1.- 1) Despejamos X :

$$XA - B = X$$
$$XA - B - X = 0$$
$$XA - X = B$$
$$X(A-I) = B$$
$$X(A-I)(A-I)^{-1} = B(A-I)^{-1}$$
$$\boxed{X = B(A-I)^{-1}}$$

2) Calculamos A−I :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3) Hallamos $(A-I)^{-1}$:

$$(A-I \mid I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-3F_1+F_3}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -3/2 & 0 & 1/2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3-F_2}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3/2 & -1 & 1/2 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & 1 & -1/2 \end{array}\right) \xrightarrow{-2F_1+F_2}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & 1 & -1/2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & 1 & -1/2 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_2}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -1 & +1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & 1 & -1/2 \end{array}\right) = \left(I \mid (A-I)^{-1}\right)$$

4) Calculamos X :

$$\boxed{X = B(A-I)^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 3/2 & 1 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}}$$

2.-

a) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$

$$\begin{vmatrix} 0 & a & a^2 \\ a^{-1} & 0 & a \\ a^{-2} & a^{-1} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a}\frac{1}{a} & \frac{1}{a} & 0 \end{vmatrix} = a\frac{1}{a}\begin{vmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & a \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{a} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= a\frac{1}{a}\frac{1}{a}\begin{vmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = a\frac{1}{a}\frac{1}{a}a\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

Si multiplicamos una fila o columna por un número real, el valor del determinante queda multiplicado por dicho número.

3.-

a) $\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$ $\quad A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}, \; (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & m \\ 1 & 1 & m & m^2 \end{array}\right)$

Rango de A

$|A| = m^3 + 1 + 1 - m - m - m = 0 \Rightarrow m^3 - 3m + 2 = 0$

	1	0	-3	2
1		1	1	-2
	1	1	-2	$\boxed{0}$
1		1	2	
	1	2	$\boxed{0}$	

$m^3 - 3m + 2 = 0 \Leftrightarrow (m-1)(m-1)(m+2) = 0$

$\Leftrightarrow m = \begin{cases} 1 \text{ (doble)} \\ -2 \end{cases}$

Si $\boxed{m=1}$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y rango $A = 1$

Si $\boxed{m=-2}$: $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \; \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ rango $A = 2$

Rango de (A|B):

Si $\boxed{m=1}$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$ y rango $(A|B) = 1$

Si $\boxed{m=-2}$: $\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right)$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 4+4-2-1+8-4 \neq 0$

$\Rightarrow$ rango $(A|B) = 3$

Discusión del sistema:

Si $\boxed{m=1} \Rightarrow$ rango $A = 1 =$ rango $(A|B) \Rightarrow$ sistema compatible indeterminado

Si $\boxed{m=-2} \Rightarrow$ rango $A = 2 < 3 =$ rango $(A|B) \Rightarrow$ sistema incompatible

Si $\boxed{m \neq \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}} \Rightarrow$ rango $A = 3 =$ rango $(A|B) =$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ sistema compatible determinado

b) Resolución para $m=1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-F_1+F_2]{-F_1+F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) [1]$$

Llamamos $z = \mu$

$y = \lambda$

Sustituyendo en [1]: $x + \lambda + \mu = 1 \Rightarrow x = 1 - \lambda - \mu$

Soluciones: $\boxed{(x,y,z) = (1-\lambda-\mu, \lambda, \mu) \text{ con } \lambda, \mu \in \mathbb{R}}$

4.- $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4\lambda & 2 & 2\lambda \\ \lambda & 1 & -\lambda & \lambda \\ 4\lambda & 4\lambda & \lambda & 9 \end{array}\right)$

Rango de A (matriz de coeficientes)

$\begin{vmatrix} 4 & 4\lambda & 2 \\ \lambda & 1 & -\lambda \\ 4\lambda & 4\lambda & \lambda \end{vmatrix} = 4\lambda - 16\lambda^3 + 8\lambda^2 - (8\lambda - 16\lambda^2 + 4\lambda^3) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4\lambda - 16\lambda^3 + 8\lambda^2 - 8\lambda + 16\lambda^2 - 4\lambda^3 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -20\lambda^3 + 24\lambda^2 - 4\lambda = 0$

$\Rightarrow \lambda(-20\lambda^2 + 24\lambda - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{\lambda = 0} \\ \lambda = \dfrac{-24 \pm \sqrt{24^2 - 4 \cdot 4 \cdot 20}}{-40} = \begin{cases} \boxed{\frac{1}{5}} \\ \boxed{1} \end{cases} \end{cases}$

Rango de $(A|B)$ (matriz ampliada):

Para $\boxed{\lambda = 0}$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ rango $(A|B) = 3$

Para $\boxed{\lambda = \frac{1}{5}}$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & \frac{4}{5} & 2 & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & 9 \end{array}\right)$

$$\begin{vmatrix} 4 & 4/5 & 2/5 \\ 1/5 & 1 & 1/5 \\ 4/5 & 4/5 & 9 \end{vmatrix} = 36 + \frac{16}{125} + \frac{8}{125} - \frac{8}{25} - \frac{16}{25} - \frac{36}{25} \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ rango $(A|B) = 3$

Para $\boxed{\lambda = 1}$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & 1 & 9 \end{array}\right)$

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 8 + 18 - 8 + 36 - 2 = 40 \Rightarrow \text{rango}(A|B) = 3$$

Discusión del sistema:

Si $\lambda \neq \begin{cases} 0 \\ 1/5 \\ 1 \end{cases} \Rightarrow$ rango $A = 3 =$ rango $(A|B) =$ nº de incógnitas $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ sistema compatible determinado

Si $\lambda = 0 \Rightarrow$ rango $A = 2 < 3 =$ rango $(A|B) \Rightarrow$ sistema incompatible

Si $\lambda = \frac{1}{5} \Rightarrow$ rango $A = 2 < 3 =$ rango $(A|B) \Rightarrow$ sistema incompatible

Si $\lambda = 1 \Rightarrow$ rango $A = 2 < 3 =$ rango $(A|B) \Rightarrow$ sistema incompatible

b) Resolución para $\lambda = -1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -4 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -4 & -4 & -1 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow[-4F_2+F_3]{4F_2+F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 6 & -6 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -8 & -5 & 13 \end{array}\right) \begin{array}{c} [1] \\ [2] \\ [3] \end{array}$$

De [1]: $6z=-6 \Rightarrow z=-1$

Sustituimos en [3]: $-8y-5z=13$

$$-8y+5=13$$

$$y=-1$$

Sustituimos en [2]: $-x-1-1=-1 \Rightarrow x=-1$

Solución: $\boxed{(x,y,z)=(-1,-1,-1)}$

(5) x = número de monedas que hay en la caja A

y = " " " " " " " " B

z = " " " " " " " " C

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=36 \\ x=y+z+2 \\ x+1=2(y-1) \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x+y+z=36 \\ x-y-z=2 \\ x-2y=-3 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 36 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[-F_1+F_3]{-F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 36 \\ 0 & -2 & -2 & -34 \\ 0 & -3 & -1 & -39 \end{array}\right) \xrightarrow{-3F_2+2F_3}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 36 \\ 0 & -2 & -2 & -34 \\ 0 & 0 & 4 & 24 \end{array}\right) \begin{array}{l} [1] \\ [2] \\ [3] \end{array}$$

De [3]: $4z=24 \Rightarrow z=6$

Sustituimos en [2]: $y=\dfrac{-34+2\cdot 6}{-2}=11$

Sustituimos en [1]: $x=36-11-6=19$

$\boxed{\text{Solución: había 19 monedas en la caja A, 11 en la B y 6 en la C}}$

(2) b) $$\begin{vmatrix} x & 2x+1 & 3x+2 \\ x & 2x+3 & 3x+4 \\ x & 2x+5 & 3x+6 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} x \begin{vmatrix} 1 & 2x+1 & 3x+2 \\ 1 & 2x+3 & 3x+4 \\ 1 & 2x+5 & 3x+6 \end{vmatrix} \begin{array}{l} -F_1+F_2 \\ -F_1+F_3 \end{array}$$

Si a una fila le sumamos una combinación lineal de las demás, el determinante no varía.

$$= x\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2x+1 & 3x+2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} x\cdot 0 = 0$$

(1) Si todos los elementos de una columna están multiplicados por un mismo número, su determinante queda multiplicado por ese número.

(2) El determinante de una matriz con 2 filas iguales es cero

6 $\begin{cases} -x+y-z=-1 \\ 4x-2y+2z=2m \\ -3x-2y+mz=-4 \end{cases}$ $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 2 \\ -3 & -2 & m \end{pmatrix}$, $(A|b)=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 4 & -2 & 2 & 2m \\ -3 & -2 & m & -4 \end{pmatrix}$

a) Rango de A

$|A| = 2m-6+8+6-4m-4=0 \Rightarrow -2m+4=0 \Rightarrow m=2$

Para $m=2$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & -2 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rango } A = 2 \text{ ya que } \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Rango de $(A|b)$

Para $m=2$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 4 & -2 & 2 & 4 \\ -3 & -2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[4F_1+F_2]{-3F_1+F_3} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rango}(A|b)=3$$

Discusión:

Si $m \neq 2 \Rightarrow$ rango $A = 3 =$ rango $(A|b) =$ nº de incógnitas $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ (teorema de Rouché-Fröbenius) S.C.D.

Si $m=2 \Rightarrow$ rango $A = 2 \neq 3 =$ rango $(A|b) \Rightarrow$ (teorema de Rouché-Fröbenius) S.I.

b) Resolución para $m \neq 2$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 4 & -2 & 2 & 2m \\ -3 & -2 & m & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[4F_1+F_2]{-3F_1+F_3} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 2m-4 \\ 0 & -5 & 3+m & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{5F_2+2F_3}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 2m-4 \\ 0 & 0 & m-2 & 5m-11 \end{pmatrix} \begin{matrix} [1] \\ [2] \\ [3] \end{matrix}$$

Solución

$$(x,y,z) = \left(\frac{5m-11}{m-2}, \frac{-m^2-m+6}{m-2}, \frac{5m-11}{m-2} \right)$$

para $m \neq 2$

De [3]: $z = \dfrac{5m-11}{m-2}$

Sustituimos en [2]: $y = \dfrac{2m-4+2\left(\frac{5m-11}{m-2}\right)}{2} = \dfrac{-m^2-m+6}{m-2}$

Sustituimos en [1]: $x = \dfrac{-m^2-m+6}{m-2} - \dfrac{5m-11}{m-2} + 1 = \dfrac{5m-11}{m-2}$

(7) $\begin{cases} 2x+y+3z=2 \\ 5x+2y+4z=-1 \\ 3x+y+a^2z=3a \end{cases}$ $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & a^2 \end{pmatrix}$, $(A|b)=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & a^2 & 3a \end{pmatrix}$

a) Rango de A

$|A| = 4a^2+12+15-18-5a^2-8 = -a^2+1=0 \Rightarrow a=\begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$

Para $a=1$

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ rango $A=2$ ya que $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$

Para $a=-1$

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ rango $A=2$ ya que $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$

Se podrían haber estudiado a la vez, ya que el parámetro, a, está elevado al cuadrado.

Rango de $(A|b)$

Para $a=1$

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[-F_1+F_3]{-2F_1+F_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -5 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-F_2+F_3}$

$\longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow$ rango $(A|b)=3$

Para $a=-1$

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[-F_1+F_3]{-2F_1+F_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -5 \\ 1 & 0 & -2 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{-F_2+F_3}$

$\longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ rango$(A|b)=2$

Discusión

Si $a \neq \pm 1 \Rightarrow$ rango $A=3=$ rango $(A|b)=$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ (t^a de R-F) S.C.D.

Si $a=1 \Rightarrow$ rango $A=2 \neq 3=$ rango $(A|b) \Rightarrow$ (t^a de R-F) S.I.

Si $a=-1 \Rightarrow$ rango $A=2=$ rango $(A|b) < 3=$ nº de incógnitas $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ (t^a de R-F) S.C.I.

b) Resolución para $\boxed{a=-1}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[-3F_1+2F_3]{-5F_1+2F_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -7 & -12 \\ 0 & -1 & -7 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{-F_2+F_3} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -7 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} [1] \\ [2] \\ \end{array}$$

Llamamos $z=\lambda\in\mathbb{R}$

De [2]: $y=12-7\lambda$

Sustituimos en [1]: $x=-5+2\lambda$

$\boxed{\text{Soluciones: } (x,y,z)=(-5+2\lambda,\ 12-7\lambda,\ \lambda) \text{ con } \lambda\in\mathbb{R}}$