RESOLUCIÓN DE INDETERMINACIONES (Sin usar la regla de L'Hôpital)

1. *Calcula los siguientes limites, resolviendo la correspondiente indeterminación:*

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x^2+3}{2x^2-7x}$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4^x-2}{4^x+2}$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{3x^2-2x}}{\sqrt{x^2+4}}$

4) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3+x^2-4x-4}{x^2+x-6}$

5) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{\sqrt{6+x}-3}$

6) $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{x}{x-2}-\dfrac{x^2}{x^2-4}\right)$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt{x^2+5}-x\right)\right]$

8) $\lim\limits_{x\to0}\left[\left(\dfrac{2}{\sqrt{x+1}}-2\right)\cdot\dfrac{1}{x}\right]$

9) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+5}{x}\right)^x$

10) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{2+3^{\frac{1}{x}}}$

Soluciones:

1)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{6x^2+3}{2x^2-7x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{6x^2+3}{x^2}}{\frac{2x^2-7x}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{6x^2}{x^2}+\frac{3}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{7x}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6+\frac{3}{x^2}}{2-\frac{7}{x^2}}=\frac{6}{2}=3$$

2)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4^x-2}{4^x+2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{4^x-2}{4^x}}{\frac{4^x+2}{4^x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{4^x}{4^x}-\frac{2}{4^x}}{\frac{4^x}{4^x}+\frac{2}{4^x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{2}{4^x}}{1+\frac{2}{4^x}}=\frac{1-0}{1+0}=1$$

3)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{3x^2-2x}}{\sqrt{x^2+4}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{3x^2-2x}{x^2+4}}=\sqrt{\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-2x}{x^2+4}}=\sqrt{3}$$

4)

$$\lim_{x\to2}\frac{x^3+x^2-4x-4}{x^2+x-6}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to2}\frac{\cancel{(x-2)}\left(x^2+3x+2\right)}{\cancel{(x-2)}\left(x+3\right)}=\lim_{x\to2}\frac{x^2+3x+2}{x+3}=\frac{2^2+3\cdot2+2}{2+3}=\frac{12}{5}$$

5)

$$\lim_{x\to3}\frac{x-3}{\sqrt{6+x}-3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)\left(\sqrt{6+x}+3\right)}{\left(\sqrt{6+x}-3\right)\left(\sqrt{6+x}+3\right)}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)\left(\sqrt{6+x}+3\right)}{\left(\sqrt{6+x}\right)^2-3^2}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)\left(\sqrt{6+x}+3\right)}{6+x-9}=$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{\cancel{(x-3)}\left(\sqrt{6+x}+3\right)}{\cancel{x-3}}=\lim_{x\to3}\left(\sqrt{6+x}+3\right)=\sqrt{6+3}+3=6$$

6)

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x}{x-2}-\frac{x^2}{x^2-4}\right)=[\infty-\infty]\underset{(1)}{=}\lim_{x\to 2}\left(\frac{x(x+2)}{(x-2)(x+2)}-\frac{x^2}{x^2-4}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x-x^2}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{2x}{x^2-4}\ \text{No existe}$$

ya que

$$\lim_{x\to 2-}\frac{2x}{x^2-4}=-\infty \ \text{ y } \ \lim_{x\to 2+}\frac{2x}{x^2-4}=+\infty$$

Donde en (1) hemos tenido en cuenta que:

$$x^2-4=(x+2)(x-2)$$

7)

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt{x^2+5}-x\right)\right]=[\infty-\infty]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\sqrt{x^2+5}-x\right)\left(\sqrt{x^2+5}+x\right)}{\sqrt{x^2+5}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(x^2+5-x^2\right)}{\sqrt{x^2+5}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x}{\sqrt{x^2+5}+x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{5x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{5}{x^2}}+\frac{x}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}+1}=\frac{5}{2}$$

8)

$$\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{2}{\sqrt{x+1}}-2\right)\cdot\frac{1}{x}\right]=[\infty\cdot 0]=\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{2-2\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}\right)\cdot\frac{1}{x}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2-2\sqrt{x+1}}{x\sqrt{x+1}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(2-2\sqrt{x+1}\right)\left(2+2\sqrt{x+1}\right)}{x\sqrt{x+1}\left(2+2\sqrt{x+1}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{4-4(x+1)}{x\sqrt{x+1}\left(2+2\sqrt{x+1}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{-4\cancel{x}}{\cancel{x}\sqrt{x+1}\left(2+2\sqrt{x+1}\right)}=$$

$$=\frac{-4}{\sqrt{1}\left(2+2\sqrt{1}\right)}=-1$$

9)

Primera forma

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+5}{x}\right)^x=\left[1^\infty\right]=e^5$$

$$\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{x+5}{x}-1\right)=[\infty\cdot 0]=\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{x+5-x}{x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{5\cancel{x}}{\cancel{x}}=5$$

Segunda forma

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+5}{x}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^x=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{5}}\right)^{\frac{x}{5}\cdot 5}=e^5$$

10)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{2+3^{\frac{1}{x}}}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{1}{2+3^{\frac{1}{x}}}=\dfrac{1}{2+0}=\dfrac{1}{2}\ \text{ ya que } 3^{\frac{1}{x}}\xrightarrow[x\to 0-]{}0\\ \lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{1}{2+3^{\frac{1}{x}}}=0\ \text{ ya que } 3^{\frac{1}{x}}\xrightarrow[x\to 0+]{}+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow\nexists\lim_{x\to 0}\frac{1}{2+3^{\frac{1}{x}}}$$

2. *Calcula los siguientes límites:*

1) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{x^2-4}{x+1}\cdot\frac{x^2+4}{x^2-2x}\right)$

2) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x+2}{x-1}-\frac{x+5}{x^2-1}\right)$

3) $\lim\limits_{x\to 2}(x-1)^{\frac{3}{x-2}}$

4) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{3x^2-5}{3x^2+x}\right)^{x^2-1}$

5) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{4x^2-5}-(2x-3)\right)$

6) $\lim\limits_{x\to 2+}\frac{\sqrt{2x-4}}{x-2}$

7) $\lim\limits_{x\to 1-}\frac{2x^2-2}{x^2-2x+1}$

8) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x+8}-3}$

9) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}+1}$

10) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x^2+4}{x+4}\right)^{\frac{x}{x-1}}$

11) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}}$

12) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x+7}-3}$

Soluciones:

1)

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-4}{x+1}\cdot\frac{x^2+4}{x^2-2x}\right)=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-4)(x^2+4)}{(x+1)(x^2-2x)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)\cancel{(x-2)}(x^2+4)}{(x+1)x\cancel{(x-2)}}=\frac{32}{6}=\frac{16}{3}$$

2)

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x+2}{x-1}-\frac{x+5}{x^2-1}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to 1}\frac{(x+2)(x+1)-(x+5)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+3)}{(x+1)\cancel{(x-1)}}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x+3}{x+1}=\frac{4}{2}$$

3)

$$\lim_{x\to 2}(x-1)^{\frac{3}{x-2}}=\left[1^{\infty}\right]=e^2$$

$$\text{donde } \lim_{x\to 2}\frac{3}{x-2}(x-1-1)=[\infty\cdot 0]=\lim_{x\to 2}\frac{3\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}}=\lim_{x\to 2}3=3$$

4)

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{3x^2-5}{3x^2+x}\right)^{x^2-1}=\left[1^{\infty}\right]=e^{-\infty}=0$$

$$\text{donde } \lim_{x\to +\infty}(x^2-1)\left(\frac{3x^2-5}{3x^2+x}-1\right)=[\infty\cdot 0]=\lim_{x\to +\infty}(x^2-1)\left(\frac{3x^2-5}{3x^2+x}-\frac{3x^2+x}{3x^2+x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to +\infty}(x^2-1)\left(\frac{3x^2-5-(3x^2+x)}{3x^2+x}\right)=\lim_{x\to +\infty}(x^2-1)\left(\frac{3x^2-5-3x^2-x}{3x^2+x}\right)=\lim_{x\to +\infty}(x^2-1)\left(\frac{-5-x}{3x^2+x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{(x^2-1)(-5-x)}{3x^2+x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{-x^3-5x^2+x+5}{3x^2+x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=-\infty$$

5)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-5}-(2x-3)\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2-5}-(2x-3)\right)\left(\sqrt{4x^2-5}+(2x-3)\right)}{\sqrt{4x^2-5}+(2x-3)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2-5}\right)^2-(2x-3)^2}{\sqrt{4x^2-5}+(2x-3)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2-5-\left(4x^2-12x+9\right)}{\sqrt{4x^2-5}+(2x-3)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{4x^2}-5-\cancel{4x^2}+12x-9}{\sqrt{4x^2-5}+(2x-3)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{12x-14}{\sqrt{4x^2-5}+(2x-3)}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{12x}{x}-\frac{14}{x}}{\sqrt{\frac{4x^2}{x^2}-\frac{5}{x}}+\frac{2x}{x}-\frac{3}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{12-\frac{14}{x}}{\sqrt{4-\frac{5}{x}}+2-\frac{3}{x}}=\frac{12}{\sqrt{4}+2}=\frac{12}{4}=3$$

6)

$$\lim_{x\to2+}\frac{\sqrt{2x-4}}{x-2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to2+}\frac{\sqrt{2(x-2)}}{x-2}=\lim_{x\to2+}\sqrt{\frac{2(x-2)}{(x-2)^2}}=\lim_{x\to2+}\sqrt{\frac{2}{x-2}}=+\infty$$

7)

$$\lim_{x\to1-}\frac{2x^2-2}{x^2-2x+1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to1-}\frac{2\left(x^2-1\right)}{x^2-2x+1}=\lim_{x\to1-}\frac{2(x+1)\cancel{(x-1)}}{(x-1)\cancel{(x-1)}}=\lim_{x\to1-}\frac{2(x+1)}{x-1}=\left[\frac{4}{0}\right]=-\infty$$

8)

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x+8}-3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to1}\frac{\left(x^2-1\right)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}{\left(\sqrt{x+8}-3\right)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}=\lim_{x\to1}\frac{\left(x^2-1\right)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}{\left(\sqrt{x+8}\right)^2-9}=\lim_{x\to1}\frac{\left(x^2-1\right)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}{x+8-9}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\left(x^2-1\right)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}{x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to1}\frac{(x+1)\cancel{(x-1)}\left(\sqrt{x+8}+3\right)}{\cancel{x-1}}=\lim_{x\to1}(x+1)\left(\sqrt{x+8}+3\right)=12$$

9)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}\right)^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\left(x+\sqrt{x}\right)\sqrt{x}}+\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x\sqrt{x}+x}+\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x-1}$$ y no llegamos a ninguna expresión que podamos simplificar…

Abordamos el problema de otra forma:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\left[\begin{array}{l}\text{hacemos el cambio de variable}\\ u=\sqrt{x}\Rightarrow u^2=x\\ x\to+\infty\Rightarrow u\to+\infty\end{array}\right]=\lim_{u\to+\infty}\frac{\sqrt{u^2+u}}{u+1}=\lim_{u\to+\infty}\frac{\sqrt{u(u+1)}}{u+1}=$$

$$=\lim_{u\to+\infty}\sqrt{\frac{u(u+1)}{(u+1)^2}}=\lim_{u\to+\infty}\sqrt{\frac{u}{u+1}}=\sqrt{\lim_{u\to+\infty}\frac{u}{u+1}}=\sqrt{1}=1$$

«De otra forma»:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{x}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}}{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}=\frac{\sqrt{1}}{1}=1$$

10)

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{x^2+4}{x+4}\right)^{\frac{x}{x-1}}=\left[1^\infty\right]=e^{\frac{1}{5}}$$

donde $\lim_{x\to1}\frac{x}{x-1}\left(\frac{x^2+4}{x+4}-1\right)=\lim_{x\to1}\frac{x}{x-1}\left(\frac{x^2+4-x-4}{x+4}\right)=\lim_{x\to1}\frac{x}{x-1}\left(\frac{x^2-x}{x+4}\right)=\lim_{x\to1}\frac{x}{\cancel{x-1}}\left(\frac{x\cancel{(x-1)}}{x+4}\right)=$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x^2}{x+4}=\frac{1}{5}$$

11)

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}}=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2-1}{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim_{x\to1}\frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}$$

12)

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x+7}-3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to2}\frac{\left(\sqrt{x^2+5}-3\right)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}{\left(\sqrt{x+7}-3\right)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}=\lim_{x\to2}\frac{\left(\sqrt{x^2+5}-3\right)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}{\left(\sqrt{x+7}\right)^2-9}=$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{\left(\sqrt{x^2+5}-3\right)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}{x+7-9}=\lim_{x\to2}\frac{\left(\sqrt{x^2+5}-3\right)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}{x-2}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)\left(\sqrt{x^2+5}-3\right)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}{\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)(x-2)}=\lim_{x\to2}\frac{\left[\left(\sqrt{x^2+5}\right)^2-9\right]\left(\sqrt{x+7}+3\right)}{\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)(x-2)}=$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{\left[x^2+5-9\right]\left(\sqrt{x+7}+3\right)}{\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)(x-2)}=\lim_{x\to2}\frac{\left(x^2-4\right)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}{\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)(x-2)}=\lim_{x\to2}\frac{(x+2)\cancel{(x-2)}\left(\sqrt{x+7}+3\right)}{\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)\cancel{(x-2)}}=$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{(x+2)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}{\sqrt{x^2+5}+3}=\frac{24}{6}=4$$

3. *Calcula los siguientes límites, resolviendo la correspondiente indeterminación, cuando ésta se presente:*

a) $\lim_{x\to2}\frac{x^3-8}{x-2}$

b) $\lim_{x\to3}\frac{2x^2-4x-6}{3-\sqrt{x+6}}$

c) $\lim_{x\to -1}\frac{x^3+3x^2-x-3}{2x^2-2x-4}$

d) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$

e) $\lim_{x\to 2}\frac{-x^2-x+6}{x(x-2)^2}$

f) $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{2x^2+1}{x^2+x}\right)^{\sqrt{x^2+1}-x}$

g) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x+2}{x-2}-\frac{6x+4}{x^2-4}\right)$

h) $\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{x}$

i) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x+3}{x-1}\cdot\frac{x^2+x-2}{x^2-3}\right)$

j) $\lim_{x\to +\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)$

k) $\lim_{x\to \frac{1}{2}}\left(\frac{2x+1}{2x+2}\right)^{\frac{2x-1}{\sqrt{2x-1}}}$

l) $\lim_{x\to -1}\frac{x+\sqrt{x+2}}{x+1}$

m) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-\sqrt{x}}}$

n) $\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-\sqrt{x+1}}$

Soluciones:

a)

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}\left(x^2+2x+4\right)}{\cancel{x-2}}=\lim_{x\to 2}\left(x^2+2x+4\right)=12$$

b)

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-4x-6}{3-\sqrt{x+6}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 3}\frac{\left(2x^2-4x-6\right)\left(3+\sqrt{x+6}\right)}{\left(3-\sqrt{x+6}\right)\left(3+\sqrt{x+6}\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{\left(2x^2-4x-6\right)\left(3+\sqrt{x+6}\right)}{9-\left(\sqrt{x+6}\right)^2}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{\left(2x^2-4x-6\right)\left(3+\sqrt{x+6}\right)}{3-x}=\lim_{x\to 3}\frac{2(x+1)(x-3)\left(3+\sqrt{x+6}\right)}{3-x}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{2(x+1)\cancel{(x-3)}\left(3+\sqrt{x+6}\right)}{-\cancel{(x-3)}}=\lim_{x\to 3}\left[-2(x+1)\left(3+\sqrt{x+6}\right)\right]=-48$$

c)

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+3x^2-x-3}{2x^2-2x-4}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to -1}\frac{\cancel{(x+1)}(x-1)(x+3)}{2\cancel{(x+1)}(x-2)}=\lim_{x\to -1}\frac{(x-1)(x+3)}{2(x-2)}=\frac{-4}{-6}=\frac{2}{3}$$

d)

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(x^2-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2-1}{\left(x^2-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\left(x^2-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{x-1}}{(x+1)\cancel{(x-1)}\left(\sqrt{x}+1\right)}==\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x+1)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{1}{4}$$

e)

$$\lim_{x\to 2}\frac{-x^2-x+6}{x(x-2)^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{-\cancel{(x-2)}(x+3)}{x(x-2)\cancel{(x-2)}}=\lim_{x\to 2}\frac{-(x+3)}{x(x-2)}=\left[\frac{-5}{0}\right]$$

Límites laterales:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{-(x+3)}{x(x-2)}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{-(x+3)}{x(x-2)}=-\infty\end{array}\right\}\Rightarrow\nexists\lim_{x\to 2}\frac{-(x+3)}{x(x-2)}\Rightarrow\nexists\lim_{x\to 2}\frac{-x^2-x+6}{x(x-2)^2}$$

f)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2+1}{x^2+x}\right)^{\sqrt{x^2+1}-x}=2^0=1$$

ya que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=[\infty-\infty]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-x^2}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}=0$$

g)

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x+2}{x-2}-\frac{6x+4}{x^2-4}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x+2)-(6x+4)}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{x\cancel{(x-2)}}{(x+2)\cancel{(x-2)}}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x}{(x+2)}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

h)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{x}=\left[\frac{2}{\infty}\right]=0$$

ya que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)=[\infty-\infty]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2+1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=0$$

i)

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x+3}{x-1}\cdot\frac{x^2+x-2}{x^2-3}\right)=[\infty\cdot 0]=\lim_{x\to 1}\frac{(x+3)(x^2+x-2)}{(x-1)(x^2-3)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+3)\cancel{(x-1)}(x+2)}{\cancel{(x-1)}(x^2-3)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x+3)(x+2)}{x^2-3}=\frac{12}{-2}=-6$$

j)

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\cdot\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)=[\infty\cdot 0]=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x(x+2)}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)}{\sqrt{x^2+2x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2+2x}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x-x^2}{\sqrt{x^2+2x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}}+\frac{x}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}=\frac{2}{\sqrt{1}+1}=1$$

ya que $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x+2}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2-x}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}=0$$

k)

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\left(\frac{2x+1}{2x+2}\right)^{\frac{2x-1}{\sqrt{2x-1}}}=\left(\frac{2}{3}\right)^0=1$$

donde $\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{2x-1}{\sqrt{2x-1}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{(2x-1)^2}{2x-1}}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\sqrt{2x-1}=0$

l)

$$\lim_{x\to-1}\frac{x+\sqrt{x+2}}{x+1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to-1}\frac{\left(x+\sqrt{x+2}\right)\left(x-\sqrt{x+2}\right)}{(x+1)\left(x-\sqrt{x+2}\right)}=\lim_{x\to-1}\frac{x^2-\left(\sqrt{x+2}\right)^2}{(x+1)\left(x-\sqrt{x+2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{x^2-x-2}{(x+1)\left(x-\sqrt{x+2}\right)}=\lim_{x\to-1}\frac{\cancel{(x+1)}(x-2)}{\cancel{(x+1)}\left(x-\sqrt{x+2}\right)}=\lim_{x\to-1}\frac{x-2}{x-\sqrt{x+2}}=\frac{-3}{-1-1}=\frac{3}{2}$$

m)

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-\sqrt{x}}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\begin{bmatrix}\text{hacemos el cambio de variable}\\ u=\sqrt{x}\Rightarrow u^2=x\\ x\to1\Rightarrow u\to1\end{bmatrix}=\lim_{u\to1}\frac{u-1}{\sqrt{u^2-u}}=\lim_{u\to1}\sqrt{\frac{(u-1)^2}{u(u-1)}}=\lim_{u\to1}\sqrt{\frac{u-1}{u}}=$$

$$=\lim_{u\to1}\sqrt{\frac{u-1}{u}}=0$$

n)

$$\lim_{x\to0}\frac{x}{1-\sqrt{x+1}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to0}\frac{x\left(1+\sqrt{x+1}\right)}{\left(1-\sqrt{x+1}\right)\left(1+\sqrt{x+1}\right)}=\lim_{x\to0}\frac{x\left(1+\sqrt{x+1}\right)}{1-\left(\sqrt{x+1}\right)^2}=\lim_{x\to0}\frac{x\left(1+\sqrt{x+1}\right)}{1-x-1}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\cancel{x}\left(1+\sqrt{x+1}\right)}{-\cancel{x}}=\lim_{x\to0}\left[-\left(1+\sqrt{x+1}\right)\right]=-2$$

Resolución de indeterminaciones

INDETERMINACIÓN DEL TIPO $\left[\frac{k}{0}\right]$ **CON** $k \in (\mathbb{R} - \{0\}) \cup \{\pm\infty\}$

Se calculan los límites laterales: $\lim_{x \to a+} f(x)$, $\lim_{x \to a-} f(x)$

Si existen ambos límites y coincide su valor, entonces:

$$\exists \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a-} f(x)$$

Si no existe alguno de los límites laterales o no coincide su valor, entonces, no existe $\lim_{x \to a} f(x)$.

INDETERMINACIÓN DEL TIPO $\left[\frac{0}{0}\right]$

a) **Para funciones racionales**
Se descomponen numerador y denominador en factores y se simplifica.

b) **Para funciones irracionales**
Si se trata de una función con raíces cuadradas en el numerador (o en el denominador), multiplicamos numerador y denominador por la expresión conjugada del numerador (o del denominador).

INDETERMINACIÓN DEL TIPO $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

Se divide numerador y denominador por la mayor potencia de x que aparezca en la función (basta con dividir por la mayor potencia de x del denominador).

INDETERMINACIÓN DEL TIPO $[\infty - \infty]$

a) **La función es diferencia de dos funciones racionales**
Se efectúa dicha operación.

b) **La función es diferencia de funciones irracionales**
Multiplicamos y dividimos por la expresión conjugada de la función.

INDETERMINACIÓN DEL TIPO $[0 \cdot \infty]$

Transformar esta indeterminación en una de las anteriores, generalmente efectuando las operaciones.

INDETERMINACIÓN DEL TIPO $[1^{\infty}]$

La indeterminación que nos ocupa se resuelve empleando la siguiente igualdad:

$$\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x \to a} g(x)[f(x)-1]}$$

donde $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

INDETERMINACIÓN DEL TIPO $[0^0 \text{ o } \infty^0 \text{ o } 0^{\infty}]$

Estos dos tipos de indeterminaciones se pueden resolver aplicando la siguiente fórmula:

$$\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x \to a} g(x) \log f(x)}$$

donde $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ y $\log = \ln$ es el logaritmo natural.