Ejercicios resueltos de Geometría Afín Euclídea

1. Dados los planos $\alpha \equiv -x+2y+z+2=0$ y $\beta \equiv -2y+z=0$, encuentra razonadamente la ecuación general o implícita de la recta paralela a los planos α y β que pase por el punto $P(0,-1,3)$, sabiendo que α y β son secantes.

Solución:

La recta está determinada por el vector director de la recta $r \equiv \begin{cases} \alpha \equiv -x+2y+z+2=0 \\ \beta \equiv -2y+z=0 \end{cases}$ y el punto $P(0,-1,3)$.

El vector director de la recta r es:

$$\overrightarrow{u_r} = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 4\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}=(4,1,2)$$

Por tanto, la ecuación continua de la recta pedida es:

$$s \equiv \frac{x}{4}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-3}{2}$$

y, como consecuencia, la ecuación general o implícita es:

$$s \equiv \begin{cases} \dfrac{x}{4}=\dfrac{y-1}{1} \\ \dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-3}{2} \end{cases} \rightarrow s \equiv \begin{cases} x-4y-4=0 \\ 2y-z+5=0 \end{cases}$$

2. Dado el punto $P(2,0,-1)$ y las rectas

$$r \equiv \frac{x-2}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{0} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x-y+2z+4=0 \\ x+z+1=0 \end{cases}$$

Encuentra razonadamente la ecuación general del plano que pasando por P es paralelo a r y s.

Solución:

El plano está determinado por el punto P y por los vectores directores de las rectas:

$$\pi \equiv \left\{P,\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}\right\}$$

La ecuación general del plano es:

$$\pi \equiv \det\begin{pmatrix} x-2 & -1 & -1 \\ y & 2 & 1 \\ z+1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 2(x-2)-(z+1)+2(z+1)+y=0 \Rightarrow \pi \equiv 2x+y+z-3=0$$

«De otra forma»:

El plano está determinado por P y por el vector normal $\vec{n}=\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}$.

El vector normal es:

$$\vec{n} = \vec{u_r} \times \vec{u_s} = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2\vec{i} - \vec{k} + 2\vec{k} + \vec{j} = (2,1,1)$$

Por tanto, el plano es de la forma $\pi \equiv 2x + y + z + D = 0$.

Imponiendo que $P(2,0,-1) \in \pi$:

$$2 \cdot 2 + 0 - 1 + D = 0 \Rightarrow D = -3$$

Así, la ecuación del plano es: $\pi \equiv 2x + y + z - 3 = 0$.

3. Dada la recta $r \equiv \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x - z = 1 \end{cases}$, da la ecuación implícita del plano π perpendicular a r que pasa por el punto $P(2,1,1)$.

Solución:

El plano π tiene como vector normal, el vector director de la recta, y contiene al punto P.

$$\vec{n_\pi} = \vec{u_r} = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (1,3,1)$$

Así, la ecuación normal del plano es:

$$\vec{n_\pi} \cdot \vec{PX} = 0 \text{ donde } X \text{ es un punto genérico del plano}$$

$$(1,3,1) \cdot (x-2, y-1, z-1) = 0 \Rightarrow x - 2 + 3y - 3 + z - 1 = 0 \Rightarrow \pi \equiv x + 3y + z - 6 = 0$$

4. Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ -x + y - 3z = 2 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x + y = 0 \\ 3x + 2y + z = -1 \end{cases}$, da la ecuación implícita de un plano π que contenga a r y s.

Solución:

El plano π está determinado por P (punto de intersección de r y s) y por los vectores directores de las rectas.

$$\pi \equiv \left\{ P, \vec{u_r}, \vec{u_s} \right\}$$

Calculamos el punto de intersección de r y s:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ -x + y - 3z = 2 \\ x + y = 0 \rightarrow x = -y \\ 3x + 2y + z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y + 2y - z = 1 \\ y + y - 3z = 2 \\ -3y + 2y + z = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y - z = 1 & [1] \\ 2y - 3z = 2 & [2] \\ -y + z = -1 & [3] \end{cases}$$

De $-2 \cdot [1] + [2]$: $-z = 0 \Rightarrow z = 0$

Sustituyendo en [1]: $y = 1 + z \Rightarrow y = 1$

Como $x + 2y - z = 1 \Rightarrow x = 1 - 2 \cdot 1 = -1$

Por tanto, el punto de corte es $P(-1,1,0)$ y el plano pedido es:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x+1 & -5 & -1 \\ y-1 & 4 & 1 \\ z & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4(x+1)-3(y-1)-5z+4z-3(x+1)+5(y-1)=0 \Rightarrow \pi \equiv x+2y-z-1=0$$

5. Dados el plano $\pi \equiv x-y=4$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x+z=1 \\ 2x+y+z=0 \end{cases}$, da la ecuación implícita de un plano π' que contenga a r y corte perpendicularmente a π.

Solución:
El plano π' está determinado por $R \in r$, por el vector director de la recta r y por el vector normal del plano:

$$\pi' \equiv \begin{cases} R \in r \Rightarrow R(0,-1,1) \\ \overrightarrow{u_r} = (1,-1,1) \\ \overrightarrow{n_\pi} = (1,-1,0) \end{cases}$$

Así:

$$\pi' \equiv \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y+1 & -1 & -1 \\ z-1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -(y+1)-(z-1)+(z-1)-x=0 \Rightarrow \pi' \equiv x+y+1=0$$

6. Sea $r \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=3-\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ una recta contenida en el plano $\pi \equiv x+2y+z=7$. Obtén la ecuación implícita de un plano π' que corte perpendicularmente a π, de modo que la intersección de ambos planos sea r.

Solución:
El plano π' es aquel que, perteneciendo al haz de planos generados por la recta, tenga vector normal perpendicular al plano π.

Hallamos las ecuaciones implícitas de la recta:

$$r \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=3-\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-1} = z \Rightarrow \begin{cases} x-1=z \\ y-3=-z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-z-1=0 \\ y+z-3=0 \end{cases}$$

La ecuación del haz de rectas es: $x-z-1+\alpha(y+z-3)=0$

Como consecuencia la ecuación del haz de planos es (efectuando operaciones):

$$\pi_{H_r} \equiv x+\alpha y+(\alpha-1)z-1-3\alpha=0$$

Los vectores normales de π y de π_{H_r} son:

$$\overrightarrow{n_\pi} = (1,2,1)$$
$$\overrightarrow{n_{H_r}} = (1,\alpha,\alpha-1)$$

y como tienen que ser perpendiculares: $\overrightarrow{n_\pi} \cdot \overrightarrow{n_{H_r}} = 0 \Rightarrow (1,2,1)\cdot(1,\alpha,\alpha-1)=0 \Rightarrow \alpha=0$

Sustituyendo en la ecuación de π_{H_r} obtenemos la ecuación del plano pedido:

$$\pi' \equiv x - z - 1 = 0$$

7. Dados los planos $\pi_1 \equiv x - 2y - z = 0$ y $\pi_2 \equiv 2x - y + \lambda z = 4$, obtén unas ecuaciones paramétricas de la recta r paralela a π_1 y a π_2 que pasa por el punto $P(1,2,3)$.

Solución:

La recta que nos piden está determinada por $P(1,2,3)$ y el vector $\overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{n_{\pi_1}} \times \overrightarrow{n_{\pi_2}}$.

Calculamos el vector director de la recta:

$$\overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{n_{\pi_1}} \times \overrightarrow{n_{\pi_2}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 8\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k} + 4\vec{k} + \vec{i} + 4\vec{j} = 9\vec{i} + 6\vec{j} + 3\vec{k} = (9,6,3)$$

Por tanto, las ecuaciones paramétricas de la recta pedida son:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 9\mu \\ y = 2 + 6\mu \quad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \\ z = 3 + 3\mu \end{cases}$$

8. Dados el plano $\pi \equiv y - z = 3$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$, da unas ecuaciones paramétricas de la recta s paralela a π que corta a r perpendicularmente en el punto $P(0,1,-1)$.

Solución:

La recta que nos piden está determinada por $P(0,1,-1)$ y el vector $\overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{n_\pi} \times \overrightarrow{u_r}$.

Calculamos el vector director de la recta:

$$\overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{n_\pi} \times \overrightarrow{n_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k} = (2,-2,-2)$$

Por tanto, las ecuaciones paramétricas de la recta pedida son:

$$s \equiv \begin{cases} x = 9\mu \\ y = 1 - 2\mu \quad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \\ z = -1 - 2\mu \end{cases}$$

9. Dados los planos $\alpha \equiv -x + 2y + z + 2 = 0$ y $\beta \equiv -2y + z = 0$, encuentra razonadamente la ecuación general o implícita de la recta paralela a los planos α y β que pase por el punto $P(0,-1,3)$.

Solución:

La recta que nos piden está determinada por $P(0,-1,3)$ y el vector $\overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{n_\alpha} \times \overrightarrow{u_\beta}$.

Calculamos el vector director de la recta:

$$\overrightarrow{u_r}=\overrightarrow{n_\alpha}\times\overrightarrow{n_\beta}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 2 & 1\\ 0 & -2 & 1\end{vmatrix}=2\vec{i}+2\vec{k}+2\vec{i}+\vec{j}=(4,1,2)$$

Por tanto, la ecuación continua de la recta pedida es:

$$r\equiv\frac{x}{4}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{2}$$

y sus ecuaciones generales o implícitas:

$$r\equiv\begin{cases}x-4y-4=0\\ 2y-z+5=0\end{cases}$$

10. Dado el punto $P(2,0,-1)$ y las rectas $r\equiv\frac{x-2}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{0}$ y $s\equiv\begin{cases}x-y+2z+4=0\\ x+z+1=0\end{cases}$, encuentra razonadamente la ecuación general del plano que pasando por P es paralelo a r y a s.

Solución:

El plano que nos piden está determinado por $P(2,0,-1)$ y el vector $\overrightarrow{n_\pi}=\overrightarrow{n_r}\times\overrightarrow{u_s}$ (como vector normal).

Calculamos el vector normal: $\overrightarrow{n_\pi}=\overrightarrow{n_r}\times\overrightarrow{u_s}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 2 & 0\\ -1 & 1 & 1\end{vmatrix}=2\vec{i}-\vec{k}+2\vec{k}+\vec{j}=(2,1,1)$

Así, la ecuación normal del plano pedido es:

$$(x-2,y-0,z+1)\cdot(2,1,1)=0\Rightarrow 2(x-2)+y+z+1=0\Rightarrow\pi\equiv 2x+y+z-3=0$$

"De otra forma":

El plano que nos piden está determinado por $P(2,0,-1)$ y los vectores $\overrightarrow{u_r}=(-1,2,0)$ y $\overrightarrow{u_s}=(-1,1,1)$.

La ecuación del plano pedido es:

$$\pi\equiv\begin{vmatrix}x-2 & -1 & -1\\ y & 2 & 1\\ z+1 & 0 & 1\end{vmatrix}=0\Rightarrow 2(x-2)-(z+1)+2(z+1)+y=0\Rightarrow\pi\equiv 2x+y+z-3=0$$

11. Determina, razonadamente, el plano π perpendicular a $r\equiv\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-1}{1}$ que pasa por $P(3,1,-2)$.

Solución:

El plano está determinado por: $\pi\equiv\left\{P,\overrightarrow{n_\pi}=\overrightarrow{u_r}\right\}$ donde $\overrightarrow{n_\pi}=(2,-2,1)$

$$\left.\begin{array}{r}\pi\equiv Ax+By+Cz+D=0\Rightarrow 2x-2y+z+D=0\\ P(3,1,-2)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow 2\cdot3-2\cdot1-2+D=0\Rightarrow D=-2$$

La ecuación del plano es:

$$\boxed{\pi \equiv 2x-2y+z-2=0}$$

¡Cuidado! En este caso, el plano no está determinado por: $\pi \equiv \left\{P, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{PP_r}\right\}$

$\overrightarrow{PP_r} = (2,-1,1)-(3,1,-2)=(-1,-2,3)$

$$\pi \equiv \left\{P, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{PP_r}\right\} \equiv \det\begin{pmatrix} x-3 & 2 & -1 \\ y-1 & -2 & -2 \\ z+2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \pi \equiv -4x-7y-6z+7=0$$

Ahora bien:

$$P \in \pi \Rightarrow -4\cdot 3-7\cdot 1-6\cdot(-2)+7=0 \text{ (verdadera)}$$

$$r \perp \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{u_r} \parallel \overrightarrow{n_\pi} \Leftrightarrow \frac{2}{-4}=\frac{2}{-7}=\frac{-1}{-6} \text{ (falsa)}$$