

Ejercicios resueltos de Geometría Afín

1. Halla la ecuación implícita del plano paralelo al plano $\pi \equiv 2x - 2y + 3z - 12 = 0$ que pasa por el punto $P(-2, 3, -1)$.

Solución:

El plano π' está determinado por $\pi' \equiv \{P, \vec{u}_\pi, \vec{v}_\pi\}$, donde \vec{u}_π y \vec{v}_π son vectores directores del plano π .

$$\pi \equiv 2x - 2y + 3z - 12 = 0 \Rightarrow \pi \equiv \begin{cases} x = 6 + \lambda - 3\mu \\ y = \lambda \\ z = 2\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_\pi = (1, 1, 0) \\ \vec{v}_\pi = (-3, 0, 2) \end{cases}$$

Así, el plano pedido es:

$$\pi' \equiv \det \begin{pmatrix} x+2 & 1 & -3 \\ y-3 & 1 & 0 \\ z+1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \pi' \equiv 2x - 2y + 3z + 13 = 0$$

2. Halla la ecuación implícita del plano que pasa por el punto $P(-1, 0, 2)$ y contiene a la recta de ecuación $r \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+4}{3}$.

Solución:

El plano es $\pi \equiv \{P, \vec{u}_r, \vec{P_rP}\}$ donde $P_r(1, 3, -4) \in r$ y \vec{u}_r es el vector director de la recta r .

Tenemos que $\vec{u}_r = (1, -1, 3)$ y $\vec{P_rP} = (-1, 0, 2) - (1, 3, -4) = (-2, -3, 6)$, luego:

$$\pi \equiv \det \begin{pmatrix} x+1 & -1 & -2 \\ y-0 & -1 & -3 \\ z-2 & 3 & 6 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \pi \equiv 3x + z + 1 = 0$$

3. Dados los planos $\alpha \equiv -x + 2y + z + 2 = 0$ y $\beta \equiv -2y + z = 0$, encuentra razonadamente la ecuación general o implícita de la recta paralela a los planos α y β que pase por el punto $P(0, -1, 3)$, sabiendo que α y β son secantes.

Solución:

La recta está determinada por el vector director de la recta $r \equiv \begin{cases} \alpha \equiv -x + 2y + z + 2 = 0 \\ \beta \equiv -2y + z = 0 \end{cases}$ y el punto $P(0, -1, 3)$.

El vector director de la recta r es:

$$\vec{u}_r = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 4\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k} = (4, 1, 2)$$

Por tanto, la ecuación continua de la recta pedida es:

$$s \equiv \frac{x}{4} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{2}$$

y, como consecuencia, la ecuación general o implícita es:

$$s \equiv \begin{cases} \frac{x}{4} = \frac{y-1}{1} \\ \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{2} \end{cases} \rightarrow s \equiv \begin{cases} x-4y-4=0 \\ 2y-z+5=0 \end{cases}$$

4. Dado el punto $P(2,0,-1)$ y las rectas

$$r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{0} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x-y+2z+4=0 \\ x+z+1=0 \end{cases}$$

Encuentra razonadamente la ecuación general del plano que pasando por P es paralelo a r y s .

Solución:

El plano está determinado por el punto P y por los vectores directores de las rectas:

$$\pi \equiv \{P, \vec{u}_r, \vec{u}_s\}$$

La ecuación general del plano es:

$$\pi \equiv \det \begin{pmatrix} x-2 & -1 & -1 \\ y & 2 & 1 \\ z+1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 2(x-2) - (z+1) + 2(z+1) + y = 0 \Rightarrow \pi \equiv 2x + y + z - 3 = 0$$

«De otra forma»: usa Geometría Afín Euclídea

El plano está determinado por P y por el vector normal $\vec{n} = \vec{u}_r \times \vec{u}_s$.

El vector normal es:

$$\vec{n} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2\vec{i} - \vec{k} + 2\vec{k} + \vec{j} = (2, 1, 1)$$

Por tanto, el plano es de la forma $\pi \equiv 2x + y + z + D = 0$.

Imponiendo que $P(2,0,-1) \in \pi$:

$$2 \cdot 2 + 0 - 1 + D = 0 \Rightarrow D = -3$$

Así, la ecuación del plano es: $\pi \equiv 2x + y + z - 3 = 0$.

5. Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x+2y-z=1 \\ -x+y-3z=2 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x+y=0 \\ 3x+2y+z=-1 \end{cases}$, da la ecuación implícita de un plano π que contenga a r y s .

Solución:

El plano π está determinado por P (punto de intersección de r y s) y por los vectores directores de las rectas.

$$\pi \equiv \{P, \vec{u}_r, \vec{u}_s\}$$

Calculamos el punto de intersección de r y s :

$$\begin{cases} x+2y-z=1 \\ -x+y-3z=2 \\ x+y=0 \rightarrow x=-y \\ 3x+2y+z=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y+2y-z=1 \\ y+y-3z=2 \\ -3y+2y+z=-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y-z=1 & [1] \\ 2y-3z=2 & [2] \\ -y+z=-1 & [3] \end{cases}$$

De $-2 \cdot [1] + [2]$: $-z = 0 \Rightarrow z = 0$

Sustituyendo en [1]: $y = 1 + z \Rightarrow y = 1$

Como $x + 2y - z = 1 \Rightarrow x = 1 - 2 \cdot 1 = -1$

Por tanto, el punto de corte es $P(-1, 1, 0)$ y el plano pedido es:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x+1 & -5 & -1 \\ y-1 & 4 & 1 \\ z & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4(x+1) - 3(y-1) - 5z + 4z - 3(x+1) + 5(y-1) = 0 \Rightarrow \pi \equiv x + 2y - z - 1 = 0$$

6. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(1, 0, 0)$ y corta a las rectas

$$r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x-2y+z-1=0 \\ 2x-y-z-3=0 \end{cases}$$

Solución:

La ecuación pedida está determinada por $r \equiv \{P, \pi_1, \pi_2\}$, donde π_1 es el plano que contiene a P y a la recta r , y π_2 es el plano que contiene a P y a la recta s .

El plano que contiene a P y a la recta r :

$$\pi_1 \equiv \{P, \overrightarrow{PP_r}, \overrightarrow{u_r}\} \equiv \det \begin{pmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ y & 1 & -1 \\ z & 0 & 2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \pi_1 \equiv x - y - z - 1 = 0$$

El plano que contiene a P y a la recta s :

$$s \equiv \begin{cases} x-2y+z-1=0 \\ 2x-y-z-3=0 \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 4 - 3\lambda \\ z = -7 + 5\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (1, -3, 5) \\ P_s(0, 4, -7) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{PP_s} = (0, 4, -7) - (1, 0, 0) = (-1, 4, -7)$$

$$\pi_2 \equiv \{P, \overrightarrow{PP_s}, \overrightarrow{u_s}\} \equiv \det \begin{pmatrix} x-1 & -1 & 1 \\ y & 4 & -3 \\ z & -7 & 5 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \pi_2 \equiv x + 2y + z - 1 = 0$$

La ecuación de la recta pedida es:

$$t \equiv \begin{cases} x-y-z-1=0 \\ x+2y+z-1=0 \end{cases} \text{ (Implícita)} \Rightarrow t \equiv \begin{cases} x = \mu \\ y = 2 - 2\mu \\ z = -3 + 3\mu \end{cases} \text{ (Paramétricas)} \Rightarrow t \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+3}{3} \text{ (Continua)}$$

7. Determina la ecuación de la recta contenida en el plano $\pi \equiv x + 2y + 6z - 2 = 0$ que corta a los ejes OY y OZ.

Solución:

La recta pedida está determinada por $r \equiv \{A, \overline{AB}\}$, donde A es el punto de intersección de π con el eje OY y B es el punto de intersección de π con el eje OZ.

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y + 6z - 2 = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow A(0, 1, 0) \text{ es el punto de intersección del plano con el eje OY.}$$

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y + 6z - 2 = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow B\left(0, 0, \frac{1}{3}\right) \text{ es el punto de intersección del plano con el eje OZ.}$$

Así, un vector director de la recta contenida en π que corta a los ejes OY y OZ es $\overline{AB} = \left(0, -1, \frac{1}{3}\right)$ y, por tanto, la ecuación de la recta pedida es:

$$r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 - \lambda \\ z = \frac{1}{3}\lambda \end{cases}$$

8. (Ecuación del plano que contiene a una recta y es paralelo a otra (las rectas se cruzan))

Hallar, si es posible, un plano paralelo a $r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{3}$ que contenga a $s \equiv \begin{cases} x = 2 - 2\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 5 - 6\lambda \end{cases}$

Solución:

Las rectas r y s se cruzan, por lo que el plano pedido está determinado por $\pi \equiv \{P_s, \overline{u_r}, \overline{u_s}\}$, donde $P_s \in s$.

Las rectas se cruzan, ya que $\text{rango}(\overline{u_r}, \overline{u_s}, \overline{P_r P_s}) = \text{rango} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 3 & -6 & 4 \end{pmatrix} = 3$, donde

$$\begin{cases} \overline{u_r} = (2, -1, 3) \\ \overline{u_s} = (-2, 2, -6) \\ \overline{P_r P_s} = (2, 0, 5) - (0, 2, 1) = (2, -2, 4) \end{cases}$$

El vector $\overline{u_r}$ es paralelo al plano que buscamos y el vector $\overline{u_s}$ está contenido en él. Luego con ellos y con un punto de $P_s (2, 0, 5) \in s$, obtenemos el plano π :

$$\pi \equiv \det \begin{pmatrix} x-2 & 2 & -2 \\ y & -1 & 2 \\ z-5 & 3 & -6 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \pi \equiv 6y + 2z - 10 = 0 \Rightarrow \pi \equiv 3y + z - 5 = 0$$

9. Ecuación del plano que contiene a dos rectas paralelas

Hallar, si es posible, un plano que contenga a $r \equiv \frac{x+5}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-4}$ y a $s \equiv \begin{cases} 2x+y+2z+5=0 \\ 2x-y+z+11=0 \end{cases}$.

Solución:

El plano está determinado por $\pi \equiv \{P_r, \vec{u}_r, \overrightarrow{P_r P_s}\}$, donde $P_r \in r$ y $P_s \in s$.

Los vectores directores de r y s son: $\vec{u}_r = (3, 2, -4)$ y $\vec{u}_s = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k} = (3, 2, -4)$,

que no son proporcionales y, por tanto, las rectas son paralelas o coincidentes. Ahora bien, como $P_r(-5, 1, 2) \in r$, no verifica la ecuación de s , $2 \cdot (-5) - 1 + 2 + 11 \neq 0$, se tiene que $P_r \notin s$ y como consecuencia, r y s son paralelas.

El plano pedido es:

$$\pi \equiv \det \begin{pmatrix} x+5 & 3 & 1 \\ y-1 & 2 & 2 \\ z-2 & -4 & -2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \pi \equiv 2x + y + 2z + 5 = 0$$

ya que, haciendo $z=0$ en las ecuaciones de s , obtenemos $P_s(-4, 3, 0) \in s$ y, por tanto, $\overrightarrow{P_r P_s} = (-4, 3, 0) - (-5, 1, 2) = (1, 2, -2)$