# SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 2x2

Cipri Santiago Zaragoza
Departamento de Matemáticas
I.E.S. "Ramón Giraldo"
13320 V[va] De Los Infantes (Ciudad Real)

## 1. Introducción

Antes de introducirnos en el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales con dos ecuaciones y dos incógnitas, vamos a ver un ejemplo de aplicación de esta herramienta, aunque hay que señalar que la solución del sistema que se plantea en la aplicación queda fuera de lo que se va a estudiar aquí, pero que bien puede ilustrar la utilidad práctica de estudiar sistemas de ecuaciones lineales, entre otras cosas.

(1) «El buscador de Internet Google tiene ideas muy novedosas, siendo la más original el sistema que usa para valorar la importancia de una página web frente a las demás, y, así, saber en qué posición mostrarla al ser obtenida como resultado de una búsqueda. La idea es sencilla de contar, pero difícil de implementar en un sistema informático: cuánto más referenciada esté una página web, más importancia se le otorga. Está claro que, si una página web contiene información interesante, estará muy referenciada en páginas de temática similar. Por lo tanto, este sistema de medida es una buena idea, y de hecho funciona estupendamente. El problema matemático que supone averiguar el peso específico de una página web, a partir del número de veces que es referenciada en 1350 millones de páginas web que ha explorado Google, no es sencillo de resolver. Para empezar, es un problema puramente topológico, lo que significa que carecemos de métrica (o sea, una forma de asignar valores numéricos a cada elemento del problema y así poder operar con ellos para tratar de obtener un resultado). Por otro lado, es importante matizar que no vale lo mismo que una página tenga un enlace en una página que nos podemos crear rápidamente en Geocities, a tener un enlace en la página de entrada de Yahoo.com. Evidentemente, el segundo enlace es mucho más valioso que el primero, y eso Google lo tiene en cuenta. De modo que resolver este problema es como intentar averiguar la solución de un sistema de ecuaciones con 1350 millones de variables dependientes entre ellas en su mayoría. Este problema como bien saben los matemáticos se resuelve ni más ni menos que calculando los vectores propios de la matriz normalizada de los enlaces entre páginas, y mantener calculando uno o dos ordenadores muy potentes durante unos cuantos días.»

Obtenido de sólo LINUX, revista nº 20, Año 3.

aunque en la actualidad el algoritmo de búsqueda de Google ya no es *PageRank*, que es el que se comenta en el artículo anterior, es un buen ejemplo de aplicación de los sistemas de ecuaciones lineales.

(2) En los videojuegos, los sistemas de ecuaciones lineales se utilizan para calcular la dirección y la velocidad de los objetos en movimiento. Por ejemplo, cuando un jugador gira su personaje, el juego tiene que calcular la nueva dirección de movimiento del personaje. Esto se puede hacer usando un sistema de ecuaciones lineales que tenga en cuenta la velocidad actual del personaje, el ángulo de giro y la distancia que el personaje ha recorrido.

## 2. Definiciones

Un sistema de ecuaciones lineales de dos ecuaciones y dos incógnitas (de ahora en adelante sistema 2x2) es de la forma:

$$\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases}$$

donde $a,b,c,d,e,f$ son números reales y el par $(x,y)$ es el de incógnitas.

Resolver un sistema $2\times 2$ es encontrar, si los hay, todos los pares $(x,y)$ de números reales que transforman las ecuaciones del sistema en identidades.

Atendiendo al número de soluciones de un sistema $2\times 2$ hacemos la siguiente **clasificación**:

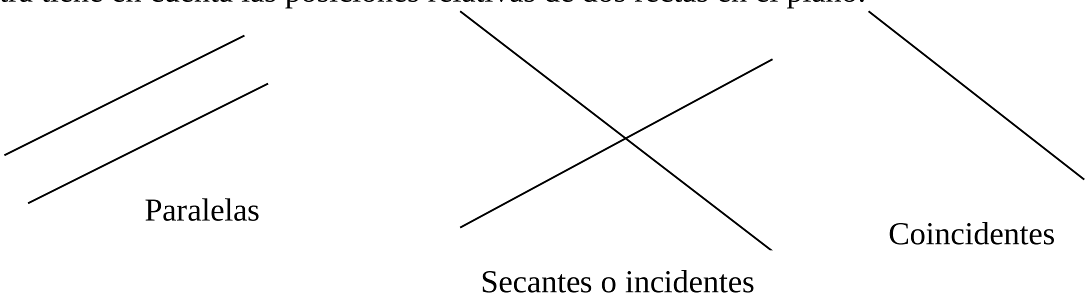
$$\text{Sistema } 2\times 2 \begin{cases} \text{Compatible (tiene solución)} \begin{cases} \text{Determinado (solución única)} \\ \text{Indeterminado (infinitas soluciones)} \end{cases} \\ \text{Incompatible (no tiene solución)} \end{cases}$$

A continuación, vamos a ver cuatro métodos de resolución de los sistemas $2\times 2$, así como sus ventajas e inconvenientes.

## 3. Métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales

### 3.1 Método geométrico o gráfico

Este método utiliza por una parte la idea de que *cada una de las ecuaciones del sistema* $2\times 2$ *es una recta en el plano* (que se representa construyendo una tabla de valores con dos valores), y por otra tiene en cuenta las posiciones relativas de dos rectas en el plano:




Teniendo en cuenta lo anterior se tiene:

a) El sistema es **compatible determinado** si las rectas son secantes, en cuyo caso el punto de corte es la solución del sistema.
b) El sistema es **compatible indeterminado** si las rectas son coincidentes, en cuyo caso cualquier punto de la recta es solución del sistema.
c) El sistema es **incompatible** si las rectas son paralelas.

**Ejercicios:**

**1.** Resuelve por el método geométrico los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 2x+3y=3 \\ 3x-2y=1 \end{cases}$  e) $\begin{cases} x-2y=0 \\ 2x+3y=7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+3y=1 \\ 2x-y=2 \end{cases}$  f) $\begin{cases} 2x-y=3 \\ x+3y=-2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 3x-2y=1 \end{cases}$ g) $\begin{cases} 3x+y=2 \\ -6x-2y=-4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x+y=0 \\ 4x+2y=7 \end{cases}$

### 3.2 Método de reducción o de GAUSS

Consiste en multiplicar una o las dos ecuaciones por números convenientes de forma que los coeficientes de una de las dos variables sean opuestos. Luego se suman las dos ecuaciones y obtenemos una ecuación de primer grado con una incógnita, que resuelta nos da el valor de una de las dos variables. Para obtener la otra basta con sustituir dicho valor en cualquiera de las dos ecuaciones del sistema.

**Ejercicios:**

**2.** Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de reducción:

a) $\begin{cases} 2x+3y=12 \\ x-y=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x+y=6 \\ 3x-2y=14 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x+y=3 \\ 3x-2y=1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x-2y=0 \\ 2x+3y=7 \end{cases}$

### 3.3 Método de igualación

Consiste en despejar una de las dos incógnitas en las dos ecuaciones y posteriormente igualar los resultados obtenidos. Se obtiene así una ecuación de primer grado con una incógnita, que resuelta nos da el valor de una de las dos variables. Para obtener la otra basta con sustituir dicho valor en cualquiera de las dos ecuaciones del sistema.

**Ejercicios:**

**3.** Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación:

a) $\begin{cases} 5x+4y=14 \\ x=2y \end{cases}$ c) $\begin{cases} 4x-y=2 \\ y=3x \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+8=y \\ -3x+2y=16 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y=10x \\ x+10y=20 \end{cases}$

### 3.4 Método de sustitución

Consiste en despejar una de las dos incógnitas en una de las ecuaciones del sistema y sustituir la expresión obtenida en la otra ecuación

**Ejercicios:**

**4.** Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución:

a) $\begin{cases} x-2y=0 \\ x+3y=15 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x-y=3 \\ 4x+y=6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+y=4 \\ -x+y=2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 5x+2y=155 \\ 3x+y=90 \end{cases}$

## 4. Ventajas e inconvenientes

A este nivel cabe decir que el método geométrico presenta el inconveniente de la precisión de la representación gráfica, es decir, si la solución no es entera no es un buen método para resolver sistemas.

En cuanto a los demás métodos hay que decir que el mejor de ellos es el de reducción ya que es fácilmente implementable en un ordenador y además es fácilmente generalizable a sistemas con más ecuaciones y más incógnitas.

## 5. Discusión de un sistema

Como consecuencia del método de reducción se obtiene la siguiente discusión de los sistemas $2\times 2$:

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

a) El sistema es **compatible determinado** si los coeficientes de las incógnitas no son proporcionales, es decir,

$$\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$$

b) El sistema es **compatible indeterminado** si los coeficientes de las incógnitas y los términos independientes son proporcionales, es decir,

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$$

c) El sistema es **incompatible** si los coeficientes de las incógnitas son proporcionales entre sí, pero no son proporcionales con los términos independientes, es decir,

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$$