Ejercicios resueltos de Geometría

1. Dados el plano $\pi \equiv 2x - z = 6$ y la recta $r \equiv \begin{cases} y + z = 0 \\ x - y + az = 4 \end{cases}$:

a) Encuentra el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que π y r sean paralelos.

b) Para el valor de a del apartado anterior, da la ecuación general del plano π' que contiene a r y es perpendicular a π.

2. Dado el punto $P(1,0,0)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = -1 \end{cases}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

a) Da unas ecuaciones paramétricas de la recta s que pasa por P y corta perpendicularmente a r.

b) Calcula la distancia de P a r.

3. Dado el plano $\pi \equiv y - z = 3$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$:

a) Estudia la posición relativa de π y r.

b) Da unas ecuaciones paramétricas de la recta s paralela a π que corta a r perpendicularmente en el punto $P(0,1,-1)$.

4. Dados los planos $\pi_1 \equiv x - 2y - z = 0$ y $\pi_2 \equiv 2x - y + \lambda z = 4$:

a) Calcular el valor del parámetro λ para que los planos sean perpendiculares.

b) Para el valor de λ obtenido en el apartado anterior, obtén unas ecuaciones paramétricas de la recta r paralela a π_1 y π_2 que pasa por el punto $P(1,2,3)$.

5. Dadas las rectas $r \equiv \dfrac{x}{2} = y + 1 = \dfrac{z-1}{3}$ y $s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$:

a) Estudia su posición relativa.

b) Calcula la distancia entre r y s.

1.- $\pi \equiv 2x - z = 6$

$$r \equiv \begin{cases} y + z = 0 \\ x - y + az = 4 \end{cases}$$

a) $r \parallel \pi \iff \vec{u}_r \perp \vec{n}_\pi \iff \vec{u}_r \cdot \vec{n}_\pi = 0$

$$\vec{u}_r = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix} = a\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} + \vec{i} = (a+1, 1, -1)$$

$$\vec{u}_r \cdot \vec{n}_\pi = 0 \iff (a+1, 1, -1)\cdot(2, 0, -1) = 0 \iff 2(a+1) + 1 = 0 \iff \boxed{a = -\frac{3}{2}}$$

b) $\pi' \equiv \begin{cases} P \in r \\ \vec{u}_r = (-\frac{1}{2}, 1, -1) \\ \vec{n}_\pi = (2, 0, -1) \end{cases}$ $\longrightarrow$ Si: $x = 4 \Rightarrow y + z = 0$

$$-y - \frac{3}{2}z = 0$$

$$z = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$P(4, 0, 0)$$

$$\pi' \equiv \det\begin{pmatrix} x-4 & -\frac{1}{2} & 2 \\ y & 1 & 0 \\ z & -1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \iff -(x-4) - 2y - 2z - \frac{1}{2}y = 0 \iff$$

$$\iff -x + 4 - 2y - 2z - \frac{1}{2}y = 0 \iff \boxed{\pi' \equiv -2x - 5y - 4z + 8 = 0}$$

2.- $P(1, 0, 0)$

$$r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = -1 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

a) s recta t.q. $\begin{cases} P \in s \\ s \perp r \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u}_r = (2, 1, 0),\ R(2\lambda, 3+\lambda, -1) \in r \\ \vec{PR} = (2\lambda, 3+\lambda, -1) - (1, 0, 0) = (2\lambda - 1, 3+\lambda, -1) \end{array}\right\} \vec{u}_r \perp \vec{PR} \Rightarrow \vec{u}_r \cdot \vec{PR} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2, 1, 0)\cdot(2\lambda - 1, 3+\lambda, -1) = 0 \Rightarrow 4\lambda - 2 + 3 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{5}$$

Por tanto, $\vec{u}_s = \vec{PR} = \left(2\cdot\left(-\frac{1}{5}\right), 3 + \left(-\frac{1}{5}\right), 0\right) = \left(-\frac{7}{5}, \frac{14}{5}, 0\right)$

Así,

$$\boxed{s \equiv \begin{cases} x = 1 - \frac{7}{5}\mu \\ y = \frac{14}{5}\mu \\ z = 0 \end{cases}, \mu \in \mathbb{R}}$$

b) $d(P, r) = \dfrac{|\vec{u}_r \times \vec{AP}|}{|\vec{u}_r|}$ donde $A \in r$

$A(0,3,-1)$

$\overrightarrow{AP} = (1,-3,1)$

$$\vec{u}_r \times \overrightarrow{AP} = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & +1 \end{pmatrix} = +\vec{i} - 7\vec{k} - 2\vec{j} = (1,-2,-7)$$

$$\boxed{d(P,r)} = \frac{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-7)^2}}{\sqrt{2^2+2^2}} = \frac{\sqrt{54}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}\sqrt{54}}{5} = \frac{\sqrt{270}}{5} = \boxed{\frac{3\sqrt{30}}{5}\ u}$$

3.- $\pi \equiv y - z = 3$, $r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = -1+\lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

a) Posición relativa

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n}_\pi = (0,1,-1) \\ \vec{u}_r = (2,1,1) \end{array}\right\} \pi \equiv y - z - 3 = 0$$

Sustituimos $\vec{u}_r = (2,1,1)$ en la ec. del plano:

$1 - 1 = 0 \Rightarrow$ sustituimos $P(0,1,-1) \in r$ en la ec.

Completa del plano: $1 - 1 - 3 \neq 0 \Rightarrow$ r y π son paralelos

De otra forma:

$$r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{1} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = y - 1 \Rightarrow x - 2y + 2 = 0 \\ \frac{x}{2} = z + 1 \Rightarrow x - 2z - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\tilde{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right), \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} |M| = 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rango } M = 2 \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Rightarrow \text{rango } \tilde{M} = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow r \text{ y } \pi \text{ son paralelos}$$

b) La recta que nos piden está determinada por $P(0,1,-1)$ y el vector director $\vec{u}_s = \vec{n}_\pi \times \vec{u}_r$

$$\vec{u}_s = \vec{n}_\pi \times \vec{u}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k} = (2,-2,-2)$$

Unas ecs. paramétricas de s son:

$$\boxed{s \equiv \begin{cases} x = 2\mu \\ y = 1 - 2\mu \quad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \\ z = -1 - 2\mu \end{cases}}$$

4.- $\pi_1 \equiv x-2y-z=0$

$\pi_2 \equiv 2x-y+\lambda z=4$

a) λ t.q. $\pi_1 \perp \pi_2$

$\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_{\pi_1} \perp \vec{n}_{\pi_2} \Leftrightarrow \vec{n}_{\pi_1}\cdot\vec{n}_{\pi_2}=0 \Leftrightarrow (1,-2,-1)\cdot(2,-1,\lambda)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2+2-\lambda=0 \Leftrightarrow \boxed{\lambda=4}$

b) r recta t.q. $\begin{cases} r \parallel \pi_1,\ r\parallel \pi_2 \\ P(1,2,3)\in r \end{cases}$

La recta r está determinada por $P(1,2,3)$ y $\vec{u}_r=\vec{n}_{\pi_1}\times\vec{n}_{\pi_2}$ que es perpendicular a π_1 y a π_2.

$$\vec{u}_r=(1,-2,-1)\times(2,-1,-4)=\det\begin{pmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}=-8\vec{\imath}-\vec{k}-2\vec{\jmath}+4\vec{k}-\vec{\imath}-4\vec{\jmath}=$$

$$=(-9,-6,3)$$

Así, $\boxed{r\equiv\begin{cases} x=1-9\mu \\ y=2-6\mu \\ z=3+3\mu \end{cases} \text{ con } \mu\in\mathbb{R}}$

5.- $r\equiv \frac{x}{2}=y+1=\frac{z-1}{3}$, $s\equiv\begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda \\ z=1-\lambda \end{cases}$, $\lambda\in\mathbb{R}$

a) Posición relativa

$$r\equiv \frac{x}{2}=y+1=\frac{z-1}{3} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2}=y+1 \Rightarrow x-2y-2=0 \\ \frac{x}{2}=\frac{z-1}{3} \Rightarrow 3x-2z+2=0 \end{cases}$$

$$s\equiv x=y=\frac{z-1}{-1} \Rightarrow \begin{cases} x=y \Rightarrow x-y=0 \\ x=\frac{z-1}{-1} \Rightarrow -x-z+1=0 \end{cases}$$

$$M=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix},\quad \tilde{M}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=-1\neq 0 \Rightarrow \text{rango } M=3$$

$$|\tilde{M}| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & -2 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -2 & 8 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 10 \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ rango $\tilde{M} = 4$

Por tanto, <u>r y s se cruzan.</u>

b) $$d(r,s) = \frac{|\det(\vec{u}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_sP_r})|}{|\vec{u}_r \times \vec{u}_s|}$$ donde $P_s \in s$ y $P_r \in r$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u}_r = (2,1,3) \\ \vec{u}_s = (1,1,-1) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \overrightarrow{P_sP_r} = (0,-1,1) - (0,0,1) = (0,-1,0) \\ P_r(0,-1,1) \;,\; P_s(0,0,1) \end{array}$$

$$\vec{u}_r \times \vec{u}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k} = (-4,5,1)$$

$$|\vec{u}_r \times \vec{u}_s| = \sqrt{(-4)^2 + 5^2 + 1^2} = \sqrt{42}$$

$$\det(\vec{u}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_sP_r}) = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -5$$

$$\boxed{d(r,s) = \frac{|-5|}{\sqrt{42}} = \frac{5\sqrt{42}}{42} \text{ u}}$$

<u>De otra forma</u>

$d(r,s) = d(r,\pi)$ donde π es un plano t.q. $\begin{cases} s \subset \pi \\ r \parallel \pi \end{cases}$ (luego $\pi \equiv \{P_s, \vec{u}_s, \vec{u}_r\}$)

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ y & 1 & 1 \\ z-1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi \equiv 4x - 5y - z + 1 = 0$$

$$\boxed{d(r,s)} = d(r,\pi) = \underset{P_r(0,-1,1)}{d(P_r,\pi)} = \frac{|4\cdot 0 - 5\cdot(-1) - 1 + 1|}{\sqrt{4^2 + (-5)^2 + (-1)^2}} =$$

$$= \frac{5}{\sqrt{42}} = \boxed{\frac{5\sqrt{42}}{42} \text{ u}}$$

② b) <u>De otra forma</u>

$P_r(2\lambda, 3+\lambda, -1) \in r$ (punto genérico de r)

$\overrightarrow{P_rP} = (1,0,0) - (2\lambda, 3+\lambda, -1) = (1-2\lambda, -3-\lambda, 1)$

$\overrightarrow{P_rP} \perp r \iff \overrightarrow{P_rP} \cdot \vec{u}_r = 0 \iff (1-2\lambda, -3-\lambda, -1) \cdot (2,1,0) = 0 \iff$

$\iff 2(1-2\lambda) - 3 - \lambda = 0 \iff \lambda = -\frac{1}{5}$

$P'\left(2 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right), 3 + \left(-\frac{1}{5}\right), -1\right) = \left(-\frac{2}{5}, \frac{14}{5}, -1\right)$

$d(P, r) = d(P, P') = |\overrightarrow{PP'}| = \sqrt{\left(-\frac{7}{5}\right)^2 + \left(\frac{14}{5}\right)^2 + (-1)^2} =$

$= \boxed{\frac{3\sqrt{30}}{5} \; u}$

donde $\overrightarrow{PP'} = \left(-\frac{2}{5}, \frac{14}{5}, -1\right) - (1,0,0) = \left(-\frac{7}{5}, \frac{14}{5}, -1\right)$