$A = \pi \cdot r^2 \quad \text{y} \quad L = 2 \cdot \pi \cdot r$$

Si llamamos S al área del sector circular, se tiene:

$$\frac{2 \cdot \pi \cdot r}{a} = \frac{\pi \cdot r^2}{S} \Rightarrow S = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot a}{2 \cdot \pi \cdot r} = \frac{ra}{2}$$

a) Para expresar el área S en función del radio utilizamos la relación que proporciona el perímetro del parterre, $2r + a = 20$, de donde:

$$a = 20 - 2r$$

Sustituimos en la fórmula de *S*:

$$S = \frac{r(20 - 2r)}{2} = 10r - r^2 = S(r)$$

b) Derivamos e igualamos a cero:

$$S'(r) = 10 - 2r$$

$$S'(r) = 0 \Leftrightarrow 10 - 2r = 0 \Leftrightarrow r = 5 \, \text{m}$$

Calculamos la derivada segunda y sustituimos:

$$S''(r) = -2 < 0 \Rightarrow r = 5 \text{ es un máximo}$$

c) Para calcular el valor de la amplitud, α, correspondiente a esta solución, calculamos primero el valor de *a*:

$$a = 20 - 2 \cdot 5 = 10 \, \text{m}$$

[1] Jardín o parte de él con césped, flores y anchos paseos.

y el ángulo correspondiente a este arco (expresado en radianes) se obtiene mediante una regla de tres:

$$\frac{2\cdot\pi\cdot r}{10}=\frac{2\pi}{\alpha}\Rightarrow\alpha=\frac{20\pi}{2\cdot\pi\cdot r}=\frac{10}{5}=\text{2 radianes}$$

d) Para garantizar que la solución corresponde a un máximo, hemos calculado la derivada segunda y hemos visto que tiene signo negativo.

16. El valor de un rubí es proporcional al cuadrado de su peso. Divide un rubí de 2 gramos en dos partes de x gramos y de $2-x$ gramos, de forma que los dos rubíes formados sea mínima.

El valor de dos rubíes será, en función del peso de uno de ellos:

$$V(x)=k\left(x^2+(x-2)^2\right)=k\left(2x^2-4x+4\right)$$

Calculamos la deriva e igualamos a cero:

$$V'(x)=k(4x-4)$$

$$V'(x)=0\Leftrightarrow k(4x-4)=0\Leftrightarrow x=1$$

Calculamos la derivada segunda y sustituimos:

$$V''(x)=4x$$

$$V''(1)=4>0\Rightarrow x=1 \text{ es un mínimo}$$

Así, ambos rubíes deben pesar 1 gramo cada uno.

17. Se quieren construir depósitos cilíndricos como el de la figura, con la condición de que la altura y el perímetro de la circunferencia sumen 100 m.

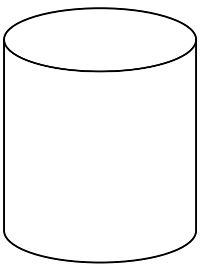
Comprueba que el volumen de los depósitos viene dado por la expresión:

$$V(r)=100\pi\cdot r^2-2\pi^2r^3$$

y determina las dimensiones del que tiene volumen máximo.

La función que queremos hacer máxima es el volumen del cilindro:

$$V=\pi\cdot r^2h$$



La condición dada en el enunciado relaciona las dos variables que aparecen en la fórmula del volumen:

$$h+2\pi\cdot r=100\Rightarrow h=100-2\pi\cdot r$$

Sustituyendo en V:

$$V(r)=\pi\cdot r^2(100-2\pi\cdot r)=100\pi\cdot r^2-2\pi^2r^3$$

Derivamos e igualamos a cero:

$$V'(r)=200\pi\cdot r-6\pi^2r^2$$

$$V'(r)=0\Leftrightarrow 200\pi\cdot r-6\pi^2r^2=0\Leftrightarrow r=\begin{cases}0\\ \dfrac{100}{3\pi}\end{cases}$$

La solución $r=0$ corresponde a un cilindro degenerado de volumen 0. Estudiamos la solución no nula, y para ello calculamos la derivada segunda:

$$V''(r)=200\pi-12\pi^2r$$

$$V''\left(\frac{100}{3\pi}\right)=200\pi-12\pi^2\frac{100}{3\pi}=200\pi-400\pi<0\Rightarrow r=\frac{100}{3\pi}\text{ es un máximo}$$

El cilindro de volumen máximo tiene por dimensiones $r=\dfrac{100}{3\pi}$ m y $h=\dfrac{100}{3}$ m.

18. Encontrar, de entre todas las rectas que pasan por el punto $(1,2)$ aquella que forma con los semiejes coordenados positivos un triángulo de área mínima.

Todas las rectas que pasan por el punto $(1,2)$ son de la forma $y-2=m(x-1)$:

Para $\begin{cases} x=0 \Rightarrow y=2-m \\ y=0 \Rightarrow x=-\dfrac{2}{m}+1 \end{cases}$.

Si llamamos $A\left(-\dfrac{2}{m}+1,0\right)$ y $B(0,2-m)$ a los puntos de corte de la recta con los ejes OX y OY, respectivamente, el área del triángulo OAB es:

$$\text{Área}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}\right|=\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{m}+1\right)(2-m)=-\frac{2}{m}-\frac{m}{2}+2=A(m)$$

Optimizamos $A(m)$:

$$A'(m)=-\frac{-2}{m}-\frac{1}{2}=\frac{2-m^2}{2m^2}$$

$$A'(m)=0\Rightarrow 2-m^2=0\Rightarrow m=\pm\sqrt{2}$$

$$A''(m)=\frac{-2m\cdot m^2-\left(2-m^2\right)\cdot 4m}{4m^4}$$

$$A''\left(\sqrt{2}\right)<0$$

$$A''\left(\sqrt{2}\right)>0\Rightarrow m=-\sqrt{2}\ \text{ es un mínimo}$$

La recta pedida es $y-2=-\sqrt{2}(x-1)$