Estudio de la continuidad de una función

1. **a)** Definición de función continua en un punto.

b) Dada la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{e}}{2-x} & \text{si} \quad x\le 1 \\ \left(\dfrac{x+1}{2}\right)^{\frac{2}{x^2-1}} & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$, estudia razonadamente su continuidad.

Solución:

a) Una función $f(x)$ es continua en $x=a\in \mathrm{Dom}(f)$ cuando $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

b) Cada una de las funciones componentes es continua en su dominio por ser un cociente (bien definido) y una función potencial-exponencial.
Estudiamos la continuidad en el punto de unión:
Continuidad en $x=1$: ¿$\exists \lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$?

$$\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1-}\frac{\sqrt{e}}{2-x}=\frac{\sqrt{e}}{1}=\sqrt{e}$$

$$\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1+}\left(\frac{x+1}{2}\right)^{\frac{2}{x^2-1}}=\left[1^{\infty}\right]=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

$$\lim_{x\to 1+}\frac{2}{x^2-1}\left(\frac{x+1}{2}-1\right)=\lim_{x\to 1+}\left(\frac{2}{x^2-1}\cdot\frac{x+1-2}{2}\right)=\lim_{x\to 1+}\frac{2(x-1)}{2\left(x^2-1\right)}=\lim_{x\to 1+}\frac{2\cancel{(x-1)}}{2(x+1)\cancel{(x-1)}}=$$

$$=\lim_{x\to 1+}\frac{2}{2(x+1)}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

Por tanto, $\exists \lim\limits_{x\to 1} f(x)=\sqrt{e}$ y como $f(1)=\dfrac{\sqrt{e}}{2-1}=\sqrt{e}$, se tiene que $f(x)$ es continua en $x=1$.

Conclusión: $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

2. Estudia la continuidad en todo $\mathbb{R}$ de la función $f(x)=\dfrac{2x^3-x^2-x}{x^2-1}$ indicando los tipos de discontinuidad que aparecen.

Solución:

Una función racional es continua en su dominio, luego es continua en $\mathbb{R}-\{-1,1\}$. Estudiamos las discontinuidades de f en dichos puntos:

Discontinuidad en $x=1$:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{2x^3-x^2-x}{x^2-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{x\cancel{(x-1)}(2x+1)}{(x+1)\cancel{(x-1)}}=\lim_{x\to 1}\frac{x(2x+1)}{x+1}=\frac{3}{2}\Rightarrow \exists \lim_{x\to 1} f(x)=\frac{3}{2} \qquad \text{y,}$$

por tanto, f tiene una discontinuidad evitable en $x=1$ (se evita definiendo $f(1)=\dfrac{3}{2}$).

Discontinuidad en $x=-1$:

$\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^3-x^2-x}{x^2-1}=\left[\dfrac{-2}{0}\right]\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to -1-} f(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to -1+} f(x)=+\infty\end{cases}\Rightarrow$ f tiene una discontinuidad asintótica en $x=-1$.

3. Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\begin{cases}|x+2| & \text{si} \quad x<-1\\ x^2 & \text{si} \quad -1\le x<1\\ 2x+1 & \text{si} \quad x>1\end{cases}$ b) $g(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x-1}}{x-1} & \text{si} \quad x>1\\ k & \text{si} \quad x=1\end{cases}$

Solución:

a) Cada una de las funciones componentes es continua en su dominio por ser funciones polinómicas.

Estudiamos la continuidad en los puntos de unión:
Continuidad en $x=-1$: ¿$\exists\lim\limits_{x\to -1} f(x)=f(-1)$?
Para ver si existe el límite, estudiamos los límites laterales:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1-}|x+2|=1\\ \lim\limits_{x\to -1+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1+} x^2=1\end{array}\right\}\Rightarrow\exists\lim_{x\to -1} f(x)=1$$

Ahora calculamos el valor de la función en $x=-1$:
$f(-1)=(-1)^2=1$

Como $\exists\lim\limits_{x\to -1} f(x)=1=f(-1)$, se tiene que f es continua en $x=-1$.

Continuidad en $x=1$: ¿$\exists\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$?
Para ver si existe el límite, estudiamos los límites laterales:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1-} x^2=1\\ \lim\limits_{x\to 1+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+}(2x+1)=3\end{array}\right\}\Rightarrow\nexists\lim_{x\to -1} f(x)$$

Como $\nexists\lim\limits_{x\to -1} f(x)$, se tiene que f no es continua en $x=1$.

Conclusión: f es continua en $\mathbb{R}-\{1\}$.

b) Cada una de las funciones componentes es continua en su dominio, ya que la primera rama es un cociente con numerador bien definido y cuyo denominador no se anula.

Estudiamos la continuidad en el punto de unión:
Continuidad en $x=1$: ¿$\exists\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$?
Estudiamos si existe el límite: en este caso solo hay que estudiar el límite por la derecha.

$$\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1+}\frac{\sqrt{x-1}}{x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1+}\sqrt{\frac{x-1}{(x-1)^2}}=\lim_{x\to 1+}\sqrt{\frac{1}{x-1}}=+\infty\Rightarrow\nexists\lim_{x\to 1} f(x)$$

Como $\nexists \lim_{x \to -1} f(x)$, se tiene que f no es continua en $x=1$.

Conclusión: $\nexists k \in \mathbb{R}$ para que f sea continua en $x=1$.

4. Calcula el valor de k para que la función $f(x)$ sea continua:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} & \text{si} \quad x>1 \\ k & \text{si} \quad x=1 \end{cases}$$

Solución:
Cada una de las funciones componentes es continua en su dominio, ya que la primera rama es un cociente con numerador bien definido y cuyo denominador no se anula.

Estudiamos la continuidad en el punto de unión:
Continuidad en $x=1$: ¿$\exists \lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$?
Estudiamos si existe el límite: en este caso solo hay que estudiar el límite por la derecha.

$$\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1+} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 1+} \frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)} = \lim_{x \to 1+} \frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}\left(\sqrt{x}+1\right)} = \frac{1}{2} \Rightarrow \exists \lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

Ahora calculamos el valor de la función en $x=1$:
$f(1)=k$
Imponemos que $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$ y obtenemos: $k=2$
Conclusión: para $k=2$ la función f es continua en $x=1$ y, como consecuencia, en $[1,+\infty)$.

5. Calcula a y b para que $f(x)$ sea continua en $x=0$ y en $x=1$:

$$f(x)=\begin{cases} e^x+a & \text{si} \quad x \le 0 \\ ax^2+2 & \text{si} \quad 0<x\le 1 \\ \dfrac{b}{2x} & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

Solución:
Continuidad en $x=0$: ¿$\exists \lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$?
Para ver si existe el límite, estudiamos los límites laterales:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} \left(e^x+a\right) = 1+a \\ \lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} \left(ax^2+2\right) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{para que } \exists \lim_{x \to 0} f(x) \text{ se tiene que cumplir que } 1+a=2$$

Ahora calculamos el valor de la función en $x=0$:
$f(0)=e^0+a=1+a$
Para que $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$, se tiene que cumplir que $\boxed{1+a=2}$.

Continuidad en $x=1$: ¿$\exists \lim_{x\to 1} f(x)= f(1)$?

Para ver si existe el límite, estudiamos los límites laterales:

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1-}\left(ax^2+2\right)=a+2\\ \lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1+}\frac{b}{2x}=\frac{b}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow \text{para que } \exists \lim_{x\to 1} f(x) \text{ se tiene que cumplir que } a+2=\frac{b}{2}.$$

Ahora calculamos el valor de la función en $x=1$:

$f(1)=a+2$

Para que $\lim_{x\to 1} f(x)= f(1)$, se tiene que cumplir que $\boxed{a+2=\frac{b}{2}}$.

Resolvemos el sistema $\begin{cases}1+a=2\\ a+2=\frac{b}{2}\end{cases}\Rightarrow (a,b)=(1,6)$.

Conclusión: para $(a,b)=(1,6)$ la función $f(x)$ es continua en $x=0$ y en $x=1$.

6. Se considera la función $f(x)=\begin{cases}\log x & \text{si} \quad 0<x<1\\ ax^2+b & \text{si} \quad x\geq 1\end{cases}$. Determina los valores de a y b para que $f(x)$ sea continua y $f(2)=3$.

Solución:

Para que f sea continua en $x=1$ (ya que cada una de las ramas lo es en su dominio, por se una función logarítmica bien definida y una función polinómica) se tiene que verificar:

$$\exists \lim_{x\to 1} f(x)= f(1)$$

Como además queremos que $f(2)=3$, hay que resolver el sistema correspondiente.

Continuidad en $x=1$: ¿$\exists \lim_{x\to 1} f(x)= f(1)$?

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1-}\log x=0\\ \lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1+}\left(ax^2+b\right)=a+b\end{array}\right\}\Rightarrow \text{para que } \exists \lim_{x\to 1} f(x) \text{ se tiene que cumplir que } a+b=0.$$

Ahora calculamos el valor de la función en $x=1$:

$f(1)=a+b$

Para que $\lim_{x\to 1} f(x)= f(1)$, se tiene que cumplir que $\boxed{a+b=0}$.

Como, además $f(2)=3$, se tiene que $\boxed{4a+b=3}$

Resolvemos el sistema correspondiente: $\begin{cases}a+b=0\\ 4a+b=3\end{cases}\Rightarrow (a,b)=(1,-1)$

Conclusión: para $(a,b)=(1,-1)$ se verifican las condiciones del enunciado.

7. Dada la función $f\left(x\right)=\begin{cases}2^{x-1} & \text{si} \quad x\le 1\\ x-2 & \text{si} \quad 1<x<2\\ \log\left(x-1\right) & \text{si} \quad x\ge 2\end{cases}$

donde $\log$ es el logaritmo neperiano, estudia la continuidad de la función $f\left(x\right)$ en $x=1$ y en $x=2$, y clasifica el tipo de discontinuidad si las hubiera.

Solución:

Continuidad en $x=1$: ¿$\exists\lim\limits_{x\to 1} f\left(x\right)=f\left(1\right)$?

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1-} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1-} 2^{x-1}=2^0=1\\ \lim\limits_{x\to 1+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1+}\left(x-2\right)=-1\end{array}\right\}\Rightarrow \nexists\lim\limits_{x\to 1} f\left(x\right)\Rightarrow f \text{ no es continua en } x=1$$

f presenta una discontinuidad de salto finito (de salto $1-\left(-1\right)=2$).

Continuidad en $x=2$: ¿$\exists\lim\limits_{x\to 2} f\left(x\right)=f\left(2\right)$?

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2-} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 2-}\left(x-2\right)=0\\ \lim\limits_{x\to 2+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 2+}\log\left(x-1\right)=\log 1=0\end{array}\right\}\Rightarrow \exists\lim\limits_{x\to 1} f\left(x\right)=0$$

Ahora calculamos el valor de la función en $x=2$:

$f\left(2\right)=1$

Como $\exists\lim\limits_{x\to 2} f\left(x\right)=f\left(2\right)\Rightarrow f$ es continua en $x=2$.

8. Dada la función

$$f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{3}{x-2} & \text{si} \quad x<2\\ \cos\left(\pi x\right) & \text{si} \quad 2\le x\le 3\\ \dfrac{\ln\left(x-2\right)}{3-x} & \text{si} \quad x>3\end{cases}$$

determina razonadamente los puntos en los que la función es continua, calcula los puntos en los que es discontinua y clasifica el tipo de discontinuidad, si los hubiera.

Solución:

Cada una de las funciones componentes es continua en su dominio por ser: la primera, una función racional cuyo denominador no se anula; la segunda la función coseno que es continua en $\mathbb{R}$; y la tercera un cociente en el que el numerador está bien definido y el denominador no se anula.

Estudiamos la continuidad/discontinuidad en los puntos de unión, esto es, en 2 y en 3.

Continuidad en $x=2$: ¿$\exists\lim\limits_{x\to 2} f\left(x\right)=f\left(2\right)$?

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2-} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 2-}\dfrac{3}{x-2}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 2+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 2+}\cos\left(\pi x\right)=\cos\left(2\pi\right)=1\end{array}\right\}\Rightarrow \nexists\lim\limits_{x\to 2} f\left(x\right)\Rightarrow f \text{ no es continua en } x=2$$

f presenta una discontinuidad de salto infinito en $x=2$.

Continuidad en $x=3$: ¿$\exists \lim\limits_{x\to 3} f(x) = f(3)$?

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3-} \cos(\pi x) = \cos(3\pi) = -1 \\ \lim\limits_{x\to 3+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3+} \dfrac{\log(x-1)}{3-x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to 1} f(x) = -1$$

Ahora calculamos el valor de la función en $x=3$:

$f(3) = -1$

Como $\exists \lim\limits_{x\to 3} f(x) = -1 = f(3) \Rightarrow f$ es continua en $x=3$.

9. Estudia la continuidad en todo $\mathbb{R}$ de la función $f(x) = \dfrac{2x^3 - x^2 - x}{x^2 - 1}$ indicando los tipos de discontinuidad que aparecen.

Solución:

Una función racional es continua en su dominio, luego es continua en $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$. Estudiamos las discontinuidades de f en dichos puntos:

Discontinuidad en $x=1$:

$$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{2x^3 - x^2 - x}{x^2 - 1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x\cancel{(x-1)}(2x+1)}{(x+1)\cancel{(x-1)}} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x(2x+1)}{x+1} = \frac{3}{2} \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to 1} f(x) = \frac{3}{2}$$ y,

por tanto, f tiene una discontinuidad evitable en $x=1$ (se evita definiendo $f(1) = \dfrac{3}{2}$).

Discontinuidad en $x=-1$:

$\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x^3 - x^2 - x}{x^2 - 1} = \left[\dfrac{-2}{0}\right] = -\infty \Rightarrow$ y, por tanto, f tiene una discontinuidad asintótica en $x=-1$.

10. Clasifica las discontinuidades de la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 2x}$.

Solución:

Los puntos de discontinuidad de una función racional son los puntos en los que se anula el denominador:

$$x^2 - 2x = x(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Discontinuidad en $x=0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 2x} = \left[\dfrac{-4}{0}\right] = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 2x} = \left[\dfrac{-4}{0}\right] = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ tiene una discontinuidad asintótica en } x = 0.$$

Discontinuidad en $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2-} \dfrac{x^2-4}{x^2-2x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 2-} \dfrac{(x+2)(x-2)}{x(x-2)} = \lim\limits_{x\to 2-} \dfrac{x+2}{x} = 2 \\ \lim\limits_{x\to 2+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2+} \dfrac{x^2-4}{x^2-2x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 2+} \dfrac{(x+2)(x-2)}{x(x-2)} = \lim\limits_{x\to 2+} \dfrac{x+2}{x} = 2\end{array}\right\} \Rightarrow \exists \lim_{x\to 2} f(x) = 2$$

Por tanto, tiene una discontinuidad evitable en $x = 2$.

11. ¿Existe algún $a \in \mathbb{R}$ para que la función $f(x) = \dfrac{x^2+x-a}{x^2+3x-4}$ tenga una discontinuidad evitable en $x = 1$?

Solución:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x+a}{x^2+3x-4} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x+a}{(x-1)(x+4)}$$

Para que el denominador no se anule, el numerador tiene que tener como factor a $x-1$, luego aplicando la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 1 & a \\ 1 & & 1 & 2 \\ \hline & 1 & 2 & 0 \end{array} \quad \Rightarrow a+2=0 \Rightarrow a=-2$$

Así:

$$x^2+x+a = (x-1)(x+2)$$

y

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x^2+3x-4} = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+2)}{\cancel{(x-1)}(x+4)} = \lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x+4} = \frac{3}{5}$$

Luego definiendo $f(1) = \dfrac{3}{5}$ evitamos la discontinuidad.