DISCISIÓN Y RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECACUACIONES LINEALES

1. Discutir y resolver, cuando sea posible, el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = 1 \end{cases}$$

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 - 3a + 2 = 0 \Rightarrow a = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

Estudiemos el rango de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada, para esos valores de a :

$\boxed{a = 1}$

En este caso, el rango de A es 1, ya que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-F_1+F_3]{-F_1+F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y el rango de la matriz ampliada también es 1:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-F_1+F_3]{-F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Así, como $\text{rango}(A) = \text{rango}(A|b) = 1 \neq 3 = \text{número de incógnitas}$, aplicando el teorema de Rouché-Fröbenius, el ***sistema es compatible indeterminado (con dos parámetros):*** $z = \lambda$ e $y = \mu$:

Soluciones: $\boxed{(x, y, z) = (1 - \lambda - \mu, \mu, \lambda) \text{ con } \lambda, \mu \in \mathbb{R}}$

$\boxed{a = -2}$

Calculamos el rango de A :

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rango}(A) = 2$$

y el rango de la matriz ampliada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[2F_1+F_3]{2F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \text{rango}(A|b) = 3$$

Así, como $\text{rango}(A) = 2 \neq 3 = \text{rango}(A|b)$, aplicando el teorema de Rouché-Fröbenius, el ***sistema es incompatible.***

$\boxed{a \neq \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}}$

En este caso, el rango de A es 1, ya que:

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[-F_1+F_3]{-F_1+F_2}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

y el rango de la matriz ampliada también es 1:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{array}\right)\xrightarrow[-F_1+F_3]{-F_1+F_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

Así, como $\text{rango}(A)=\text{rango}(A\,|\,b)=1\neq 3=\text{número de incógnitas}$, aplicando el teorema de Rouché-Fröbenius, el ***sistema es compatible indeterminado (con dos parámetros):*** $z=\lambda$ e $y=\mu$:

Soluciones: $\boxed{(x,y,z)=(1-\lambda-\mu,\mu,\lambda)\ \text{con}\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}}$

2. Discute y resuelve los siguientes sistemas:

1) $\begin{cases}3x-ay+3z=4\\ax+y-z=2\\x-y+z=1\\ax+4y-z=5\end{cases}$

Calculamos el determinante de la matriz ampliada:

$$\det\begin{pmatrix}3&-a&3&4\\a&1&-1&2\\1&-1&1&1\\a&4&-1&5\end{pmatrix}\underset{\substack{F_1+3F_2\\F_1-3F_3\\F_1+3F_4}}{=\!=\!=}\det\begin{pmatrix}3&-a&3&4\\3a+3&3-a&0&10\\0&3-a&0&1\\3a+3&12-a&0&19\end{pmatrix}=3\cdot(-1)^{1+3}\det\begin{pmatrix}3a+3&3-a&10\\0&3-a&1\\3a+3&12-a&19\end{pmatrix}=$$

$$=3\left(27a^2+27a+54\right)=0\Rightarrow 27a^2+27a+54=0\Rightarrow a=\begin{cases}-1\\2\end{cases}$$

Si $a\neq\begin{cases}-1\\2\end{cases}\Rightarrow rangoA<rango(A\,|\,b)=4\Rightarrow$ (teorema de Rouché-Fröbenius) Sistema incompatible

Si $a=-1\Rightarrow rangoA=2\neq 3=rango(A\,|\,b)\Rightarrow$ (teorema de Rouché-Fröbenius) Sistema incompatible

Si $a=2\Rightarrow rangoA=3=rango(A\,|\,b)=$ número de incógnitas $\Rightarrow$ (teorema de Rouché-Fröbenius) Sistema compatible determinado y la solución es:

$$(x,y,z)=(1,1,1)$$

2) $\begin{cases}2x+y+z+t=0\\ax-2y+z+4t=0\\3x-y-z+4t=0\\-2x+4y-z+9t=0\end{cases}$

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ a & -2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & -1 & 4 \\ -2 & 4 & -1 & 9 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_1-F_2 \\ F_1+F_3 \\ F_1+F_4}}{=\!=\!=} \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2-a & 3 & 0 & -3 \\ 5 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 & 10 \end{pmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+3}\det\begin{pmatrix} 2-a & 3 & -3 \\ 5 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 10 \end{pmatrix} = 25a-275=0$$

$\Rightarrow a=11$

Si $\boxed{a\neq 11} \Rightarrow rango(A)=4=rango(A\,|\,b)=$ número de incógnitas $\Rightarrow$ (teorema de Rouché-Fröbenius) Sistema compatible determinado y la solución es la trivial:

$$\boxed{(x,y,z)=(0,0,0)}$$

Si $\boxed{a=11} \Rightarrow rango(A)=3=rango(A\,|\,b)<4=$ número de incógnitas $\Rightarrow$ (teorema de Rouché-Fröbenius) Sistema compatible indeterminado y las soluciones son:

$$\boxed{(x,y,z)=(-\lambda,-2\lambda,3\lambda,\lambda) \text{ con } \lambda\in\mathbb{R}}$$