

Ejercicios de Geometría Afín Euclídea

1. Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de intersección del plano $\pi \equiv x - y + 3z = -3$ con los ejes de coordenadas.

2. Calcula la ecuación del plano que pasa por el punto $P(1, 2, -3)$ y es perpendicular a la recta:

$$r \equiv \begin{cases} 2x + y + 2 = 0 \\ 3x - z + 1 = 0 \end{cases}$$

3. Calcula x para que el volumen del tetraedro determinado por los vectores $\vec{u} = (3, -3, 1)$, $\vec{v} = (2, 1, 2)$ y $\vec{w} = (1, 5, x)$ sea igual a 30 unidades de volumen. Halla el área de la cara determinada por \vec{u} y \vec{v} .

4. Dados los planos de ecuaciones $\pi \equiv x + 2y - z + 4 = 0$, $\pi' \equiv 2x + y + Cz - 3 = 0$ ¿para qué valores de C el ángulo formado por π y π' es de 60° ?

5. Dados el plano $\pi \equiv x - y = 4$ y la recta

$$r \equiv \begin{cases} x + z = 1 \\ 2x + y + az = 0 \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}$$

se pide:

- Estudia si existe algún valor del parámetro a para el que r y π sean paralelos.
- Para $a = 1$, da la ecuación implícita de un plano π' que contenga a r y corte perpendicularmente a π .

6. a) Estudia la posición relativa de las rectas

$$r \equiv x = -y = z \quad \text{y} \quad s \equiv x = y = z - 2$$

b) Calcula la distancia entre r y s .

1.- Los puntos de intersección con los ejes son:

$$\text{Eje OX: } y = z = 0 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow A(-3, 0, 0)$$

$$\text{Eje OY: } x = z = 0 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow B(0, 3, 0)$$

$$\text{Eje OZ: } x = y = 0 \Rightarrow z = -1 \Rightarrow C(0, 0, -1)$$

Área:

$$S = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{AB} = (3, 3, 0) \\ \vec{AC} = (3, 0, -1) \end{array} \right\} \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -3\vec{i} + 3\vec{j} - 9\vec{k} = (-3, 3, -9)$$

$$S = \frac{1}{2} |(-3, 3, -9)| = \frac{1}{2} \sqrt{(-3)^2 + 3^2 + (-9)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{99} u^2 = \boxed{\frac{3\sqrt{11}}{2} u^2}$$

2.- $P(1, 2, -3)$, $\Gamma \equiv \begin{cases} 2x + y + z = 0 \rightarrow \vec{n}_{\pi_1} = (2, 1, 0) \\ 3x - z + 1 = 0 \rightarrow \vec{n}_{\pi_2} = (3, 0, -1) \end{cases}$

$$\text{Como } \pi \perp \Gamma \Rightarrow \vec{n}_{\pi} = \vec{u}_{\Gamma} = \vec{n}_{\pi_1} \times \vec{n}_{\pi_2} =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1, 2, -3)$$

Ecuación normal del plano:

$$(-1, 2, -3) \cdot [(x, y, z) - (1, 2, -3)] = 0$$

$$(-1, 2, -3) \cdot (x-1, y-2, z+3) = 0 \Rightarrow -x+1+2y-4-3z-9=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi \equiv -x + 2y - 3z - 12 = 0}$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = (3, -3, 1) \\ \vec{v} = (2, 1, 2) \\ \vec{w} = (1, 5, x) \end{array} \right\} \text{a) } V_{\text{tetraedro}} = \frac{1}{6} |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = 30 u^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & x \end{vmatrix} = 30 \Leftrightarrow \frac{1}{6} |9x - 27| = 30 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 30 \cdot 6 = |9x - 27| \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{207}{9} = 23} \wedge \boxed{x = \frac{153}{-9} = -17}$$

$$\text{b) } A_{\text{triángulo}} = \frac{1}{2} |\vec{u} \times \vec{v}|$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -6\vec{i} + 3\vec{k} + 2\vec{j} + 6\vec{k} - \vec{i} - 6\vec{j} = (-7, -4, 9)$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{(-7)^2 + (-4)^2 + 9^2} = \sqrt{146} \Rightarrow A_{\text{cara}} = \boxed{\frac{1}{2} \sqrt{146} u^2}$$

$$\textcircled{4.} \quad \pi \equiv x + 2y - z + 4 = 0 \rightarrow \vec{n}_\pi = (1, 2, -1)$$

$$\pi' \equiv 2x + y + Cz - 3 = 0 \rightarrow \vec{n}_{\pi'} = (2, 1, C)$$

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_\pi \cdot \vec{n}_{\pi'}|}{|\vec{n}_\pi| |\vec{n}_{\pi'}|} \Rightarrow \cos 60^\circ = \frac{|(1, 2, -1) \cdot (2, 1, C)|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} \sqrt{2^2 + 1^2 + C^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \pm \frac{2+2-C}{\sqrt{6} \sqrt{5+C^2}} \Rightarrow \sqrt{6} \sqrt{5+C^2} = \pm 2(4-C) \Rightarrow \sqrt{6(5+C^2)} = \pm 2(4-C)$$

$$\Rightarrow 6(5+C^2) = [\pm 2(4-C)]^2 \Rightarrow C^2 + 16C - 17 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = \begin{cases} \frac{-16+18}{2} = 1 \\ \frac{-16-18}{2} = -17 \end{cases}$$

$$\textcircled{5.} \quad \pi \equiv x - y = 4$$

$$r \equiv \begin{cases} x + z = 1 \equiv \pi_1 \\ 2x + y + az = 0 \equiv \pi_2 \end{cases}, a \in \mathbb{R}$$

$$a) r \parallel \pi \Leftrightarrow \vec{u}_r \perp \vec{n}_\pi \Leftrightarrow \vec{u}_r \cdot \vec{n}_\pi = 0$$

$$\cdot \vec{u}_r = \vec{n}_{\pi_1} \times \vec{n}_{\pi_2} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix} = \vec{k} + 2\vec{j} - \vec{i} - a\vec{j} = (-1, 2-a, 1)$$

$$\cdot \vec{u}_r \cdot \vec{n}_\pi = 0 \Rightarrow (-1, 2-a, 1) \cdot (1, -1, 0) = 0 \Rightarrow -1 - 2 + a = 0 \Rightarrow \boxed{a=3}$$

$$b) \pi' \equiv \begin{cases} \vec{u}_r = \text{vector director de } r \\ \vec{u}_\pi = \text{" normal a } \pi \\ \overrightarrow{RP} \text{ donde } R \in r \text{ (cualquiera) y } P(x, y, z) \in \pi \text{ (genérico)} \end{cases}$$

$$R(0, -1, 1)$$

$$\overrightarrow{RP} = (x, y, z) - (0, -1, 1) = (x, y+1, z-1)$$

$$\pi' \equiv \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y+1 & -1 & -1 \\ z-1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -(y+1) - (z-1) + (z-1) - x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi' \equiv x + y + 1 = 0}$$

$$6) \quad \Gamma \equiv x = -y = z \Rightarrow \Gamma \equiv \begin{cases} x = -y \Rightarrow x + y = 0 \\ x = z \Rightarrow x - z = 0 \end{cases}$$

$$S \equiv x = y = z - 2 \Rightarrow S \equiv \begin{cases} x = y \Rightarrow x - y = 0 \\ x = z - 2 \Rightarrow x - z = -2 \end{cases}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Rango de M

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 - 1 \neq 0 \Rightarrow \text{rg } M = 3$$

Rango de \tilde{M}

$$|\tilde{M}| = -2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rg } \tilde{M} = 4$$

\Rightarrow r y s se cruzan

De otra forma

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (1, -1, 1) \\ \vec{u}_s = (1, 1, 1) \\ P_r(0, 0, 0) \in \Gamma, P_s(0, 0, 2), \vec{P}_r \vec{P}_s = (0, 0, 2) \end{array} \right\} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{r y s se cruzan}}}$$

Cipri

$$b) \quad d(r, s) = \left| \frac{\det(\vec{u}_r, \vec{u}_s, \vec{P}_r \vec{P}_s)}{|\vec{u}_r \times \vec{u}_s|} \right|$$

$$\vec{u}_r \times \vec{u}_s = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -2\vec{i} + 2\vec{k} = (-2, 0, 2)$$

$$|\vec{u}_r \times \vec{u}_s| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{8}$$

$$\boxed{d(r, s) = \frac{4}{\sqrt{8}} = \frac{4\sqrt{8}}{8} = \frac{\sqrt{8}}{2} = \sqrt{2} \text{ u}}$$