Derivadas y aplicaciones

1. Dada la función

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{ax+\operatorname{sen} x}{2x-x^2} & \text{si} \quad x<0\\ bx+c & \text{si} \quad 0\le x<1\\ \dfrac{1}{1+x} & \text{si} \quad x\ge 1\end{cases}$$

calcula el valor de los parámetros $a,b,c\in\mathbb{R}$ para que la función sea continua en $x=0$ y derivable en $x=1$.

<u>*Solución:*</u>

Continuidad en $x=0$: ¿$\exists\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$?

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{ax+\operatorname{sen} x}{2x-x^2}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{a+\cos x}{2-2x}=\dfrac{a+1}{2}\\ \lim\limits_{x\to 0+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+}(bx+c)=c=f(0)\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{a+1}{2}=c\Rightarrow\boxed{a-2c=-1}\quad [1]$$

Continuidad en $x=1$: ¿$\exists\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$?

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1-}(bx+c)=b+c\\ \lim\limits_{x\to 1+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+}\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{1}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow b+c=\frac{1}{2}\Rightarrow\boxed{2b+2c=1}\quad [2]$$

Derivabilidad en $x=1$: ¿$\exists f'(1)$?

$$\left.\begin{array}{l}f'_-(1)=b\\ \qquad y=bx+c\\ \qquad y'=b\\ f'_+(1)=-\dfrac{1}{4}\\ \qquad y=\dfrac{1}{1+x}\\ \qquad y'=\dfrac{-1}{(1+x)^2}\end{array}\right\}\Rightarrow\boxed{b=\frac{1}{4}}\quad [3]$$

Resolvemos el sistema [1], [2], [3]:

$$\left.\begin{array}{l}b=\dfrac{1}{4}\\ 2b+2c=1\Rightarrow c=\dfrac{1+\frac{2}{4}}{2}=\dfrac{3}{4}\\ a-2c=-1\Rightarrow a=2c-1=2\cdot\dfrac{3}{4}-1=\dfrac{1}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow(a,b,c)=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)$$

2. Determina los valores de $a,b \in \mathbb{R}$ para que la siguiente función sea derivable en $\mathbb{R}$.

$$f(x)=\begin{cases} e^{bx}\cos(ax) & \text{si} \quad x<0 \\ \log(e+x)^a & \text{si} \quad x\geq 0 \end{cases}$$

Solución:

Nos piden los valores para que la función sea derivable, pero en la función hay dos parámetros, luego hay que tener en cuenta que al ser derivable también es continua.

Cada una de las funciones componentes es continua y derivable es su dominio, por ser funciones elementales bien definidas.

Continuidad en $x=0$: $¿\exists \lim_{x\to 0} f(x)=f(0)?$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0-}\left[e^{bx}\cos(ax)\right]=e^0\cdot 1=1 \\ \lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0+}\left[\log(e+x)^a\right]=a=f(0) \end{array}\right\}\Rightarrow a=1$$

Derivabilidad en $x=0$: $¿\exists f'(0)?$

$$\left.\begin{array}{l} f'_-(0)=b \\ \qquad y=e^{bx}\cos(ax) \\ \qquad y'=be^{bx}\cos(ax)+e^{bx}\left[-a\,\mathrm{sen}(ax)\right] \\ f'_+(0)=\dfrac{1}{e} \\ \qquad y=\log(e+x)^a \\ \qquad y'=\dfrac{1}{(e+x)^a}a(e+x)^{a-1} \end{array}\right\}\Rightarrow b=\frac{1}{e}$$

Conclusión: para $(a,b)=\left(1,\dfrac{1}{e}\right)$ la función es derivable en $\mathbb{R}$.

3. Calcula la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a $f(x)=x^2-4x$ en el punto de abscisa $x=1$.

La ecuación de la recta tangente en $x=a$ es: $y-f(a)=f'(a)(x-a)$

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=-3 \\ f'(x)=2x-4 \\ f'(1)=-2 \end{array}\right\}\Rightarrow y-(-3)=-2(x-1)\Rightarrow y+3=-2(x-1)$$

La ecuación de la recta normal en $x=a$ es: $y-f(a)=\dfrac{-1}{f'(a)}(x-a)$

$$y+3=\frac{-1}{-2}(x-1)\Rightarrow y+3=\frac{1}{2}(x-1)$$

4. **a)** Interpretación geométrica de la derivada de una función.

b) Calcula, razonadamente, la ecuación de la recta tangente y de la recta normal en el punto de abscisa $x=0$ a la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{x^3-2x}{x^2+4}$.

Solución:

a) La derivada de la recta tangente a una función en un punto es igual a la pendiente de la recta tangente en ese punto.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=\dfrac{(3x^2-2)(x^2+4)-(x^3-2x)\cdot 2x}{(x^2+4)^2} \\ \text{b)}\ \ f'(0)=-\dfrac{1}{2} \\ f(0)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \text{Recta tangente} \\ y-0=-\dfrac{1}{2}(x-0)\Rightarrow y=-\dfrac{1}{2}x \\ \text{Recta normal} \\ y=2x \end{cases}$$

5. La capacidad de concentración de una saltadora de altura en una reunión atlética de tres horas de duración viene dada por la función $C(t)=300t(3-t)$ donde t mide el tiempo en horas.

a) Calcula los intervalos en los cuales la capacidad de concentración aumenta y en los que disminuye. ¿Cuándo es nula la capacidad de concentración?
b) ¿Cuál es el mejor momento en términos de su capacidad de concentración para que la saltadora pueda batir su propia marca?

Solución:

a) Hay que estudiar el signo de C':

$C(t)=300t(3-t)$

$C'(t)=300(3-t)-300t$

$C'(t)=0\Rightarrow 300(3-t)-300t=0\Rightarrow 3-2t=0\Rightarrow t=\dfrac{3}{2}$

$$\begin{array}{ccccc} & + & & - & \\ 0 & \nearrow & \dfrac{3}{2} & \searrow & \end{array}$$

C es estrictamente $\begin{cases} \text{creciente en } \left(0,\dfrac{3}{2}\right) \\ \text{decreciente en } \left(\dfrac{3}{2},+\infty\right) \end{cases}$

La concentración es nula cuando $C(t)=0$:

$C(t)=0\Rightarrow 300t(3-t)=0\Rightarrow t=\begin{cases}0\\3\end{cases}$

Así, la concentración aumenta desde que empieza hasta las $\dfrac{3}{2}=1{,}5$ horas, disminuye desde 1,5 horas hasta las 3 horas, y es nula al principio y a las 3 horas.

b) Hay que calcular el máximo de $C(t)$:

Por lo visto en el apartado a), el único posible máximo es $t=\dfrac{3}{2}$. Aplicamos el criterio de la derivada segunda para comprobarlo:

$C''(t) = -600$

$$C''\left(\frac{3}{2}\right) < 0 \Rightarrow t = \frac{3}{2} \text{ es un máximo relativo de } C$$

Por tanto, el mejor momento en términos de concentración es a las 1,5 horas del inicio de la reunión.

6. Estudia el crecimiento/decrecimiento de la siguiente función:

$$f(x) = xe^x$$

Hay que estudiar el signo de f': $\begin{cases} f' > 0 \Rightarrow f \text{ estrictamente creciente} \\ f' < 0 \Rightarrow f \text{ estrictamente dereciente} \end{cases}$

$f'(x) = e^x + xe^x = e^x(1+x)$

$f'(x) > 0 \Rightarrow 1 + x > 0 \Rightarrow x > -1$

$$\begin{array}{ccc} - & & + \\ \hline \searrow & -1 & \nearrow \end{array}$$

f es estrictamente $\begin{cases} \text{creciente en } (-1, +\infty) \\ \text{decreciente en } (-\infty, -1) \end{cases}$

7. Estudia los extremos relativos de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$$

Posibles extremos relativos: [$f'(x) = 0$]

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases}$$

Criterio de la derivada segunda: $f''(a) \begin{cases} > 0 \Rightarrow x = a \text{ es un mínimo relativo de } f \\ < 0 \Rightarrow x = a \text{ es un máximo relativo de } f \end{cases}$

$$f''(x) = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2 - 2x) \cdot 2(x-1)}{(x-1)^3}$$

$f''(0) = -2 < 0 \Rightarrow x = 0$ es un máximo relativo de f, de coordenadas $(0, f(0)) = (0, -2)$

$f''(2) = 2 > 0 \Rightarrow x = 2$ es un mínimo relativo de f, de coordenadas $(2, f(2)) = (2, 2)$

8. Estudia la curvatura (concavidad/convexidad) de la siguiente función:

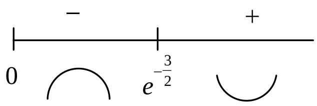
$$f(x) = x^2 \log x$$

(donde $\log x$ es el logaritmo natural o neperiano).

Hay que estudiar el signo de f'': $\begin{cases} f'' > 0 \Rightarrow f \text{ convexa } (\cup) \\ f'' < 0 \Rightarrow f \text{ cóncava } (\cap) \end{cases}$

$$f'(x) = x(2\log x + 1)$$
$$f''(x) = 2\log x + 3$$
$$f''(x) > 0 \Rightarrow 2\log x + 3 > 0 \Rightarrow \log x > -\frac{3}{2} \Rightarrow x > e^{-\frac{3}{2}}$$

(Hay que tener en cuenta que el dominio de $f(x)$ es $(0,+\infty)$)



$$f \text{ es } \begin{cases} \text{cóncava en } \left(0, e^{-\frac{3}{2}}\right) \\ \text{convexa en } \left(e^{-\frac{3}{2}}, +\infty\right) \end{cases}$$

Estudia los puntos de inflexión de la siguiente función:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$$

Posibles puntos de inflexión: [$f''(x) = 0$]

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$$
$$f''(x) = 6x - 6$$
$$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$$

Criterio de la derivada tercera:

$$f'''(a) \begin{cases} > 0 \Rightarrow x = a \text{ es un punto de inflexión (cóncavo-convexo) de } f \\ < 0 \Rightarrow x = a \text{ es un punto de inflexión (convexo-cóncavo) de } f \end{cases}$$

$$f'''(x) = 6$$

$f'''(1) \neq 0 \Rightarrow x = 1$ es un punto de inflexión de f, de coordenadas $(1, f(1)) = (1,3)$

9. Calcula, razonadamente, los puntos de inflexión de $f(x) = 3x^5 - 10x^4 + 10x^3 + 3$.

Solución:

$$f(x) = 3x^5 - 10x^4 + 10x^3 + 3$$

Posibles puntos de inflexión:

$$f'(x) = 15x^4 - 40x^3 + +30x^2$$
$$f''(x) = 60x^3 - 120x^2 + 60x$$
$$f''(x) = 0 \Rightarrow 60x\left(x^2 - 2x + 1\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 60x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

Posibles puntos de inflexión: $x = 0$ y $x = 1$

Criterio de la derivada tercera:

$$f'''(x) = 180x^2 - 240x + 60$$
$$f'''(0) = 60 \neq 0$$
$$f'''(1) = 0$$

Por tanto, el único punto de inflexión de f es $x = 0$, y tiene por coordenadas $(0, f(0)) = (0,3)$.

10. Descomponer, razonadamente, el número 8 en dos sumandos positivos de manera que la suma del cubo del primer sumando más el cuadrado del segundo, sea mínima.

<u>Solución:</u>

Se tiene que $8 = x + y$ con $x, y > 0$, y tenemos que minimizar $3x^3 + y^2$:

Como $y = 8 - x$, la función a minimizar es $f(x) = x^3 + (8 - x)^2$:

Posibles extremos relativos:

$f'(x) = 3x^2 - 2(8 - x)$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 2(8 - x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 2x - 16 = 0 \Rightarrow x = 2$$

Criterio de la derivada segunda:

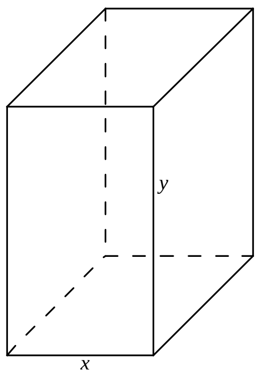
$f''(x) = 6x + 2$

$$f''(2) = 14 > 0 \Rightarrow x = 2 \text{ es un mínimo relativo de } f$$

Así, los sumandos buscados son 2 y $8 - 2 = 6$.

11. ¿Qué dimensiones debe tener un paragüero con forma de prisma cuadrado de 20 dm^3 de volumen, para que en su fabricación se gaste la menor cantidad posible de material? Razona la respuesta.

<u>Solución:</u>



Llamamos x a la arista de la base e y a la altura del prisma cuadrangular.

La condición que tenemos es: $x^2 y = 20$

La función que queremos minimizar es: $A = x^2 + 4xy$

Como $x^2 y = 20 \Rightarrow y = \dfrac{20}{x^2}$, y sustituyendo en la función:

$$A(x) = x^2 + 4x\frac{20}{x^2} = x^2 + \frac{80}{x}$$

Posibles extremos relativos:

$A'(x) = 2x - \dfrac{80}{x^2} = \dfrac{2x^3 - 80}{x^2}$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow 2x^3 - 80 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{40}$$

Criterio de la derivada segunda:

$A''(x) = 2 + \dfrac{160}{x^3}$

$$A''\left(\sqrt[3]{40}\right) > 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{40} \text{ es un mínimo relativo de } A(x)$$

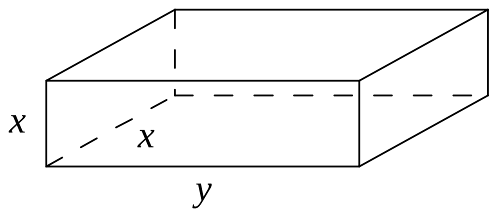
Así, las dimensiones del paragüero son:

Arista de la base: $x = \sqrt[3]{40}$ dm $= 2\sqrt[3]{5}$ dm $\simeq 3,4$ dm

Altura: $y = \dfrac{20}{\left(\sqrt[3]{40}\right)^2} = \dfrac{20}{\sqrt[3]{1600}} = \sqrt[3]{5}$ dm $\simeq 1,7$ dm

12. En una oficina de correos sólo admiten paquetes con forma de paralelepípedo rectangular, tales que la anchura sea igual a la altura y, además, la suma de sus tres dimensiones debe ser de 72 cm. Halla las dimensiones del paralelepípedo para que el volumen sea máximo.

<u>*Solución:*</u>
El problema a resolver es:



$$\begin{cases} x+x+y=72 \\ v\equiv x^2y \ \text{ máximo} \end{cases}$$

Como $2x+y=72 \Rightarrow y=72-2x$ y sustituyendo en la expresión de *v*:

$$v=x^2(72-2x)=72x^2-2x^3=v(x)$$

Maximizamos $v(x)$:

$$v'(x)=144x-6x^2$$

$$v'(x)=0 \Leftrightarrow x(144-6x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \ \text{ (No vale)} \\ x=\dfrac{144}{6}=24 \end{cases}$$

$$v''(x)=144-12x$$

$v''(24)=-144<0 \Rightarrow x=24$ es un máximo

Por tanto, las dimensiones de la caja son: $24\times 24\times 24$ (cm).

13. Enuncia la regla de L´Hôpital y como aplicación calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\cos(2x)-e^x-x}{x\operatorname{sen}x}$$

<u>*Solución:*</u>

a) Regla de L'Hôpital para $\left[\dfrac{0}{0}\right]$

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones derivables en un entorno E de a y tales que:

1) $f(a)=g(a)=0$

2) g' no se anula en E

Si existe el límite finito $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces existe también $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, y, además:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

b) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\cos(2x)-e^x-x}{x\operatorname{sen}x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{-2\operatorname{sen}(2x)-e^x-1}{\operatorname{sen}x+x\cos x}=\left[\dfrac{-2}{0}\right]=-\infty$

14. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{e^x-1}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^3\log x\right)$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\log x}{x}$ d) $\lim\limits_{x\to +\infty}x^{\frac{1}{x}}$

<u>*Solución:*</u>

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{e^x-1}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=(\text{L'Hôpital})=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{e^x}=\dfrac{1}{1}=1$

b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \text{(L'Hôpital)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

c) $\lim_{x\to 0}\left(x^3 \log x\right) = \left[0\cdot\infty\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\log x}{\frac{1}{x^3}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-3}{x^4}} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^3}{3} = 0$

d) $\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = \left[\infty^0\right] = \exp\left\{\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\log x\right\} = e^0 = 1$ (donde exp es e)

ya que $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\log x = \left[0\cdot\infty\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

Curiosidad: modelo[1] SIR

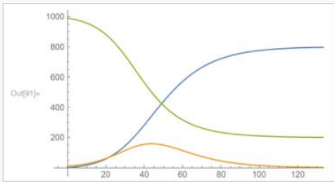
La mayor parte de modelos epidemiológicos se basan en dividir a la población sujeta a la infección en un pequeño número de grupos compartimentados, cada uno de estos grupos está formado por individuos idénticos en términos de su estatus con respecto a la infección en cuestión. En el modelo SIR, existen tres grupos compartimentados:

> *Población susceptible* (*S*): individuos sin inmunidad al agente infeccioso, y que por tanto puede ser infectada si es expuesta al agente infeccioso.
> *Población infectada* (*I*): individuos que están infectados en un momento dado y pueden transmitir la infección a individuos de la población susceptible con la que entran en contacto.
> *Población recuperada y fallecidos* (*R*): individuos que son inmunes a la infección (o fallecidos), y consecuentemente no afectan a la transmisión cuando entran en contacto con otros individuos.

La población total es $N = S + I + R$. Hecha esta compartimentación se hace necesario especificar ecuaciones que describan la variación temporal del número de individuos en cada compartimento.

La gráfica de la solución $I(t)$ debería ser semejante con la progresión observada del número de personas infectadas y el número de individuos en cada compartimento deben ser un número entero, aunque dado el gran tamaño de la población N, las variables *S*, *I*, *R* pueden ser tratadas como variables continuas, y así las ecuaciones del modelo SIR son:

$$\begin{cases} S'(t) = -\beta SI \\ I'(t) = \beta SI - \gamma I \\ R'(t) = \gamma I \end{cases}$$



Un ejemplo de modelo SIRS (Verde = Población susceptible, Amarillo= Población infectada y Azul = Población recuperada).

donde β es la tasa de transmisión y γ la tasa de recuperación (de tal manera que el período medio de recuperación es $\frac{1}{\gamma}$).

Fuente: *https://es.wikipedia.org/wiki/Modelo_SIR*

[1] Modelo matemático: descripción de la realidad mediante objetos matemáticos (funciones, derivadas…) y sus relaciones.