Ejercicios resueltos de Geometría Afín

1. Discute, según los valores del a, la posición relativa de la recta r de ecuaciones $r \equiv \begin{cases} 2x+2y+(a+1)z=3 \\ -x+y+z=1 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv ax+2y+3z=3$.

2. Para los diferentes valores del parámetro real λ, estudia la posición relativa de los planos dados por:

$$\pi_1 \equiv x+y+z=\lambda-1$$
$$\pi_2 \equiv 2x+y+\lambda z=\lambda$$
$$\pi_3 \equiv x+\lambda y+z=1$$

Si $\lambda=-1$, ¿en qué punto se cortan?

3. Estudia la posición relativa de las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} y-z-3=0 \\ 2x-z+1=0 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} -y+z=0 \\ x-3y+z-1=0 \end{cases}$$

4. Estudia la posición relativa del plano $\pi \equiv 5x+\lambda y-2z+1=0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} 2x-y=1 \\ x-y+2z=-1 \end{cases}$ según los valores del parámetro λ.

5. Sean los planos

$$\pi_1 \equiv 2x+3y+z=2$$
$$\pi_2 \equiv x+y-z=1$$

a) Estudia la posición relativa de los mismos.
b) Calcula una recta que esté contenida en el plano π_2, sea paralela a la intersección de esos dos planos y pase por el punto $P(5,-3,1)$.

6. Escribe la ecuación general del plano que sea paralelo al plano que pasa por los puntos $A(0,1,2)$, $B(-1,2,3)$ y $C(2,-1,4)$. ¿Cuántos planos hay que verifiquen esta condición?

7. Halla la ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas y es paralelo a las rectas:

$$r \equiv \frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+4}{3} \quad \text{y} \quad s \equiv \frac{x}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{3}$$

8. Halla la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $P(1,0,0)$ y corta a las rectas:

$$r_1 \equiv \frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{2} \quad \text{y} \quad r_2 \equiv \begin{cases} x+2y+z-1=0 \\ 2x-y-z-3=0 \end{cases}$$

9. Estudia la posición relativa de los planos

$$\pi \equiv x+y+2z=2 \quad , \quad \alpha \equiv 2x+my+2mz=2+m \quad \text{y} \quad \beta \equiv mx+2y+(2+m)z=0$$

según los valores de m.

Cipri

(1) $r \equiv \begin{cases} 2x+2y+(a+1)z=3 \\ -x+y+z=1 \end{cases} \qquad \pi \equiv ax+2y+3z=3$

$$\left.\begin{array}{l} 2x+2y+(a+1)z=3 \\ -x+y+z=1 \\ ax+2y+3z=3 \end{array}\right\} M=\begin{pmatrix} 2 & 2 & a+1 \\ -1 & 1 & 1 \\ a & 2 & 3 \end{pmatrix}, \tilde{M}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & a+1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ a & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$|M|=\begin{vmatrix} 2 & 2 & a+1 \\ -1 & 1 & 1 \\ a & 2 & 3 \end{vmatrix}=-a^2-a+6=0 \Rightarrow a=\begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}$$

Si $\boxed{a \neq \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}} \Rightarrow rg\, M=3=rg\, \tilde{M}$

$\boxed{a=2}$ $M=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rg\, M=2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{-F_1+F_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow rg\, \tilde{M}=2$$

$\boxed{a=-3}$ $M=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rg\, M=2$

$$\tilde{M}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[2F_2+F_1]{-3F_2+F_3} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rg\, \tilde{M}=3$$

Discusión

Si $a \neq \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases} \Rightarrow rg\, M=3=rg\, \tilde{M} \Rightarrow$ la recta y el plano son secantes en un pto.

Si $a=2 \Rightarrow rg\, M=2=rg\, \tilde{M} \Rightarrow$ la recta está contenida en el plano

Si $a=-3 \Rightarrow rg\, M=2<3=rg\, \tilde{M} \Rightarrow$ la recta y el plano son paralelos

(2) a) $$\left.\begin{array}{l} \pi_1 \equiv x+y+z=\lambda-1 \\ \pi_2 \equiv 2x+y+\lambda z=\lambda \\ \pi_3 \equiv x+\lambda y+z=1 \end{array}\right\} M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \end{pmatrix}, \tilde{M}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \lambda-1 \\ 2 & 1 & \lambda & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \end{vmatrix}=-\lambda^2+3\lambda-2=0 \Rightarrow \lambda=\begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Si } \lambda \neq \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}} \Rightarrow rg\, M=3=rg\, \tilde{M} \Rightarrow$ $\boxed{\text{los 3 planos son secantes en un punto}}$

Si $\boxed{\lambda = 1}$: $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rg\, M = 2$

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-2F_1+F_2]{-F_1+F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow rg\, \tilde{M} = 3$$

Submatrices de orden 2x3 de M:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rg = 2$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-F_1+F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rg = 1$

Dos planos son paralelos y el tercero los corta según dos rectas paralelas.

Si $\boxed{\lambda = 2}$: $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rg\, M = 2$

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-F_1+F_3]{-2F_1+F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2+F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

rango $\tilde{M} = 2$

Submatrices de orden 2x4 de $\tilde{M}$:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rg = 2$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rg = 2$

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rg = 2$

Los tres planos son distintos y se cortan en una recta

b) El punto de corte para $\lambda = -1$ está en la pág. 5.

③ $r \equiv \begin{cases} y - z - 3 = 0 \\ 2x - z + 1 = 0 \end{cases}$ $\quad s \equiv \begin{cases} -y + z = 0 \\ x - 3y + z - 1 = 0 \end{cases}$

$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ y $\tilde{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Rango de M

$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Rightarrow rg\, M = 3$

Rango de $\tilde{M}$

$$|M| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} \underline{\underline{-2F_4+F_2}} \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 6 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot Adj(\tilde{m}_{41}) =$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 6 & -3 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -[-18+3+9-3] = 9 \neq 0 \Rightarrow rg\,\tilde{M} = 4$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Posición relativa} \\ rg\,M = 3 \text{ y } rg\,\tilde{M} = 4 \Rightarrow r \text{ y } s \text{ se cruzan} \end{array}}$$

4) $\left.\begin{array}{l} \pi \equiv 5x + \lambda y - 2z + 1 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - y + 2z = -1 \end{cases} \end{array}\right\} M = \begin{pmatrix} 5 & \lambda & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \tilde{M} = \begin{pmatrix} 5 & \lambda & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

Rango de M

$$|M| = \begin{vmatrix} 5 & \lambda & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -4\lambda - 8 = 0 \Rightarrow \lambda = -2$$

Si $\lambda \neq -2 \Rightarrow rg\,M = 3$

$\lambda = -2 \Rightarrow \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rg\,M = 2$

Rango de $\tilde{M}$

Si $\lambda \neq -2 \Rightarrow rg\,\tilde{M} = 3$

$\lambda = -2 \Rightarrow \tilde{M} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $\begin{vmatrix} 5 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -4 - 2 - 10 + 4 \neq 0$

$\Rightarrow rg\,\tilde{M} = 3$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Posiciones relativas:} \\ \text{Si } \lambda \neq -2 \Rightarrow rg\,M = 3 = rg\,\tilde{M} \Rightarrow \text{la recta y el plano se cortan en un pto.} \\ \text{Si } \lambda = -2 \Rightarrow rg\,M = 2 < 3 = rg\,\tilde{M} \Rightarrow \text{la recta y el plano son paralelos} \end{array}}$$

(5) a) $\pi_1 \equiv 2x + 3y + z = 2$

$\pi_2 \equiv x + y - z = 1$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{M} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rg\, M = rg\, \tilde{M} = 3 \Rightarrow$ $\boxed{\text{los planos son secantes}}$

b) $r \equiv \left.\begin{array}{l} 2x+3y+z=2 \\ x+y-z=1 \end{array}\right\} \longrightarrow \left.\begin{array}{l} 2x+3y+z=2 \\ 3x+4y\quad=3 \end{array}\right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1-4\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$

¿$P \in r$? $\left.\begin{array}{l} 5 = 1-4\lambda \Rightarrow \lambda = -1 \\ -3 = 3\lambda \Rightarrow \lambda = -1 \\ 1 = -\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow P \in r$

La recta pedida es $\boxed{r \equiv \begin{cases} 2x+3y+z=2 \\ x+y-z=1 \end{cases}}$

(6) $A(0,1,2)$, $B(-1,2,3)$, $C(2,-1,4)$

El plano que buscamos tiene como vectores directores a

$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (-1,2,3)-(0,1,2) = (-1,1,1) \\ \overrightarrow{AC} = (2,-1,4)-(0,1,2) = (2,-2,2) \end{array}\right\}$ (son linealtes independientes)

y puede pasar por cualquier punto que no pertenezca al plano que pasa por A, B y C.

Tomamos $O(0,0,0)$ que no pertenece a ese plano.

La ecuación general del plano pedido es:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x & -1 & 2 \\ y & 1 & -2 \\ z & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4x + 4y = 0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv x + y = 0}$$

Hay infinitos planos al plano que pasa por A, B y C.

(7) $r \equiv \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z+4}{3} \Rightarrow \begin{cases} P_r(1,3,-4) \\ \vec{u}_r = (1,-1,3) \end{cases}$

$s \equiv \dfrac{x}{1} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z}{3} \Rightarrow \begin{cases} P_s(0,-1,0) \\ \vec{u}_s = (1,-1,3) \end{cases}$

$\overrightarrow{P_r P_s} = (-1,-4,4)$

La ecuación del plano es:

$$\Pi \equiv \begin{vmatrix} x & 1 & -1 \\ y & -1 & -4 \\ z & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{\Pi \equiv 8x - 7y - 5z = 0}$$

8) $r_1 \equiv \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z}{2}$, $r_2 \equiv \begin{cases} x+2y+z-1=0 \\ 2x-y-z-3=0 \end{cases}$

Calculamos la ecuación del plano que contiene al punto $P(1,0,0)$ y a la recta r_1:

$Q(2,1,0) \in r_1$, $\vec{PQ} = (1,1,0)$, $\vec{u}_{r_1} = (1,-1,2)$

$$\Pi_1 \equiv \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ y & 1 & -1 \\ z & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x-2y-2z-2=0 \Rightarrow \Pi_1 \equiv x-y-z-1=0$$

Calculamos la ecuación del plano que contiene al punto P y a la recta r_2:

$$r_2 \equiv \begin{cases} x+2y+z-1=0 \\ 2x-y-z-3=0 \end{cases} \Rightarrow r_2 \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 4-3t \\ z = -7+5t \end{cases}$$

$R(0,4,-7) \in r_2$, $\vec{PR} = (-1,4,-7)$, $\vec{u}_{r_2} = (1,-3,5)$

$$\Pi_2 \equiv \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 1 \\ y & 4 & -3 \\ z & -7 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x-2y-z+1=0 \Rightarrow \Pi_2 \equiv x+2y+z-1=0$$

Así, la recta viene dada por:

$$s \equiv \begin{cases} x-y-z-1=0 \\ x+2y+z-1=0 \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2-2\lambda \\ z = -3+3\lambda \end{cases} \Rightarrow \boxed{s \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+3}{3}}$$

9) $\left.\begin{array}{l} \Pi \equiv x+y+2z = 2 \\ \alpha \equiv 2x+my+2mz = 2+m \\ \beta \equiv mx+2y+(2+m)z = 0 \end{array}\right\} M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & m & 2m \\ m & 2 & 2+m \end{pmatrix}$, $\tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & m & 2m & 2+m \\ m & 2 & 2+m & 0 \end{pmatrix}$

Rango de M

$|M| = m^2 - 4m + 4 = 0 \Rightarrow m = 2$

Si $m \neq 2 \Rightarrow rg\, M = 3 = rg\, \tilde{M}$

Si $m=2$: $M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[-2F_1+F_3]{-2F_1+F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rg\, M = 1$

$\tilde{M}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rg\, \tilde{M} = 2$

Submatrices de orden 2×4 de $\tilde{M}$:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2F_1+F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rg = 1$

Posiciones relativas:

Si $m \neq 2 \Rightarrow rg\, M = 3 = rg\, \tilde{M} \Rightarrow$ los planos son secantes en un punto

Si $m = 2 \Rightarrow rg\, M = 1$, $rg\, \tilde{M} = 2$ y hay una submatriz de orden 2×4 de $\tilde{M}$ con rango $1 \Rightarrow$ dos planos coinciden y el otro es paralelo.

(2) b) Calculamos el punto de corte de π_1, π_2 y π_3 para $\lambda = -1$:

$$\left.\begin{aligned} x+y+z &= -2 \\ 2x+y-z &= -1 \\ x-y+z &= 1 \end{aligned}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-F_1+F_3]{-2F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} [1] \\ [2] \\ [3] \end{array}$$

De [3]: $-2y = 3 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}$

Sustituimos en [2]: $-y-3z=3 \Rightarrow z = \frac{3-\frac{3}{2}}{-3} = -\frac{1}{2}$

Sustituimos en [1]: $x+y+z=-2 \Rightarrow x = -2+\frac{3}{2}+\frac{1}{2} = 0$

$\boxed{\text{El punto de corte de los tres planos es } (x,y,z) = \left(0, -\frac{3}{2}, \frac{-1}{2}\right)}$