DETERMINANTES

1. Calcula los siguientes determinantes de orden 4:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 6 & 4 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 1 & 8 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & -1 \\ -2 & -3 & 2 & 4 \\ -1 & -3 & 2 & 6 \end{vmatrix}$

a) Desarrollamos por la primera columna

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 6 & 4 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 1 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= 3\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 8 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 8 \end{vmatrix} + 6\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 8 \end{vmatrix} + 4\cdot(-1)^{4+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & 7 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= 3\cdot 13 - 4 + 6\cdot(-7) - 4\cdot(-2) = 1$$

b) Desarrollamos por la primera fila

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & -1 \\ -2 & -3 & 2 & 4 \\ -1 & -3 & 2 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= 3\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \\ -3 & 2 & 6 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -2 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 6 \end{vmatrix} + (-2)\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & -3 & 4 \\ -1 & -3 & 6 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{1+4}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -2 & -3 & 2 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 3\cdot(-14) - (-14) + (-2)\cdot(-7) - 2\cdot(-7) = 0$$

PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

1. Si una matriz tiene una fila o una columna de ceros, el determinante es cero.

Ejemplos:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot 0 - 0\cdot 2 = 0$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 1\cdot 0\cdot(-3) + 0\cdot(-1)\cdot(-2) + 2\cdot 0\cdot 1 - \left[1\cdot 0\cdot(-2) + 0\cdot 2\cdot 1 + (-1)\cdot 0\cdot(-3)\right] = 0$

2. Si se intercambian dos filas o dos columnas, cambia el signo del determinante.

Ejemplos:

a) $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot 3 - 2\cdot(-2) = 7$

Intercambiamos la primera y la segunda filas:

$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2\cdot(-2) - 1\cdot 3 = -7$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 12 - 8 = 4$

Intercambiamos la primera y la tercera columnas:

$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 8 - 12 = -4$

3. El determinante de una matriz con dos filas o columnas iguales es cero.

Ejemplos:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0$

b) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 + 2 = 0$

4. Si multiplicamos una fila o columna por un número real, el valor del determinante queda multiplicado por dicho número.

Ejemplos:

a) $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \xrightarrow{\text{multiplicamos la primera fila por 3}} \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3$

b) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \xrightarrow{\text{multiplicamos la tercera columna por } -2} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -4 = -2\cdot 2$

5. Un determinante, con una fila o columna formada por la suma de dos números, puede descomponerse en suma de otros dos determinantes que tienen las mismas filas o columnas restantes y, en lugar de aquella, otra formada por los primeros y segundos sumandos, respectivamente.

Ejemplos:

a)
$$\begin{vmatrix} 1+2 & 2 \\ -1+3 & 0 \end{vmatrix} = (1+2)\cdot 0-(-1+3)\cdot 2=-4$$
$$\begin{vmatrix} 1+2 & 2 \\ -1+3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 2-6=-4$$

b)
$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1+2 & 2-1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3$$
$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1+2 & 2-1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1+2=3$$

6. El determinante de una matriz no cambia si a una cualquiera de sus filas o columnas se le suman o restan los elementos de otra paralela a ella, multiplicados por una constante.

Ejemplos:

a)
$$\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2$$
$$\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \underset{=\!=\!=\!=}{F_2 \Rightarrow F_1+F_2} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

b)
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3+2=5$$
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \underset{F_1+F_3}{\overset{-2F_1+F_2}{=}} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

7. Un determinante es cero si alguna de las filas o columnas que lo componen es combinación lineal de otras paralelas a ella.

Ejemplos:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 3 & -3 & -9 \end{vmatrix} = 0$ ya que $C_3 = 3C_2$

b) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$ ya que $F_3 = F_1 + 2F_2$

8. El determinante de un producto de matrices es igual al producto de los determinantes de cada factor.

Ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\-2&0&-2\\0&1&-1\end{pmatrix}\ \text{y}\ B=\begin{pmatrix}0&1&5\\-1&2&0\\4&5&-2\end{pmatrix}$$

$$|A|=\det\begin{pmatrix}1&-1&2\\-2&0&-2\\0&1&-1\end{pmatrix}=0\ \text{y}\ |B|=\det\begin{pmatrix}0&1&5\\-1&2&0\\4&5&-2\end{pmatrix}=-67\Rightarrow\det(A)\det(B)=0$$

$$|AB|=\det\left[\begin{pmatrix}1&-1&2\\-2&0&-2\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&5\\-1&2&0\\4&5&-2\end{pmatrix}\right]=\det\begin{pmatrix}9&9&1\\-8&-12&-6\\-5&-3&2\end{pmatrix}=0\Rightarrow\det(AB)=0$$

Otras propiedades de los determinantes que es importante conocer son:

9. $\left|A^T\right|=|A|$

10. $\left|A^{-1}\right|=\dfrac{1}{|A|}$

CÁLCULO DE DETERMINANTES APLICANDO LAS PROPIEDADES

2. Calcula el determinante de las siguientes matrices:

a) $A=\begin{pmatrix}4&3&1&27\\1&1&4&9\\2&4&-1&36\\0&6&2&54\end{pmatrix}$ b) $B=\begin{pmatrix}2&1&2&-4\\7&0&1&-1\\3&1&1&0\\1&0&1&-2\end{pmatrix}$ c) $C=\begin{pmatrix}0&2&4&6\\2&-1&3&5\\1&1&2&3\\4&6&5&7\end{pmatrix}$

Solución:

a) $$|A|=\det\begin{pmatrix}4&3&1&27\\1&1&4&9\\2&4&-1&36\\0&6&2&54\end{pmatrix}\underset{\overline{\overline{\quad}}}{\begin{matrix}F_1\Rightarrow-4F_2+F_1\\F_3\Rightarrow-2F_2+F_3\end{matrix}}\begin{vmatrix}0&-1&-15&-9\\1&1&4&9\\0&2&-9&18\\0&6&2&54\end{vmatrix}\underset{\overline{\overline{\quad}}}{\begin{matrix}F_3\Rightarrow2F_1+F_3\\F_4\Rightarrow6F_1+F_4\end{matrix}}$$

$$=\begin{vmatrix}0&-1&-15&-9\\1&1&4&9\\0&0&-39&0\\0&0&-88&0\end{vmatrix}=1\cdot Adj(a_{21})=-\begin{vmatrix}-1&-15&-9\\0&-39&0\\0&-88&0\end{vmatrix}=0$$

b) $$\det(B)=\det\begin{pmatrix}2&1&2&-4\\7&0&1&-1\\3&1&1&0\\1&0&1&-2\end{pmatrix}\underset{\overline{\overline{\quad}}}{\begin{matrix}F_1\Rightarrow-2F_4+F_1\\F_2\Rightarrow-7F_4+F_2\\F_3\Rightarrow-3F_4+F_3\end{matrix}}\begin{vmatrix}0&1&0&0\\0&0&-6&13\\0&1&-2&6\\1&0&1&-2\end{vmatrix}=-1\cdot Adj(b_{41})=$$

$$=1\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -6 & 13\\ 1 & -2 & 6\end{vmatrix}=-1\cdot(-10)=10$$

c) $$|C|=\det\begin{pmatrix}0 & 2 & 4 & 6\\ 2 & -1 & 3 & 5\\ 1 & 1 & 2 & 3\\ 4 & 6 & 5 & 7\end{pmatrix}\xrightarrow[F_4\Rightarrow -4F_3+F_4]{F_2\Rightarrow -2F_3+F_2}\det\begin{pmatrix}0 & 2 & 4 & 6\\ 0 & -3 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & -3 & -5\end{pmatrix}=1\cdot Adj(c_{31})=$$

$$=1\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}2 & 4 & 6\\ -3 & -1 & -1\\ 2 & -3 & -5\end{vmatrix}=10+54-8+12-6-60=2$$

3. Halla, en función de a, el valor de los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix}a & 1 & 1 & 1\\ 1 & a & 1 & 1\\ 1 & 1 & a & 1\\ 1 & 1 & 1 & a\end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix}2a & a & a & a\\ a & 2a & a & a\\ a & a & 2a & a\\ a & a & a & 2a\end{vmatrix}$

Solución:

a) $$\begin{vmatrix}a & 1 & 1 & 1\\ 1 & a & 1 & 1\\ 1 & 1 & a & 1\\ 1 & 1 & 1 & a\end{vmatrix}\xrightarrow[F_4\Rightarrow -F_2+F_4]{F_3\Rightarrow -F_2+F_3}\begin{vmatrix}a & 1 & 1 & 1\\ 1 & a & 1 & 1\\ 0 & 1-a & -1+a & 0\\ 0 & 1-a & 0 & -1+a\end{vmatrix}=a\cdot\begin{vmatrix}a & 1 & 1\\ 1-a & -1+a & 0\\ 1-a & 0 & -1+a\end{vmatrix}-$$

$$-\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1-a & -1+a & 0\\ 1-a & 0 & -1+a\end{vmatrix}=a\left(a^3-3a+2\right)-\left(3a^2-6a+3\right)=a^4-6a^2+8a-3=(a+3)(a-1)^3$$

De otra forma:

$$\begin{vmatrix}a & 1 & 1 & 1\\ 1 & a & 1 & 1\\ 1 & 1 & a & 1\\ 1 & 1 & 1 & a\end{vmatrix}\xrightarrow{F_1\Rightarrow F_1+F_2+F_3+\mathrm{F}_4}\begin{vmatrix}a+3 & 1 & 1 & 1\\ a+3 & a & 1 & 1\\ a+3 & 1 & a & 1\\ a+3 & 1 & 1 & a\end{vmatrix}=(a+3)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & a & 1 & 1\\ 1 & 1 & a & 1\\ 1 & 1 & 1 & a\end{vmatrix}\xrightarrow[F_4\Rightarrow -F_1+F_4]{F_2\Rightarrow -F_1+F_2,\ F_3\Rightarrow -F_1+F_3}$$

$$=(a+3)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & a-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a-1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & a-1\end{vmatrix}=(a+3)\begin{vmatrix}a-1 & 0 & 0\\ 0 & a-1 & 0\\ 0 & 0 & a-1\end{vmatrix}=(a+3)(a-1)^3\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=$$

$$=(a+3)(a-1)^3$$

b) $$\begin{vmatrix} 2a & a & a & a \\ a & 2a & a & a \\ a & a & 2a & a \\ a & a & a & 2a \end{vmatrix} \xrightarrow[F_4 \Rightarrow -F_2+F_4]{F_3 \Rightarrow -F_2+F_3} \begin{vmatrix} 2a & a & a & a \\ a & 2a & a & a \\ 0 & -a & a & 0 \\ 0 & -a & 0 & a \end{vmatrix} \xrightarrow{F_4 \Rightarrow -F_3+F_4} \begin{vmatrix} 2a & a & a & a \\ a & 2a & a & a \\ 0 & -a & a & 0 \\ 0 & 0 & -a & a \end{vmatrix} =$$

$$= 2a \begin{vmatrix} 2a & a & a \\ -a & a & 0 \\ 0 & -a & a \end{vmatrix} - a \begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & 0 \\ 0 & -a & a \end{vmatrix} = 2a \cdot a \cdot a \cdot a \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} - a \cdot a \cdot a \cdot a \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2a^4 \cdot 4 - a^4 \cdot 3 = 5a^3$$

CÁLCULO DEL RANGO POR DETERMINANTES

Diremos que una fila o columna (de una matriz) es linealmente independiente si no se puede expresar como combinación lineal de las otras.

El rango de una matriz A es el número de filas (o de columnas) linealmente independientes que tiene la matriz. Se representa por $rg(A)$ o por $rango(A)$.

Teorema del rango: El rango de una matriz coincide con el orden de la mayor submatriz regular, es decir, con el orden de la mayor submatriz cuadrada con determinante no nulo.

EJEMPLOS:

Calcula el rango de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Por el teorema del rango: determinantes

$A_1 = (8)$ es una submatriz de A de orden 1 y $|8| \neq 0 \Rightarrow rango(A) \geq 1$

$A_2 = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ es una submatriz de A de orden 2 y $\begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rango(A) \geq 2$

$A_3 = A = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ es una submatriz de A de orden 3 y $|A| = 0 \Rightarrow rango(A)$ no puede ser 3

Como consecuencia, $rango(A) = 2$.

b) $B = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 3 \\ -6 & 8 & 0 \\ 2 & 5 & -5 \end{pmatrix}$

Por el teorema del rango:

$B_1=(6)$ es una submatriz de B de orden 1 y $|6|\neq 0 \Rightarrow rango(A)\geq 1$

$B_2=\begin{pmatrix}6 & -1\\ -6 & 8\end{pmatrix}$ es una submatriz de B de orden 2 de y $\begin{vmatrix}6 & -1\\ -6 & 8\end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow \text{rango}(B)\geq 2$

$B_3=B=\begin{pmatrix}6 & -1 & 3\\ -6 & 8 & 0\\ 2 & 5 & -5\end{pmatrix}$ es una submatriz de B de orden 3 y $\begin{vmatrix}6 & -1 & 3\\ -6 & 8 & 0\\ 2 & 5 & -5\end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow rango(B)=3$

c) $C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 7\\ -2 & 4 & 3 & 5\\ -1 & 6 & 5 & 4\end{pmatrix}$

<u>Por el teorema del rango:</u>

$C_1=(1)$ es una submatriz de C de orden 1 y $|C_1|=|1|\neq 0 \Rightarrow rango(C)\geq 1$

$C_2=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 4\end{pmatrix}$ es una submatriz de C de orden 2 y $|C_2|\neq 0 \Rightarrow rango(C)\geq 2$ (fíjate que hay un montón de submatrices de orden 2 en C)

Y también hay 4 submatrices de orden 3 en C:

- Quitando la cuarta columna: $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -2 & 4 & 3\\ -1 & 6 & 5\end{pmatrix}$
- Quitando la tercera columna: $\begin{pmatrix}1 & 2 & 7\\ -2 & 4 & 5\\ -1 & 6 & 4\end{pmatrix}$
- Quitando la segunda columna: $\begin{pmatrix}3 & 7 & -2\\ 3 & 5 & -1\\ -1 & 5 & 4\end{pmatrix}$
- Quitando la primera columna: $\begin{pmatrix}2 & 3 & 7\\ 4 & 3 & 5\\ 6 & 5 & 4\end{pmatrix}$

Sin embargo, en este caso hemos tenido suerte y todos tienen determinante distinto de cero (-8, -64, -53 y 30), pero si el primero hubiera tenido determinante cero, habría que haber calculado el segundo, y así hasta encontrar o no, uno con determinante distinto de cero.

Como consecuencia, $rango(C)=3$

4. Calcula el rango de las siguientes matrices:

a) $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0 & -1\\ 5 & 1 & -3 & -7\\ 7 & 2 & -3 & -8\\ 1 & 0 & 2 & 2\end{pmatrix}$ c) $C=\begin{pmatrix}4 & 2 & 1 & 5 & 3\\ 2 & 3 & 2 & 6 & 5\\ 6 & 5 & 3 & 12 & 8\\ 10 & 10 & 6 & 23 & 16\end{pmatrix}$

b) $B=\begin{pmatrix}1&0&0&1&-1\\1&-1&2&1&0\\0&0&0&0&1\\1&1&0&0&0\end{pmatrix}$ d) $D=\begin{pmatrix}1&2&3&0&-1&4\\3&-1&0&1&1&2\\4&1&3&1&0&6\\7&0&3&2&1&8\end{pmatrix}$

Solución:

a) $$A=\begin{pmatrix}2&1&0&-1\\5&1&-3&-7\\7&2&-3&-8\\1&0&2&2\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{-5F_4+F_2\\-7F_4+F_3}]{-2F_4+F_1}\begin{pmatrix}0&1&-4&-5\\0&1&-13&-17\\0&2&-17&22\\1&0&2&2\end{pmatrix}\xrightarrow[-2F_1+F_3]{-F_1+F_2}\begin{pmatrix}0&1&-4&-5\\0&0&-9&-12\\0&0&-9&12\\1&0&2&2\end{pmatrix}\rightarrow$$

$$\xrightarrow{F_2+F_3}\begin{pmatrix}0&1&-4&-5\\0&0&-9&-12\\0&0&0&0\\1&0&2&2\end{pmatrix}\Rightarrow rango(A)=3$$

b) $$B=\begin{pmatrix}1&0&0&1&-1\\1&-1&2&1&0\\0&0&0&0&1\\1&1&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[-F_1+F_4]{-F_1+F_2}\begin{pmatrix}1&0&0&1&-1\\0&-1&2&0&1\\0&0&0&0&1\\0&1&0&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{F_2+F_4}\begin{pmatrix}1&0&0&1&-1\\0&-1&2&0&1\\0&0&0&0&1\\0&0&2&-1&2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow rango(B)=4$$

c) $$C=\begin{pmatrix}4&2&1&5&3\\2&3&2&6&5\\6&5&3&12&8\\10&10&6&23&16\end{pmatrix}\xrightarrow{C_1\leftrightarrow C_3}\begin{pmatrix}1&2&4&5&3\\2&3&2&6&5\\3&5&5&12&8\\6&10&10&23&16\end{pmatrix}\rightarrow$$

$$\xrightarrow[\substack{-3F_1+F_3\\-6F_1+F_4}]{-2F_1+F_2}\begin{pmatrix}1&2&4&5&3\\0&-1&-6&-4&-1\\0&1&-7&-3&-1\\0&10&10&23&16\end{pmatrix}\xrightarrow[10F_2+F_4]{F_2+F_3}\begin{pmatrix}1&2&4&5&3\\0&-1&-6&-4&-1\\0&0&-13&-7&-2\\0&0&-50&-17&-6\end{pmatrix}\rightarrow$$

$$\xrightarrow{-50F_3+13F_4}\begin{pmatrix}1&2&4&5&3\\0&-1&-6&-4&-1\\0&0&-13&-7&-2\\0&0&0&129&22\end{pmatrix}\Rightarrow rango(C)=4$$

d) $$D=\begin{pmatrix}1&2&3&0&-1&4\\3&-1&0&1&1&2\\4&1&3&1&0&6\\7&0&3&2&1&8\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{-4F_1+F_3\\-7F_1+F_4}]{-3F_1+F_2}\begin{pmatrix}1&2&3&0&-1&4\\0&-7&-9&1&4&-10\\0&-7&-9&1&4&-10\\0&0&3&2&1&8\end{pmatrix}\xrightarrow{F_3+F_2}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&3&0&-1&4\\0&-7&-9&1&4&-10\\0&0&0&0&0&0\\0&0&3&2&1&8\end{pmatrix}\Rightarrow rango(D)=3$$

5. Dadas las matrices $M=\begin{pmatrix}1&2&2\\0&2&3\\0&0&3\end{pmatrix}$ y $N=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\2&0&1\end{pmatrix}$, estudia para que valores de $\lambda\in\mathbb{R}$ el rango de la matriz $M-\lambda N$ es igual a 3.

Calculamos $M-\lambda N$:

$$M-\lambda N=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&2&3\\0&0&3\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\2&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&2&3\\0&0&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&0&\lambda\\2\lambda&0&\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-\lambda&2&2\\0&2&3-\lambda\\-2\lambda&0&3-\lambda\end{pmatrix}$$

$$|M-\lambda N|=2(1-\lambda)(3-\lambda)-4\lambda(3-\lambda)+8\lambda=\ldots=6\lambda^2-12\lambda+6$$

Para que el rango sea 3, el determinante tiene que ser distinto de cero:

$$|M-\lambda N|=0\Leftrightarrow 6\lambda^2-12\lambda+6=0\Leftrightarrow\lambda=1$$

Por tanto, $\boxed{\text{rango}(M-\lambda N)=3\quad\forall\lambda\in\mathbb{R}-\{3\}}$

6. Consideremos la matriz $A=\begin{pmatrix}1&0&k\\0&k&1\end{pmatrix}$, con $k\in\mathbb{R}$. Demuestra que el rango de la matriz AA^T es siempre igual al rango de la matriz A^tA, cualquiera que sea el valor de $k\in\mathbb{R}$. (Recuerda que A^T representa la matriz traspuesta de A.

$$AA^t=\begin{pmatrix}1&0&k\\0&k&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&k\\k&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+k^2&k\\k&k^2+1\end{pmatrix}$$

$$|AA^t|=(1+k^2)(k^2+1)-k^2=k^4+k^2+1$$

$$A^tA=\begin{pmatrix}1&0\\0&k\\k&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&k\\0&k&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&k\\0&k^2&k\\k&k&k^2+1\end{pmatrix}$$

$$|A^tA|=k^2(k^2+1)-k^4-k^2=\cancel{k^4}+\cancel{k^2}-\cancel{k^4}-\cancel{k^2}=0$$

Como queremos que tengan el mismo rango, igualamos los valores de los determinantes, y obtenemos:

$k^4+k^2+1=0$ (ecuación bicuadradada)

$t=k^2$

$$t^2+t+1=0\Rightarrow t=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}\notin\mathbb{R}$$

Con esto, podemos asegurar que tienen el mismo rango, y es 2, para $k\neq0$ (ya que, si hubiésemos usado el método de Gauss, habríamos tenido que multiplicar por k, y eso lo podemos hacer siempre que $k\neq0$.

Estudiemos el caso $k=0$:

$$AA^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } \left|AA^T\right| = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{rango}\left(AA^T\right) = 2$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y tiene dos filas no nulas} \Rightarrow \text{rango}\left(A^T A\right) = 2$$

Por tanto, $\boxed{\text{rango}\left(AA^t\right) = 2 = \text{rango}\left(A^t A\right) \quad \forall k \in \mathbb{R}}$

7. a) Sean A y B matrices cuadradas de orden $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$, tales que B es la inversa de A:

- Si $|A| = 3$ razona cuánto vale $|B|$.
- ¿Cuál es el rango de B?

b) Calcula el determinante de la matriz cuadrada X de orden 3 que verifica:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 0 & 10 & -3 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

a) Como $B = A^{-1}$ se tiene que $AB = I$, luego $|AB| = |I| = 1$, y aplicando la correspondiente propiedad de los determinantes:

$$|A||B| = 1 \Rightarrow \boxed{|B| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{3}}$$

Por otra parte, como $|A| = 3$ y $|B| \neq 0$, se tiene que $\boxed{\text{rango}(A) = \text{rango}(B) = n \in \mathbb{N}}$.

b) $$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 0 & 10 & -3 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 0 & 10 & -3 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Calculamos la inversa:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2:10} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3/10 & 0 & 1/10 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-7F_2+F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3/10 & 0 & -7/10 & 0 \\ 0 & 0 & 21/10 & 0 & -7/10 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{10}{21}F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3/10 & 0 & 1/10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/3 & 10/21 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{3}{10}F_3+F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/3 & 10/21 \end{array}\right) \xrightarrow{-8F_3+F_1}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 8/3 & -80/21 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/3 & 10/21 \end{array}\right) \xrightarrow{2F_2+F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 8/3 & -74/21 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/3 & 10/21 \end{array}\right)$$

Calculamos X:

$$X=\begin{pmatrix}1 & 8/3 & -74/21\\ 0 & 0 & 1/7\\ 0 & -1/3 & 10/21\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 8 & -74/3\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 10/3\end{pmatrix}$$

INVERSA

8. Dada la matriz

$$A=\begin{pmatrix}a & 0 & 0 & -b\\ 0 & a & b & 0\\ 0 & -b & a & 0\\ b & 0 & 0 & a\end{pmatrix} \text{ con } a,b\in\mathbb{R},\ a\neq 0,\ b\neq 0$$

a) Calcula AA^T, donde A^T es la matriz traspuesta de A.
b) Razona que siempre existe la matriz inversa de A, independientemente de los valores $a,b\in\mathbb{R},\ \ a\neq 0, b\neq 0$.

a) $$AA^t=\begin{pmatrix}a & 0 & 0 & -b\\ 0 & a & b & 0\\ 0 & -b & a & 0\\ b & 0 & 0 & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & 0 & 0 & b\\ 0 & a & -b & 0\\ 0 & b & a & 0\\ -b & 0 & 0 & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2+b^2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & a^2+b^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a^2+b^2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & a^2+b^2\end{pmatrix}$$

b) $\exists A^{-1}\Leftrightarrow \det(A)\neq 0$

$$|A|=\begin{vmatrix}a & 0 & 0 & -b\\ 0 & a & b & 0\\ 0 & -b & a & 0\\ b & 0 & 0 & a\end{vmatrix}=a\begin{vmatrix}a & b & 0\\ -b & a & 0\\ 0 & 0 & a\end{vmatrix}-b\begin{vmatrix}0 & 0 & -b\\ a & b & 0\\ -b & a & 0\end{vmatrix}=aa^3-b\left(-b^3\right)=a^4+b^4\neq 0 \text{ ya que } a\neq 0 \text{ y } b\neq 0$$

Por tanto, $\exists A^{-1}\quad \forall a,b\in\mathbb{R}-\{0\}$.

11. Halla el valor de a para que la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 2\\ 1 & 0 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ -1 & 2 & -1 & a\end{pmatrix}$ no sea regular.

Solución:

$$|A|=\det\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 2\\ 1 & 0 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ -1 & 2 & -1 & a\end{pmatrix}\underset{F_1+F_4}{\overset{-F_1+F_2}{=\!=\!=}}\begin{vmatrix}1 & -1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 2+a\end{vmatrix}\underset{-F_2+F_4}{\overset{-F_2+F_3}{=\!=\!=}}\begin{vmatrix}1 & -1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 2+a\end{vmatrix}=$$

$$=1\cdot Adj\left(a_{11}\right)=1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 2+a\end{vmatrix}=2(2+a)=0$$

Para que la matriz no sea regular, $\det(A) = 0$, luego $2(a+2) = 0 \Rightarrow a = -2$