Ejercicios resueltos de Geometría Afín Euclídea

1. Dados los planos $\alpha \equiv -x+2y+z+2=0$ y $\beta \equiv -2y+z=0$, encuentra razonadamente la ecuación general o implícita de la recta paralela a los planos α y β que pase por el punto $P(0,-1,3)$.

Solución:
La recta que nos piden está determinada por $P(0,-1,3)$ y el vector $\overrightarrow{u_r}=\overrightarrow{n_\alpha}\times\overrightarrow{u_\beta}$.

Calculamos el vector director de la recta:

$$\overrightarrow{u_r}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}=2\vec{i}+2\vec{k}+2\vec{i}+\vec{j}=(4,1,2)$$

Por tanto, la ecuación continua de la recta pedida es:

$$r\equiv\frac{x}{4}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{2}$$

y sus ecuaciones generales o implícitas:

$$r\equiv\begin{cases} x-4y-4=0 \\ 2y-z+5=0 \end{cases}$$

2. Halla la ecuación del plano α que contiene al punto $P(1,1,-1)$ y es perpendicular a los planos $\pi\equiv x+y-z=0$ y $\pi'\equiv 2x-y-z+2=0$.

Solución:
Determinación del plano: $\alpha\equiv\left\{P,\overrightarrow{n_\alpha}\right\}$, donde $\overrightarrow{n_\alpha}=\overrightarrow{n_\pi}\times\overrightarrow{n_{\pi'}}$:

$$\overrightarrow{n_\alpha}=\overrightarrow{n_\pi}\times\overrightarrow{n_{\pi'}}=\det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}=(-2,-1,-3)$$

Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha\equiv Ax+By+Cz+D=0 \\ \overrightarrow{n_\alpha}=(A,B,C)=(-2,-1,-3) \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{r} -2x-y-3z+D=0 \\ P(1,1,-1)\in\alpha \end{array}\right\}\Rightarrow -2\cdot 1-1-3\cdot 1+D=0\Rightarrow D=0$$

y así:

$$\alpha\equiv -2x-y-3z=0\Rightarrow \boxed{\alpha\equiv 2x+y+3z=0}$$

3. Calcular el ángulo que forman las rectas $r\equiv x=y=z$ y $s\equiv\begin{cases} x+z=1 \\ y=0 \end{cases}$.

Solución:
Sabemos que $\sphericalangle\{r,s\}=\arccos\dfrac{\left|\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{u_s}\right|}{\left|\overrightarrow{u_r}\right|\left|\overrightarrow{u_s}\right|}$:

Calculamos el vector director de s: $\overrightarrow{u_s} = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -\vec{i} + \vec{k} = (-1,0,1)$

Producto escalar: $\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_s} = (1,1,1)\cdot(-1,0,1) = -1+0+1 = 0$

Ángulo:

$$\sphericalangle\{r,s\} = \arccos\frac{\left|\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{u_s}\right|}{\left|\overrightarrow{u_r}\right|\left|\overrightarrow{u_s}\right|} = \arccos\frac{0}{\sqrt{3}\sqrt{2}} = \boxed{90^{\text{o}}}$$

y, por tanto, las rectas son perpendiculares.

4. Dado el punto $P(1,2,3)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, calcula:

a) La distancia de P a r.
b) La ecuación del plano que pasa por P y es perpendicular a r.

<u>Solución:</u>

a) La distancia que nos piden se puede calcular mediante la fórmula $d(P,r) = \dfrac{\left|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{AP}\right|}{\left|\overrightarrow{u_r}\right|}$, donde $A \in r$

Vector director de r: $\overrightarrow{u_r} = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -\vec{j} = (0,-1,0)$

Punto de $r: A(0,0,0)$

Vector $\overrightarrow{AP} = (1,2,3)-(0,0,0) = (1,2,3)$

Producto vectorial: $\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{AP} = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (-3,0,1)$

Distancia: $d(P,r) = \dfrac{\left|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{AP}\right|}{\left|\overrightarrow{u_r}\right|} = \dfrac{\left|(-3,0,1)\right|}{\sqrt{0^2+(-1)^2+0^2}} = \dfrac{\sqrt{(-3)^2+0^2+1^2}}{1} = \boxed{\sqrt{10}\ \text{u}}$

b) El plano está determinado por:

$$\left.\begin{aligned} \pi \equiv \left\{P, \overrightarrow{n_\pi} = \overrightarrow{u_r}\right\} \equiv Ax + By + Cz + D = 0 \\ \overrightarrow{n_\pi} = (0,-1,0) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} -y + D = 0 \\ P(1,2,3) \in \pi \end{aligned}\right\} \Rightarrow D = 2 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv -y + 2 = 0}$$

5. Halla la ecuación general del plano π que equidista de los puntos $P(2,1,3)$ y $Q(0,3,-1)$ y es paralelo al plano $\pi' \equiv 3x - y + z + 1 = 0$.

<u>Solución:</u>

El plano buscado es de la forma $\pi \equiv 3x - y + z + D = 0$ (ya que $\pi \parallel \pi'$). Además, equidista de P y Q y, por tanto,

$$d(P,\pi)=d(P,\pi')\Rightarrow \frac{|3\cdot 2-1+3+D|}{\sqrt{11}}=\frac{|3\cdot 0-3-1+D|}{\sqrt{11}}\Rightarrow |8+D|=|-4+D|\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8+D=\pm(-4+D)\Rightarrow \begin{cases} 8+D=-4+D\Rightarrow 8=-4 \text{ Falso} \\ 8+D=-(-4+D)\Rightarrow 8+D=4-D\Rightarrow D=-2 \end{cases}$$

Así, el plano buscado es:

$$\boxed{\pi\equiv 3x-y+z-2=0}$$

6. Sea π el plano que corta a los tres ejes de coordenadas en los puntos situados a distancia 3 del origen.

a) Determina su ecuación.

b) Halla las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por los puntos $A(0,0,3)$ y $B\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},0\right)$, y estudia su posición relativa respecto de π.

c) Calcula la distancia de la recta r a la recta $s\equiv\frac{x-1}{-3}=\frac{y}{3}=z$, estudiando previamente su posición relativa.

<u>Solución:</u>

a) Los puntos en los que plano corta a los ejes de coordenadas son $P_1(3,0,0)$, $P_2(0,3,0)$ y $P_3(0,0,3)$

El plano está determinado por: $\pi\equiv\left\{P_1,\overrightarrow{P_1P_2},\overrightarrow{P_1P_3}\right\}$

Calculamos los vectores:

$$\overrightarrow{P_1P_2}=(0,3,0)-(3,0,0)=(-3,3,0)$$
$$\overrightarrow{P_1P_3}=(0,0,3)-(3,0,0)=(-3,0,3)$$

La ecuación implícita del plano es:

$$\pi\equiv\det\begin{pmatrix} x-3 & -3 & -3 \\ y & 3 & 0 \\ z & 0 & 3 \end{pmatrix}=0\Rightarrow \boxed{\pi\equiv x+y+z-3=0}$$

b) La recta está determinada por: $r\equiv\left\{A,\overrightarrow{AB}\right\}$, donde $\overrightarrow{AB}=\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},0\right)-(0,0,3)=\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},-3\right)$

Por tanto:

$$\boxed{r\equiv\begin{cases} x=\frac{3}{2}\lambda \\ y=\frac{3}{2}\lambda \qquad \text{con } \lambda\in\mathbb{R} \\ z=3-3\lambda \end{cases}}$$

Como A y B pertenecen al plano π, se tiene que $\boxed{r\subset\pi}$.

Otra forma de ver la posición relativa es:

¿$\overrightarrow{u_r}\perp\overrightarrow{n_\pi}$?

$$\left.\begin{array}{r}\overrightarrow{u_r}\perp\overrightarrow{n_\pi}\Rightarrow\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{n_\pi}=0\Rightarrow\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},-3\right)\cdot(1,1,1)=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}-3=0\Rightarrow\overrightarrow{u_r}\perp\overrightarrow{n_\pi}\\ A(0,0,3)\in r\text{ y }A(0,0,3)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow r\subset\pi$$

c) Estudiamos la posición relativa de r y s:

$$\left.\begin{array}{l}M=\left(\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}\right)=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&-3\\ \frac{3}{2}&3\\ -3&1\end{pmatrix}\text{ y }\begin{vmatrix}\frac{3}{2}&-3\\ \frac{3}{2}&3\end{vmatrix}\neq0\Rightarrow\text{rango}M=2\\ \widetilde{M}=\left(\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s},\overrightarrow{P_rP_s}\right)=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&-3&1\\ \frac{3}{2}&3&0\\ -3&1&-3\end{pmatrix}\text{ y }\det\widetilde{M}=-\frac{33}{2}\neq0\Rightarrow\text{rango}\widetilde{M}=3\end{array}\right\}\Rightarrow r\text{ y }s\text{ se cruzan}$$

donde $\overrightarrow{P_rP_s}=(1,0,0)-(0,0,3)=(1,0,-3)$

Calculamos ahora la distancia con la fórmula: $d(r,s)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s},\overrightarrow{P_rP_s}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}\right|}$

$$\left.\begin{array}{l}\left[\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s},\overrightarrow{P_rP_s}\right]=\det\widetilde{M}=-\frac{33}{2}\\ \overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}=\det\begin{pmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \frac{3}{2}&\frac{3}{2}&-3\\ -3&3&1\end{pmatrix}=\left(\frac{21}{2},\frac{15}{2},9\right)\end{array}\right\}\Rightarrow d(r,s)=\frac{\left|-\frac{33}{2}\right|}{\sqrt{\left(\frac{21}{2}\right)^2+\left(\frac{15}{2}\right)^2+9^2}}=\boxed{\frac{\sqrt{110}}{10}\text{ u}}$$

7. Dados los planos $\pi\equiv mx+y.2z+3=0$ y $\pi'\equiv mx-3my-z+1=0$, halla los valores de $m\in\mathbb{R}$ para que dichos planos sean perpendiculares.

Solución:

Sabemos que $\pi\perp\pi'\Leftrightarrow\overrightarrow{n_\pi}\perp\overrightarrow{n_{\pi'}}\Leftrightarrow\overrightarrow{n_\pi}\cdot\overrightarrow{n_{\pi'}}=0$

Calculamos el producto escalar:

$$\overrightarrow{n_\pi}\cdot\overrightarrow{n_{\pi'}}=0\Rightarrow(m,1,-2)\cdot(m,-3m,-1)=0\Rightarrow m^2-3m+2=0\Rightarrow\boxed{m=\begin{cases}1\\2\end{cases}}$$

8. Estudia la posición relativa de la recta $r\equiv\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z+2}{3}$ y el plano $\pi\equiv x+5y+z-2=0.$

Solución: (también se puede estudiar con rangos)

Se pueden presentar las siguientes ***posiciones relativas***:

- $\overrightarrow{u_r} \not\perp \vec{n} \Leftrightarrow r$ y π se cortan en un punto
- $\overrightarrow{u_r} \perp \vec{n}$ $\begin{cases} P_r \in \pi \Rightarrow r \subset \pi \text{ (} r \text{ contenida en } \pi\text{)} \\ P_r \notin \pi \Rightarrow r \parallel \pi \text{ (} r \text{ y } \pi \text{ paralelos)} \end{cases}$

Se tiene que:

$$\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{n_\pi} = (2,-1,3)\cdot(1,5,1) = 2\cdot 1 + (-1)\cdot 5 + 3\cdot 1 = 0$$

y, por tanto,

$$\boxed{r \parallel \pi}$$

9. Halla el valor del parámetro $m \in \mathbb{R}$ para que la recta $r \equiv \frac{x-2}{4} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-4}$ y el plano $\pi \equiv 2x + my - 2z - 1 = 0$ sean perpendiculares.

Solución:

Sabemos que $r \perp \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{u_r} \parallel \overrightarrow{n_\pi} \Leftrightarrow \frac{u_1}{A} = \frac{u_2}{B} = \frac{u_3}{C}$, donde $\overrightarrow{u_r} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\overrightarrow{n_\pi} = (A, B, C)$.

Así, como $\overrightarrow{u_r} = (4,-1,-4)$ y $\overrightarrow{n_\pi} = (2, m, -2)$, se tiene que:

$$\frac{4}{2} = \frac{-1}{m} = \frac{-4}{-2} \Rightarrow 2 = \frac{-1}{m} = 2 \Rightarrow \boxed{m = -\frac{1}{2}}$$

10. Dados la recta $r \equiv (x,y,z) = (1,2,1) + \lambda(1,0,0)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, y el plano $\pi \equiv mx - my + nz - 1 = 0$, halla el valor de los parámetros m y n (positivos) para que, r y π formen un ángulo de 30º, si el vector normal a π es unitario (tiene módulo 1).

Solución:

El vector normal a π es: $\overrightarrow{n_\pi} = (m, -m, 1)$

Como dicho vector es unitario, se tiene que: $\left|\overrightarrow{n_\pi}\right| = 1 \Rightarrow \sqrt{m^2 + (-m)^2 + n^2} = 1 \Rightarrow 2m^2 + n^2 = 1 \quad [1]$

Por otra parte, $\sphericalangle\{r, \pi\} = 30º \Rightarrow \operatorname{sen} 30º = \frac{\left|\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{n_\pi}\right|}{\left|\overrightarrow{u_r}\right|\left|\overrightarrow{n_\pi}\right|}$

Cálculos:

$$\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{n_\pi} = (1,0,0)\cdot(m,-m,n) = m$$

$$\left|\overrightarrow{u_r}\right| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1$$

Así,

$$\operatorname{sen} 30º = \frac{\left|\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{n_\pi}\right|}{\left|\overrightarrow{u_r}\right|\left|\overrightarrow{n_\pi}\right|} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{|m|}{1\cdot 1} \Rightarrow m = \frac{1}{2} \qquad [2]$$

Resolvemos el sistema [1]. [2]:

$$\left.\begin{array}{l} 2m^2+n^2=1 \\ m=\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{(m,n)=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

11. Calcula $d(O,r)$, donde O es el origen de coordenadas y $r\equiv\begin{cases} x+y-4=0 \\ 2x-y-z=0 \end{cases}$.

Solución:

La distancia que nos piden viene dada por: $d(O,r)=\dfrac{\left|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{OP}\right|}{\left|\overrightarrow{u_r}\right|}$, donde $P\in r$.

Vector director de la recta:

$$\overrightarrow{u_r}=\det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}=(-1,1,-3)$$

Punto de r:

$$x=0\Rightarrow\begin{cases} y-4=0 \\ -y-z=0 \end{cases}\Rightarrow(y,z)=(4,-4)\Rightarrow P(0,4,-4)$$

Producto vectorial: $\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{OP}=(-1,1,-3)\times(0,4,-4)=\det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}=(8,4,4)$

Así:

$$d(O,r)=\frac{\left|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{OP}\right|}{\left|\overrightarrow{u_r}\right|}=\frac{|(8,4,4)|}{|(-1,1,-3)|}=\frac{\sqrt{8^2+4^2+4^2}}{\sqrt{(-1)^2+1^2+(-3)^2}}=\boxed{\frac{4\sqrt{66}}{11}\text{ u}}$$

12. Determina la ecuación de la recta r que pasa por el punto $A(2,1,-1)$, es paralela a $\pi\equiv 2x+y-z-2=0$ y es perpendicular a $s\equiv\begin{cases} x=2-\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=1-4\lambda \end{cases}$ con $\lambda\in\mathbb{R}$.

Solución:

La recta está determinada por: $r\equiv\left\{P_r,\overrightarrow{u_r}\right\}$, donde $P_r=A(2,1,-1)$ y:

$$r\parallel\pi\Rightarrow\overrightarrow{u_r}\perp\overrightarrow{n_\pi}\Rightarrow\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{n_\pi}=0$$

$$r\perp s\Rightarrow\overrightarrow{u_r}\perp\overrightarrow{u_s}\Rightarrow\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{n_s}=0$$

Sean $\overrightarrow{u_r}=(u_1,u_2,u_3)$, $\overrightarrow{n_\pi}=(2,1,-1)$ y $\overrightarrow{u_s}=(-1,1,-4)$, y calculemos los productos escales anteriores:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{n_\pi}=0\Rightarrow(u_1,u_2,u_3)\cdot(2,1,-1)=0\Rightarrow 2u_1+u_2-u_3=0 \\ \overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{n_s}=0\Rightarrow(u_1,u_2,u_3)\cdot(-1,1,-4)=0\Rightarrow -u_1+u_2-4u_3=0 \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(\text{S.C.I.})\ (u_1,u_2,u_3)=(-\mu,3\mu,\mu)\text{ con }\mu\in\mathbb{R}$$

Tomando $\mu = 1$, resulta $(u_1, u_2, u_3) = (-1,3,1)$ y, como consecuencia:

$$\boxed{r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+1}{1}}$$

Nota: hay infinitas rectas que cumplen lo que se pide.

13. Calcula un punto que equidiste de los planos $\pi \equiv 3x - 4z + 1 = 0$ y $\pi' \equiv 4x + 3y - 12 = 0$, y esté sobre la recta $r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{1}$.

Solución:
Pasamos la recta a paramétricas

$$r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{1} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 1 + 3\lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$

Así, un punto genérico de la recta r es $P_r(2-\lambda, 1+3\lambda -1+\lambda)$. Tenemos que determinar λ.

$$d(P_r, \pi) = d(P_r, \pi') \Rightarrow \frac{|3(2-\lambda) - 4(-1+\lambda) + 1|}{\sqrt{3^2 + 0^2 + (-4)^2}} = \frac{|4(2-\lambda) + 3(1+3\lambda) - 12|}{\sqrt{4^2 + 3^2 + 0^2}} \Rightarrow$$

Como $\Rightarrow |3(2-\lambda) - 4(-1+\lambda) + 1| = |4(2-\lambda) + 3(1+3\lambda) - 12| \Rightarrow |11 - 7\lambda| = |-1 + 5\lambda| \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 11 - 7\lambda = -1 + 5\lambda \Rightarrow \lambda = 1 \\ 11 - 7\lambda = -(-1 + 5\lambda) \Rightarrow \lambda = 5 \end{cases}$$

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones paramétricas de la recta, obtenemos dos puntos que cumplen lo que se pide:

$$\boxed{\begin{array}{c} \lambda = 1 \Rightarrow P_1(1,4,0) \\ \lambda = 5 \Rightarrow P_2(-3,16,4) \end{array}}$$

14. Calcula la distancia de los planos que distan $\sqrt{14}$ del plano $\pi \equiv x - 3y + 2z + 9 = 0$.

Solución:
Los planos que nos pide el ejercicio tienen que ser paralelos al plano π y, por tanto, solo se van a diferenciar de éste en el término independiente.
Como

$$d(P, \pi) = \frac{|0 - 3 \cdot 3 + 0 + D'|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2 + 2^2}} = \frac{|-9 + D'|}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}$$

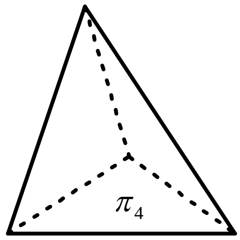
resulta que:

$$|-9 + D'| = 14 \Rightarrow \begin{cases} -9 + D' = 14 \Rightarrow D' = 23 \\ -9 + D' = -14 \Rightarrow D' = -5 \end{cases}$$

Así, los planos que distan $\sqrt{14}$ de π son:

$$\boxed{\begin{array}{l} \alpha \equiv x - 3y + 2z + 23 = 0 \\ \beta \equiv x - 3y + 2z - 5 = 0 \end{array}}$$

15. Determinar las ecuaciones de las rectas obtenidas al cortar cada uno de los planos $\pi_1 \equiv x+y+z=3$, $\pi_2 \equiv x-z=0$ y $\pi_3 \equiv y-z=0$, con el plano $\pi_4 \equiv z=0$. Esos cuatro planos limitan un tetraedro del que hay que calcular el área de la cara situada en el plano π_4 y la altura sobre esa cara, para calcular el volumen de dicho tetraedro.



Solución:

Calculamos las rectas pedidas:

$$\pi_1 \cap \pi_4 = r_1 \equiv \begin{cases} x+y+z=3 \\ z=0 \end{cases} \equiv \begin{cases} x=3-\lambda \\ y=\lambda \\ z=0 \end{cases} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\pi_2 \cap \pi_4 = r_2 \equiv \begin{cases} x-z=0 \\ z=0 \end{cases} \equiv \begin{cases} x=0 \\ y=\mu \\ z=0 \end{cases} \text{ con } \mu \in \mathbb{R}$$

$$\pi_3 \cap \pi_4 = r_3 \equiv \begin{cases} y-z=0 \\ z=0 \end{cases} \equiv \begin{cases} x=\gamma \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \text{ con } \gamma \in \mathbb{R}$$

La base del tetraedro es un triángulo cuyos vértices son los puntos de intersección de estas rectas:

$$A = r_1 \cap r_2 \equiv \begin{cases} x+y+z=3 \\ z=0 \\ x-z=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow A(0,3,0)$$

$$B = r_1 \cap r_3 \equiv \begin{cases} x+y+z=3 \\ z=0 \\ y-z=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow B(3,0,0)$$

$$C = r_2 \cap r_3 \equiv \begin{cases} x-z=0 \\ z=0 \\ y-z=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow C(0,0,0)$$

El área de la base, que es el área del triángulo ABC es:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\det\begin{pmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -3 & 0\\ 0 & -3 & 0\end{pmatrix}=(0,0,-9)\Rightarrow\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=9$$

$$\text{Área}_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\cdot 9=\boxed{\frac{9}{2}\ \text{u}^2}$$

El vértice del tetraedro es el punto de intersección de los tres primeros planos:

$$D\equiv\begin{cases}x+y+z=3\\ x-z=0\\ y-z=0\end{cases}\Rightarrow D(1,1,1)$$

Calculamos la altura (de la base al vértice):

$$h=d(D,\pi_4)=\frac{|1|}{\sqrt{1}}=1\ \text{u}$$

El volumen del tetraedro (pirámide) es:

$$\text{Volumen}_{\text{Tetraedro}}=\frac{1}{3}\text{Área}_{\text{Base}}\cdot h=\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{2}\cdot 1=\frac{9}{6}=\boxed{\frac{3}{2}\ \text{u}^3}$$

El volumen del tetraedro usando la fórmula es:

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(3,-3,0)\\ \overrightarrow{AC}=(0,-3,0)\\ \overrightarrow{AD}=(1,-2,1)\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]=\det\begin{pmatrix}3 & -3 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}=-9$$

$$\text{Volumen}_{\text{Tetraedro}}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]\right|=\frac{9}{6}=\boxed{\frac{3}{2}\ \text{u}^3}$$

16. Encuentra los puntos de la recta $r\equiv\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-2}{2}$ que equidistan de los planos $\alpha\equiv x+y-z+1=0$ y $\beta\equiv x-y+z+2=0$.

Solución:

Pasamos la recta a paramétricas:

$$r\equiv\frac{x+1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-2}{2}\equiv\begin{cases}x=-1+2\lambda\\ y=-3\lambda\\ z=2+2\lambda\end{cases}\text{con }\lambda\in\mathbb{R}$$

Un punto genérico de la recta es: $P(-1+2\lambda,-3\lambda,2+2\lambda)$

La condición que hay que imponer para que los puntos de la recta equidisten de los planos es:

$$d(P,\alpha)=d(P,\beta)\Rightarrow\frac{|-1+2\lambda-3\lambda-2-2\lambda+1|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{|-1+2\lambda+3\lambda+2+2\lambda+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow|-1+2\lambda-3\lambda-2-2\lambda+1|=|-1+2\lambda+3\lambda+2+2\lambda+2|\Rightarrow|-3\lambda+2|=|7\lambda+3|\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3\lambda+2=7\lambda+3 \Rightarrow \lambda=-\dfrac{1}{2} \\ -3\lambda+2=-7\lambda-3 \Rightarrow \lambda=-\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Así, los puntos que equidistan de los planos son: $\boxed{P_1\left(-2,\frac{3}{2},1\right) \text{ y } P_2\left(-\frac{3}{2},\frac{3}{4},\frac{3}{2}\right)}$

17. Halla el punto simétrico de $P(1,0,2)$ respecto de la recta $r \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=2\lambda \end{cases}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

Solución:

i) Plano perpendicular a r que pasa por P

$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv \left\{P, \overrightarrow{n_\pi}=\overrightarrow{u_r}\right\} \equiv Ax+By+Cz+D=0 \\ \overrightarrow{n_\pi}=\overrightarrow{u_r}=(2,1,2) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+y+2z+D=0 \\ P(1,0,2)\in\pi \end{array}\right\} \Rightarrow D=-6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi \equiv 2x+y+2z-6=0$$

ii) Punto de intersección de la recta y del plano:

$$2(1+2\lambda)+(2+\lambda)+2\cdot 2\lambda-6=0 \Rightarrow \lambda=\frac{2}{9} \Rightarrow M\left(\frac{13}{9},\frac{20}{9},\frac{4}{9}\right)$$

iii) Simétrico: $P'(p'_1,p'_2,p'_3)$

$$\left(\frac{13}{9},\frac{20}{9},\frac{4}{3}\right)=\left(\frac{1+p'_1}{2},\frac{0+p'_2}{2},\frac{2+p'_3}{2}\right) \Rightarrow (p'_1,p'_2,p'_3)=\left(\frac{17}{9},\frac{40}{9},-\frac{10}{9}\right)$$

$$P'\left(\frac{17}{9},\frac{40}{9},-\frac{10}{9}\right)$$

18. Halla la recta secante perpendicular común a las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=-1+\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \text{con } \lambda\in\mathbb{R} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x=1+\mu \\ y=2 \\ z=\mu \end{cases} \text{con } \mu\in\mathbb{R}$$

Solución:

i) Vector perpendicular a las dos rectas:

$$\vec{w}=\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}=\det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}=(1,-1,-1)$$

ii) Plano $\alpha \equiv \left\{P_r, \overrightarrow{u_r}, \vec{w}\right\}$:

$$\alpha \equiv \det\begin{pmatrix} x-1 & 2 & 1 \\ y+1 & 1 & -1 \\ z & 1 & -1 \end{pmatrix}=0 \Rightarrow \alpha \equiv y-z+1=0$$

iii) Plano $\beta \equiv \left\{P_s, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{w}\right\}$:

$$\beta \equiv \det\begin{pmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ y-2 & 0 & -1 \\ z & 1 & -1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \beta \equiv x+2y-z-5=0$$

iv) La recta perpendicular común está determinada como intersección de los dos planos anteriores (que son secantes)

$$\boxed{t \equiv \begin{cases} y-z+1=0 \\ x+2y-z-5=0 \end{cases}}$$