Resolución de ecuaciones por radicales

1) Resolución de la ecuación lineal

La solución de la ecuación

$$ax = b$$

con $a, b \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$ viene dada por:

$$\boxed{x = \frac{b}{a}}$$

2) Resolución de la ecuación cuadrática: fórmula de Bhaskara II[1]

Las soluciones de la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, vienen dadas por la fórmula de Bhaskara:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Sean x_1, x_2 las raíces de la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$. Dichas raíces verifican las siguientes relaciones:

$$\boxed{\begin{array}{r} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} \end{array}}$$ Relaciones de Cardano-Viète[2]

3) Resolución de la ecuación cúbica: fórmulas de Tartaglia-Cardano

Las soluciones de la ecuación

$$x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

(si el coeficiente de x^3 no es 1, se divide toda la ecuación por dicho coeficiente) vienen dadas por las fórmulas de Tartaglia[3]-Cardano[4]:

---

[1] Bhāskara II (1114-1185), también conocido como Bhaskara Acharia (Bhāskara-Ācārya), fue un matemático y astrónomo indio.

[2] François Viète (en latín, Franciscus Vieta) fue un abogado y matemático francés (Fontenay-le-Comte, 1540-París, 1603). Se le considera uno de los principales precursores del álgebra. Fue el primero en representar los parámetros de una ecuación mediante letras, siendo un destacado precursor de la utilización del álgebra en criptografía, lo que le permitió descodificar los mensajes cifrados de la Corona Española.

[33] Niccolò Fontana (Brescia, c. 1500 - Venecia, 13 de diciembre de 1557), fue un matemático e ingeniero italiano apodado Tartaglia (tartamudo), debido a que en su niñez recibió una herida cuando las tropas de Gastón de Foix tomaban Brescia, su ciudad natal.

4 Gerolamo Cardano (1501-1576) fue un médico notable, además de un célebre matemático italiano del Renacimiento, un astrólogo de valía, y un estudioso del azar. Este filósofo y destacado enciclopedista, fue autor de una de las primeras autobiografías modernas.

$$\boxed{\begin{cases} x_1 = \dfrac{-a_2 + \sqrt[3]{y_1} + \sqrt[3]{y_2}}{3} \\ x_2 = \dfrac{-a_2 + \omega^2 \cdot \sqrt[3]{y_1} + \omega \cdot \sqrt[3]{y_2}}{3} \\ x_3 = \dfrac{-a_2 + \omega \cdot \sqrt[3]{y_1} + \omega^2 \cdot \sqrt[3]{y_2}}{3} \end{cases}}$$

donde

$$\begin{cases} y_1 = -a_2{}^3 + \dfrac{9}{2}a_2a_1 - \dfrac{27}{2}a_0 + \dfrac{3}{2}\sqrt{3}i\delta \\ y_2 = -a_2{}^3 + \dfrac{9}{2}a_2a_1 - \dfrac{27}{2}a_0 - \dfrac{3}{2}\sqrt{3}i\delta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i \\ \delta = \mathrm{Discr}(f) = -4a_2{}^3a_0 + a_2{}^2a_1{}^2 + 18a_2a_1a_0 - 4a_1{}^3 - 27a_0{}^2 \end{cases}$$

Un caso particularmente fácil:

El polinomio $f\left(x\right) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ se puede reducir al polinomio $f\left(y\right) = y^3 + ay + b$, haciendo el cambio de variable $x = y - \dfrac{a_2}{3}$.

En este caso, las fórmulas de Tartaglia-Cardano son:

$$\boxed{\begin{cases} x_1 = \sqrt[3]{-\dfrac{b}{2} + \sqrt{\dfrac{b^2}{4} + \dfrac{a^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\dfrac{b}{2} - \sqrt{\dfrac{b^2}{4} + \dfrac{a^3}{27}}} \\ x_2 = \omega^2 \cdot \sqrt[3]{-\dfrac{b}{2} + \sqrt{\dfrac{b^2}{4} + \dfrac{a^3}{27}}} + \omega \cdot \sqrt[3]{-\dfrac{b}{2} - \sqrt{\dfrac{b^2}{4} + \dfrac{a^3}{27}}} \\ x_3 = \omega \cdot \sqrt[3]{-\dfrac{b}{2} + \sqrt{\dfrac{b^2}{4} + \dfrac{a^3}{27}}} + \omega^2 \cdot \sqrt[3]{-\dfrac{b}{2} - \sqrt{\dfrac{b^2}{4} + \dfrac{a^3}{27}}} \end{cases}}$$

4) Resolución de la ecuación cuártica: fórmulas de Ferrari

Las soluciones de la ecuación

$$x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

(si el coeficiente de x^4 no es 1, se divide toda la ecuación por dicho coeficiente) vienen dadas por las fórmulas de Ferrari[5]:

[5] Ludovico Ferrari (1522-1565) fue un estudioso de las matemáticas y en unión con otros colaboradores, siendo el más importante de ellos Cardano, llegó a ser uno de los mayores representantes de la escuela de Bolonia, que se dedicaba principalmente al estudio del Álgebra, con lo que llegó al descubrimiento de la fórmula general para la resolución, mediante radicales, de la ecuación de cuarto grado.

$$\boxed{\begin{cases} x_1 = \dfrac{-a_3+\sqrt{P}+\sqrt{Q}+\sqrt{R}}{4} \\ x_2 = \dfrac{-a_3+\sqrt{P}-\sqrt{Q}-\sqrt{R}}{4} \\ x_3 = \dfrac{-a_3-\sqrt{P}+\sqrt{Q}-\sqrt{R}}{4} \\ x_4 = \dfrac{-a_3-\sqrt{P}-\sqrt{Q}+\sqrt{R}}{4} \end{cases}}$$

donde:

$$\begin{cases} P = a_3^{\,2} - 4a_2 + 4y_3 \\ Q = a_3^{\,2} - 4a_2 + 4y_1 \\ R = a_3^{\,2} - 4a_2 + 4y_2 \end{cases}$$

e y_1, y_2, y_3 son las soluciones de la ecuación

$$g(y) = y^3 + b_2 y^2 + b_1 y + b_0 = (y-y_1)(y-y_2)(y-y_3) = 0$$

5) Imposibilidad de resolución de las ecuaciones polinómicas de grado superior a cuatro, mediante radicales: Abel[6]-Galois[7]

Después de los trabajos exitosos de Tartaglia, Cardano y Ferrari, durante siglos muchos matemáticos buscaron de manera infructuosa una fórmula que diera las soluciones de cualquier ecuación de quinto grado o superior. Fue Niels Henrik Abel (1802-1829) quien demostró de manera concluyente que tal fórmula general no existe. Por poco tiempo aún subsistió el problema de decidir para cuáles ecuaciones de grado 5 o superior sí existen tales fórmulas, pero este interrogante fue resuelto de manera final por Évariste Galois (1811-1832). Además de mostrar la imposibilidad de resolver por fórmulas generales las ecuaciones de cualquier grado mayor que 4, sus trabajos dieron origen a la Teoría de Grupos.

Teorema de Galois, 1832: Sea $\mathbb{k}$ un cuerpo de característica cero y $f \in \mathbb{k}[x]$. Son equivalentes:

i) f es resoluble por radicales sobre $\mathbb{k}$

ii) G_f (grupo de Galois de f) es un grupo resoluble.

Teorema de Abel[8], 1823: El grupo de Galois de la ecuación general de grado n es S_n. Como consecuencia, solo es resoluble por radicales cuando $n \le 4$.

6 Niels Henrik Abel (Findö, Noruega, 5 de agosto de 1802 - Froland, Noruega, 6 de abril de 1829) fue un matemático noruego, célebre fundamentalmente por haber probado en 1824 que no hay ninguna fórmula para hallar los ceros de todos los polinomios generales de grado mayor que 4, en términos de sus coeficientes.

7 Évariste Galois (1811-1832) fue un matemático francés. Mientras aún era adolescente, fue capaz de determinar la condición necesaria y suficiente para que una ecuación polinómica sea resuelta por radicales.

8 También conocido como Teorema de Abel-Ruffini, ya que Paolo Ruffini dio una demostración incompleta del mismo en 1799.