

ASÍNTOTAS DE UNA FUNCIÓN

1. Estudia, y calcula en su caso, las asíntotas de una función:

1) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$

8) $f(x) = \log(x^2 - 16)$ (Solo verticales)

2) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 9}$

9) $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$ (Solo horizontales)

3) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 1}$

10) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^4 + 3}}$ (Solo horizontales)

4) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 4}$

11) $f(x) = \frac{x}{e^x}$

5) $f(x) = \ln \sqrt{x^2 + 1}$

12) $f(x) = e^{\frac{2x}{x^2 + 1}}$

6) $f(x) = \frac{x^2}{x - 1}$

13) $f(x) = 2\sqrt{\frac{1}{x} - 1}$

7) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

14) $f(x) = \frac{x + 3}{e^x}$

Soluciones

1) Asíntotas verticales

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty \text{ con } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow x = 1 \text{ es una asíntota vertical}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \infty \text{ con } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty \end{cases} \Rightarrow x = -1 \text{ es una asíntota vertical}$$

Asíntotas horizontales

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x^2}} = 1 \Rightarrow y = 1 \text{ es una}$$

asíntota horizontal

Como consecuencia, la función no tiene asíntotas oblicuas.

2) Asíntotas verticales

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \infty \text{ con } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow x = 3 \text{ es una asíntota vertical}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \infty \text{ con } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = -\infty \end{cases} \Rightarrow x = -3 \text{ es una asíntota vertical}$$

Asíntotas horizontales

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 - 9} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2 - 9}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{9}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{9}{x^2}} = 0$$

$y = 0$ es una asíntota horizontal

Como consecuencia, la función no tiene asíntotas oblicuas.

3) Asíntotas verticales

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \infty \text{ con } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty \end{cases} \Rightarrow x = -1 \text{ es una asíntota vertical}$$

Asíntotas horizontales

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4}{x + 1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2 - 4}{x^2}}{\frac{x + 1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2}}{\frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{4}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \infty$$

$\Rightarrow f(x)$ no tiene asíntotas horizontales

Asíntota oblicua

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2 - 4}{x + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4}{x(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4}{x^2 + x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2 - 4}{x^2}}{\frac{x^2 + x}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{4}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} = 1 \Rightarrow m = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 4}{x + 1} - x \right) = \left[\frac{\infty}{\infty} - \infty \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4 - x(x + 1)}{x + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4 - x^2 - x}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x - 4}{x + 1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{-x - 4}{x}}{\frac{x + 1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{-x}{x} - \frac{4}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1 - \frac{4}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = -1 \Rightarrow n = -1$$

Por tanto, la recta $y = mx + n = x - 1$ es una asíntota oblicua.

4) Asíntotas verticales

No tiene (ya que el denominador no se anula)

Asíntotas horizontales

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 4} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2 - 1}{x^2}}{\frac{x^2 + 4}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{4}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{4}{x^2}} = 1$$

$\Rightarrow y = 1$ es una asíntota horizontal

Por tanto, no hay asíntotas oblicuas.

5) Esta función no tiene asíntotas.

6) Asíntotas verticales

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x-1} = \left[\frac{1}{0} \right] = \infty \quad \text{con} \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \end{cases}$$

Por tanto, la recta $x = 1$ es una asíntota vertical.

Asíntotas horizontales

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x-1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x-1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{x}{x^2} - \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} = \infty$$

Es decir, esta función no tiene asíntotas horizontales.

Asíntotas oblicuas

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x-1} = 1 \Rightarrow m = 1 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - x(x-1)}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x^2 + x}{x-1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x-1} = 1 \Rightarrow n = 1 \end{aligned}$$

Así, la recta $y = x + 1$ es una asíntota oblicua.

7) Asíntotas verticales

No tiene, que $\nexists a \in \mathbb{R} : \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$

Asíntotas horizontales:

No tiene, ya que $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 - 1} = \infty$

Asíntotas oblicuas:

$$m_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - \frac{1}{x^2}}}{x} = 1$$

$$n_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2-1} - x) = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2-1} - x)(\sqrt{x^2-1} + x)}{(\sqrt{x^2-1} + x)} = \dots = 0$$

Así, la recta $y = x$ es una asíntota oblicua.

$$m_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - \frac{1}{x^2}}}{x} = -1$$

$$n_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2-1} + x) = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2-1} + x)(\sqrt{x^2-1} - x)}{(\sqrt{x^2-1} - x)} = \dots = 0$$

Así, la recta $y = -x$ es una asíntota oblicua.

8) Asíntotas verticales

$$\text{Dom}(f) = (-\infty, -4] \cup [4, +\infty) \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -4^-} \log(x^2 - 16) = -\infty \Rightarrow x = -4 \text{ es una A.V.} \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} \log(x^2 - 16) = +\infty \Rightarrow x = 4 \text{ es una A.V.} \end{cases}$$

9) Asíntotas horizontales

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{e^x}{e^x}}{\frac{e^x}{e^x} + \frac{1}{e^x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{e^x}} = \left[\frac{1}{1+0} \right] = 1 \Rightarrow y = 1 \text{ es una A.H.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{e^x}{e^x}}{\frac{e^x}{e^x} + \frac{1}{e^x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{e^x}} = \left[\frac{1}{1+\infty} \right] = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ es una A.H.}$$

10) Asíntotas horizontales

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^4+3}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}}{\sqrt{\frac{x^4}{x^4} + \frac{3}{x^4}}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{3}{x^4}}} = 1 \Rightarrow y = 1 \text{ es una A.H.}$$

11) Asíntotas verticales: no tiene ya que su dominio es \mathbb{R}

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ es una A.H.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^x} = -\infty$$

12) Asíntotas verticales: no tiene ya que su dominio es \mathbb{R}

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{2x}{x^2+1}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x^2+1}} = e^0 = 1 \Rightarrow y = 1 \text{ es una A.H.}$$

13) Estudiamos el dominio de la función:

$$\frac{2}{x} - 1 = \frac{2-x}{x} \Rightarrow \frac{2-x}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x \geq 0 \text{ y } x > 0 \\ 0 \\ 2-x < 0 \text{ y } x < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Dom}(f) = (0, 2]$$

Asíntotas verticales:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2\sqrt{\frac{2}{x}} - 1 = +\infty \Rightarrow x = 0 \text{ es una A.V.}$$

Como no tiene sentido calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, ni $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, no tiene ni A.H., ni A.O.

14) Asíntotas verticales: no tiene ya que su dominio es \mathbb{R}

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+3}{e^x} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ es una A.H.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+3}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x+3}{e^{-x}} = -\infty$$

2. Estudia las asíntotas de la siguiente función:

$$f(x) = e^{2x} - 4e^x + 1$$

Solución:

Asíntotas verticales:

No tiene, ya que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y, por tanto, $\nexists a \in \mathbb{R} : \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$

Asíntotas horizontales:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{2x} - 4e^x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [e^x(e^x - 4) + 1] = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{2x} - 4e^x + 1) = \left[\begin{array}{l} t = -x \\ x \rightarrow -\infty \Rightarrow t \rightarrow +\infty \end{array} \right] = \lim_{t \rightarrow +\infty} (e^{-2t} - 4e^{-t} + 1) = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-2t} - 4 \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} + \lim_{t \rightarrow +\infty} 1 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{2t}} - 4 \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^t} + \lim_{t \rightarrow +\infty} 1 = 1 \Rightarrow y = 1 \text{ es una A.H.} \end{aligned}$$

Asíntotas oblicuas:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x} - 4 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = +\infty \Rightarrow \text{No tiene asíntotas oblicuas (cuando } x \rightarrow \infty)$$

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x}}{x} - 4 \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow m = 0$$

$$n = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{2x} - 4e^x + 1) = \left[\begin{array}{l} t = -x \\ x \rightarrow -\infty \Rightarrow t \rightarrow +\infty \end{array} \right] = \lim_{t \rightarrow +\infty} (e^{-2t} - 4e^{-t} + 1) =$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-2t} - 4 \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} + \lim_{t \rightarrow +\infty} 1 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{2t}} - 4 \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^t} + \lim_{t \rightarrow +\infty} 1 = 1 \Rightarrow n = 1$$

y, por tanto, $y = 0x + 1 = 1$ es una A.H.

