Aplicaciones del teorema de Bolzano

Teorema de Bolzano: Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$ y en los extremos del intervalo toma valores de signo contrario [signo $f(a) \neq$ signo $f(b)$], entonces $\exists c \in (a,b):\ f(c)=0$.

1. Demostrar que la ecuación $e^{-x}+2=x$ tiene al menos una solución real.

Solución:

La función $f(x)=e^{-x}+2-x$ es continua en $\mathbb{R}$, por ser suma de funciones continuas, y en particular es continua en $[0,3]$. Como además $f(0)=3>0$ y $f(3)<0$, aplicando el Teorema de Bolzano, $\exists c \in (0,3):\ f(c)=0$, esto es, $\exists c \in (0,3): e^{-c}+2-x=0$ (es decir, c es una solución real de la ecuación inicial).

2. Demostrar que existe al menos un número real x tal que $\operatorname{sen} x = x$.

Solución:

Consideramos la función $f(x)=\operatorname{sen} x - x$ que es continua en $\mathbb{R}$, por ser suma de funciones continuas, y en particular es continua en $[-\pi,\pi]$. Como además $f(-\pi)=\pi>0$ y $f(\pi)=-\pi<0$, aplicando el Teorema de Bolzano, $\exists c \in (-\pi,\pi):\ f(c)=0$, esto es, $\exists c \in (-\pi,\pi): \operatorname{sen}(c)-c=0$ (es decir, c es una solución real de la ecuación inicial). Como consecuencia, $\exists x \in (-\pi,\pi)$ (que es c) tal que $\operatorname{sen} x = x$.

3. Como aplicación del Teorema de Bolzano prueba que las funciones $f(x)=\log x$ y $g(x)=e^{-x}$ se cortan en un punto.

Solución:

Consideramos la función $h(x)=f(x)-g(x)=\log x - e^{-x}$ que es continua en $\mathbb{R}^{+}$, por ser diferencia de funciones continuas, y en particular es continua en $[1,2]$. Como además $f(1)<0$ y $f(2)>0$, aplicando el Teorema de Bolzano, $\exists c \in (1,2): h(c)=0$, esto es, $(c,h(c))$ es el punto de corte de ambas funciones.

4. ¿Tiene la ecuación $x^5-3x=1$ alguna solución comprendida entre 1 y 2?

Solución:

Consideramos la función $f(x)=x^5-3x-1$ que es continua en $\mathbb{R}$, por una función polinómica, y en particular es continua en $[1,2]$. Como además $f(1)=-3<0$ y $f(2)=25>0$, aplicando el Teorema de Bolzano, $\exists c \in (1,2):\ f(c)=0$, esto es, la ecuación dada tiene una solución en el intervalo pedido.

5. Como aplicación del teorema de Bolzano, razona que la ecuación $x^2 \operatorname{sen} x = \log x$ (donde $\log x$ representa el logaritmo natural de x) tiene al menos una solución.

Solución:
Consideramos la función $h(x) = x^2 \operatorname{sen} x - \log x$, que es continua en $(0,+\infty)$ por ser diferencia de funciones continuas en $(0,+\infty)$.

- h es continua en $(0,+\infty)$, luego en particular, en cualquier intervalo cerrado $[a,b]$ contenido en $(0,+\infty)$.
- $[a,b] = [2,6]$

  $h(2) > 0$

  $h(6) < 0$

Por el teorema de Bolzano, $\exists c \in (2,6)$ tal que $h(c) = 0$, esto es, la ecuación $x^2 \operatorname{sen} x = \log x$ tiene al menos una solución en el intervalo $(2,6)$.

6. Como aplicación del teorema de Bolzano, razona que la ecuación $x^3 + \log x = -\sqrt{x}$ (donde $\log x$ representa el logaritmo natural de x) tiene al menos una solución.

Solución:
Consideramos la función $h(x) = x^3 + \log x + \sqrt{x}$, que es continua en $(0,+\infty)$ por ser suma de funciones continuas en $(0,+\infty)$.

- h es continua en $(0,+\infty)$, luego en particular, en cualquier intervalo cerrado $[a,b]$ contenido en $(0,+\infty)$.
- $[a,b] = [0{,}1\ ,\ 1]$

  $h(0{,}1) < 0$

  $h(1) > 0$

Por el teorema de Bolzano, $\exists c \in (0{,}1\ ,\ 1)$ tal que $h(c) = 0$, esto es, la ecuación $x^3 + \log x = -\sqrt{x}$ tiene al menos una solución en el intervalo $(0{,}1\ ,\ 1)$.

7. ¿Se puede aplicar el teorema de Bolzano a la función $f(x) = x - \log^2 x$ (donde $\log x$ representa el logaritmo natural de x) en el intervalo $[0{,}1\ ,\ 0{,}5]$?

Solución:
La función $f(x) = x - \log^2 x$, que es continua en $(0,+\infty)$ por ser diferencia de funciones continuas en $(0,+\infty)$.

- f es continua en $[0{,}1\ ,\ 0{,}5]$
- $f(0{,}1) < 0$

  $f(0{,}5) > 0$

Por el teorema de Bolzano, $\exists c \in (0{,}1\ ,\ 0{,}5)$ tal que $f(c) = 0$.

8. ¿ $\exists x \in \mathbb{R}$ tal que $3\operatorname{sen} x = e^{-x}\cos x$?

Solución:

La igualdad anterior es cierta si la función $f(x) = 3\operatorname{sen} x - e^{-x}\cos x$ verifica el teorema de Bolzano en algún intervalo.

Consideramos el intervalo cerrado $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Se tiene que:

1) f es continua en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ya que es diferencia de funciones continuas en $\mathbb{R}$.
2) $f(0) = -1 < 0$
3) $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 > 0$

Aplicando el teorema de Bolzano podemos asegurar que $f(x) = 0$ para algún $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ y, por tanto, que la ecuación anterior tiene, al menos, una solución en dicho intervalo.

9. ¿Alguna de las ecuaciones $\pi^x = e$ o $\Phi^x = e$ tiene solución en el intervalo $(0, 2)$?

Solución:

1) Consideramos la función $f(x) = \pi^x - e$, que verifica:

a) f es continua en $[0, 2]$ por serlo en $\mathbb{R}$ (es una función exponencial)

b) $f(0) = \pi^0 - e = 1 - e < 0$

c) $f(2) = \pi^2 - e > 0$

Aplicando el teorema de Bolzano, $\exists c \in (0, 2)$ tal que $f(c) = 0$, esto es, c es una solución de la ecuación $\pi^x = e$.

2) Consideramos la función $g(x) = \Phi^x - e$, que verifica:

a) g es continua en $[0, 2]$ por serlo en $\mathbb{R}$ (es una función exponencial)

b) $g(0) = \Phi^0 - e = 1 - e < 0$

c) $g(2) = \Phi^2 - e < 0$

No se verifican las hipótesis del teorema de Bolzano y, por tanto, no podemos asegurar que dicha ecuación tenga una solución en el intervalo que nos dan.

10. ¿Se puede aplicar el teorema de Bolzano a la función $f(x) = \dfrac{\log x + 2x}{x - 2}$ en el intervalo $(0,1)$?

En caso negativo, encuentra algún intervalo en el que la función se anule.

(Notacion: $\log$ representa el logaritmo natural)

Solución:

La función f está definida en $(0,+\infty)-\{2\}=(0,2)\cup(2,+\infty)$, luego no es continua en $[0,1]$ y, por tanto, no podemos aplicar el teorema de Bolzano en dicho intervalo.

Consideramos el intervalo $(0{,}1\ ,\ 1)$. Se tiene que:

a) f es continua en $[0{,}1\ ,\ 1]$ (es un cociente de funciones continuas, ya que el numerador es diferencia de funciones continuas y el denominador no se anula en dicho intervalo)

b) $f(0{,}1)=\dfrac{\log 0{,}1+2\cdot 0{,}1}{0{,}1-2}\simeq 1{,}1>0$

c) $f(1)=\dfrac{\log 1+2\cdot 1}{1-2}=-2<0$

Aplicando el teorema de Bolzano, $\exists c\in(0,1)$ tal que $f(c)=0$, esto es, la ecuación $\log x+2x=0$ tiene, al menos, una solución en el intervalo $(0,1)$.

11. ¿Alguna de las soluciones de la ecuación $(x-3)^2+1=\dfrac{3}{2}$ está en el intervalo $[4,5]$? Indicación: no se puede resolver la ecuación de segundo grado.

Solución:

La función $f(x)=(x-3)^2+1$ es continua en $\mathbb{R}$ y, por tanto, continua en el intervalo cerrado $[4,5]$.

Aplicando el teorema de Weierstrass, f tiene máximo y mínimo absoluto en $[4,5]$.

Ahora bien, como dicha función es una parábola, abierta hacia arriba, su mínimo absoluto lo tiene en el vértice y su máximo absoluto en uno de los extremos del intervalo (solo tiene uno ya que el intervalo no es simétrico respecto del eje de simetría de la parábola):

Mínimo absoluto: $\left(\dfrac{-b}{2a}, f\left(\dfrac{-b}{2a}\right)\right)=(3, f(3))=(3,1)$

Máximo absoluto: $f(5)=5$ (ya que $f(4)=2$)

Como $\dfrac{3}{2}\in[1,5]$, alguna de las soluciones de la ecuación $(x-3)^2+1=\dfrac{3}{2}$ está en el intervalo $[4,5]$.

Comprobación:

Las soluciones de $(x-3)^2+1=\dfrac{3}{2}$ son: $x=\begin{cases} 3-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\simeq 2{,}29 \\ 3+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\simeq 3{,}71\in[4,5] \end{cases}$

12. Enuncia correctamente el teorema de Bolzano y como aplicación comprueba que la ecuación $x^2=x\operatorname{sen}x+\cos x$ tiene al menos una solución, razonando la respuesta.

Solución:

a) **Teorema de Bolzano**: Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$ y en los extremos del intervalo toma valores de signo contrario [signo $f(a)\neq$ signo $f(b)$], entonces $\exists c\in(a,b):\ f(c)=0$.

b) Consideramos la función $h(x)=x^2-x\operatorname{sen}x-\cos x$ que es una función continua en $\mathbb{R}$, por ser suma de funciones continuas en $\mathbb{R}$. Dicha función verifica:

i) $h(x)$ es continua en cualquier intervalo cerrado $[a,b]$

Podemos considerar $[a,b]=[0,\pi]$, $\left[\frac{\pi}{4},\pi\right]$, $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$...

ii) $h(0)<0$

iii) $h(\pi)>0$

Por el teorema de Bolzano, $\exists c\in(0,\pi)$ tal que $h(c)=0$, es decir, la ecuación $x^2=x\operatorname{sen}x+\cos x$ tiene, al menos, una solución en $(0,\pi)$.

13. Demostrar que la ecuación $x^5+4x^3+3=0$ tiene, al menos, una raíz real. ¿En qué resultado te basas?

Solución:

Consideramos el intervalo $[-1,1]$:

- $f(x)=x^5+4x^3+3$ es continua en $\mathbb{R}$ por ser una función polinómica, luego en particular, es continua en $[-1,1]$.
- $f(-1)=-2<0$
- $f(1)=8>0$

Por el teorema de Bolzano, $\exists c\in(-1,1): f(c)=0$, es decir, la $x^5+4x^3+3=0$ tiene una raíz real en $(-1,1)$.

14. ¿El polinomio x^4-4x^2-1 tiene alguna raíz negativa?

Solución:

Como la raíz tiene que ser negativa, el intervalo tiene que estar en la parte negativa del eje OX. Probamos:

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=-1<0 \\ f(-1)=-4 \\ f(-2)=-1 \\ f(-3)=44>0 \end{array}\right\} \Rightarrow [a,b]=[-3,0]$$

Como $f(x)=x^4-4x^2-1$ es una función continua en $\mathbb{R}$, por ser una función polinómica, en particular es continua en $[-3,0]$, y cambia de signo en los extremos de dicho intervalo, por el teorema de Bolzano, $\exists c\in(-3,0): f(c)=0$. Es decir, la ecuación x^4-4x^2-1 tiene una raíz negativa (ya que está en $(-3,0)$).

15. ¿Se puede asegurar, utilizando el teorema de Bolzano, que la función $f(x)=\operatorname{tg}x$ tiene una raíz en el intervalo $\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$?

Solución:

La función tangente es continua en $\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}(2k+1) \text{ con } k\in\mathbb{Z}\right\}$ y, por tanto, en $\frac{\pi}{2}$ tiene una discontinuidad, luego no se puede aplicar el teorema de Bolzano es dicho intervalo.

16. Se considera la ecuación $x^3-x^2+mx-6=0$ con $m\in\mathbb{R}$. Utilizando el teorema de Bolzano, demostrar:

a) Si $m>-3$, entonces la ecuación tiene al menos una raíz real menor que 2.
b) Si $m<-3$, entonces la ecuación tiene al menos una raíz real menor que 2.

Solución:

a) Sabemos que, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty<0$ y $f(2)=8+4+2m-6=6+2m>0$ si $m>-3$

Así, si $m>-3$, en el intervalo $(-\infty,2)$, la función $f(x)$ cambia de signo, y, por el teorema de Bolzano, tiene al menos una raíz en dicho intervalo.

b) Sabemos que, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty>0$ y $f(2)=8+4+2m-6=6+2m<0$ si $m<-3$

Así, si $m<-3$, en el intervalo $(2,+\infty)$, la función $f(x)$ cambia de signo, y, por el teorema de Bolzano, tiene al menos una raíz en dicho intervalo.

Aplicaciones del teorema de Weierstrass

Teorema de Weierstrass:

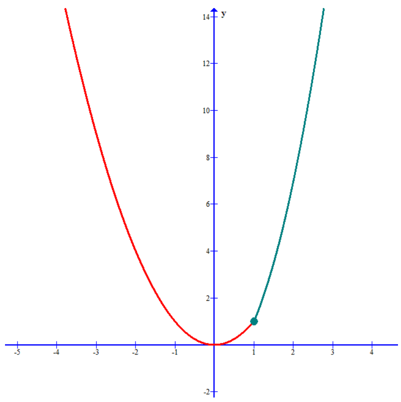
Si $f(x)$ es una función continua en $[a,b]$, entonces

$$\exists c,d \in [a,b]: f(c) \leq f(x) \leq f(d) \qquad \forall x \in [a,b].$$

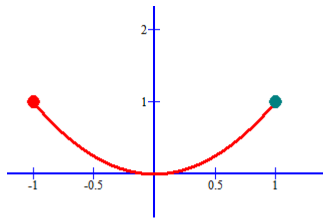
Reformulación del Teorema de Weierstrass:

Una función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ alcanza su valor máximo y su valor mínimo en dicho intervalo.

1. Consideramos la función $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x<1 \\ 2x^2-2 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$ y la representamos gráficamente:



Teniendo en cuenta la representación gráfica, f es continua en $\mathbb{R}$ (se puede comprobar analíticamente) y, por tanto, lo es en cualquier intervalo cerrado que consideremos, por ejemplo, en $[-1,1]$.

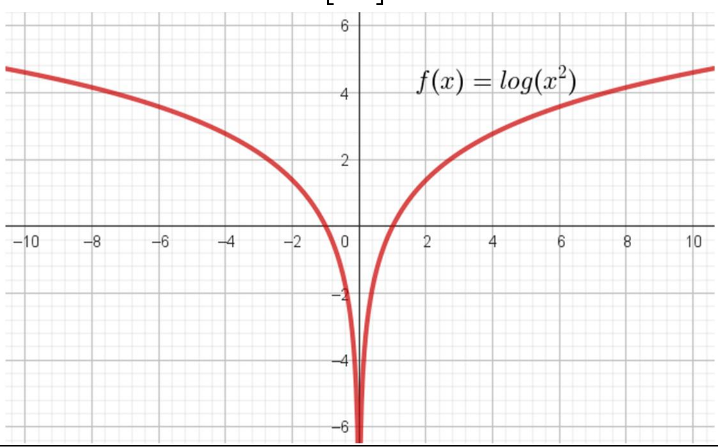


El teorema de Weierstrass afirma que f tiene, al menos un máximo y un mínimo absolutos en dicho intervalo.
En nuestro caso, tiene:
Máximos absolutos: $(-1,1)$ y $(1,1)$

Mínimo absoluto: $(0,0)$

2. La función $f(x)=\log(x^2)$ es continua en $\mathbb{R}-\{0\}$, luego verifica el teorema de Weierstrass en cualquier intervalo cerrado que no contenga al cero. Por ejemplo, en $[1,2]$.

Como consecuencia del teorema de Weierstrass, la función $f(x)=\log(x^2)$ tiene, al menos, un máximo y un mínimo absolutos en el intervalo $[1,2]$.



Hay que observar que dicho teorema nos dice que dichos extremos absolutos existen, pero no nos dice nada de dónde están.