

$$\mathbf{1} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a) A^2 + 3X = A \Rightarrow 3X = A - A^2 \Rightarrow \boxed{X = \frac{1}{3}(A - A^2)}$$

Calculamos A^2

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Calculamos $A - A^2$

$$A - A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Calculamos X

$$\boxed{X = \frac{1}{3}(A - A^2) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/3 & -2/3 \\ -2/3 & -4/3 \end{pmatrix}}$$

$$b) AX = B \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow \boxed{X = A^{-1}B}$$

Calculamos A^{-1}

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 1 & 0 \\ 2 & 1 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2F_1 + F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 1 & 0 \\ 0 & -3 & | & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 : (-3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 1 & 0 \\ 0 & 1 & | & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{-2F_2 + F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & | & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Calculamos X

$$\boxed{X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1 \\ 1/3 & -1 \end{pmatrix}}$$

2

$$2X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X - Y = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\cdot (-2)} \rightarrow -2X + 2Y = \begin{pmatrix} 0 & -10 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$-Y = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -10 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{Como } X - Y = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + Y = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 12 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$(X, Y) = \left(\begin{pmatrix} -1 & 12 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \right)$$

$$\boxed{3} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$2X - AB = A^2 \Rightarrow 2X = A^2 + AB \Rightarrow X = \frac{1}{2}(A^2 + AB)$$

Calculamos A^2

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculamos AB

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculamos $A^2 + AB$

$$A^2 + AB = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 6 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Calculamos X

$$X = \frac{1}{2}(A^2 + AB) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 15 & 6 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15/2 & 3 \\ 3/2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{4} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$X - B^2 = AB \Rightarrow X = AB + B^2$$

Calculamos B^2

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 6 & 4 & 18 \\ 0 & 0 & 36 \end{pmatrix}$$

Calculamos AB

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 11 \\ 7 & 6 & 13 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Calculamos Δ

$$\Delta = AB + B^2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 11 \\ 7 & 6 & 13 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 6 & 4 & 18 \\ 0 & 0 & 36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 18 \\ 13 & 10 & 31 \\ 0 & 0 & 48 \end{pmatrix}$$

5 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 8 & 13 \end{pmatrix}$

Resolución

$$AB + C\Delta = D \Rightarrow C\Delta = D - AB \Rightarrow C^{-1}C\Delta = C^{-1}(D - AB) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \Delta = C^{-1}(D - AB)$$

Calculamos AB

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}$$

Calculamos $D - AB$

$$D - AB = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 8 & 13 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 8 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos C^{-1}

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{-3F_1 + F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 + F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{F_2: (-2)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array} \right) \Rightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Calculamos Δ

$$\Delta = C^{-1}(D-AB) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

6 a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} -2F_1+F_3 \\ F_1+F_2 \end{smallmatrix}]{}$ $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & -6 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{6F_2+7F_3} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \boxed{\text{rg } A = 3}$$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 10 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} -2F_1+F_2 \\ -F_1+F_3 \end{smallmatrix}]{}$ $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -7 & 7 \\ 0 & 7 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2+F_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \boxed{\text{rango } B = 2}$$

c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} -2F_1+F_2 \\ -3F_1+F_3 \end{smallmatrix}]{}$ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{-F_2+F_3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \boxed{\text{rango } C = 2}$$

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} F_1+F_2 \\ -2F_1+F_3 \end{smallmatrix}]{}$ $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{-5F_2+F_3}$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\text{rango } D = 2}$$

e) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 7 & 9 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1+F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 8 & 7 & 9 & 4 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[\begin{smallmatrix} -2F_3+F_2 \\ -4F_2+F_4 \end{smallmatrix}]{}$$
 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -11 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 11 & 5 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3+F_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -11 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \boxed{\text{rango } E = 3}$$

$$f) F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 11 \\ 1 & -1 & 6 & 29 \end{pmatrix} \xrightarrow[\begin{matrix} -2F_1+F_2 \\ -F_1+F_3 \end{matrix}]{\begin{matrix} -2F_1+F_2 \\ -F_1+F_3 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & -2 & 5 & 27 \end{pmatrix} \xrightarrow{2F_2+F_3} \\ \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 11 & 41 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\text{rango } F = 3}$$

$$g) G = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\begin{matrix} -F_1+F_2 \\ -F_1+F_3 \\ -3F_2+F_4 \end{matrix}]{\begin{matrix} -F_1+F_2 \\ -F_1+F_3 \\ -3F_2+F_4 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 8 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 16 & 8 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \\ \xrightarrow[\begin{matrix} -2F_3+F_2 \\ -2F_2+F_4 \end{matrix}]{\begin{matrix} -2F_3+F_2 \\ -2F_2+F_4 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 8 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\text{rango } G = 2}$$

$$h) H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\begin{matrix} -F_1+F_2 \\ -F_1+F_3 \\ -F_1+F_4 \end{matrix}]{\begin{matrix} -F_1+F_2 \\ -F_1+F_3 \\ -F_1+F_4 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \boxed{\text{rango } H = 3}$$

$$7) a) A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\begin{matrix} -2F_1+F_2 \\ F_1+F_3 \end{matrix}]{\begin{matrix} -2F_1+F_2 \\ F_1+F_3 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\text{rango } A = 3}$$

$$b) B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 9 \\ -3 & -6 & -9 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\begin{matrix} -2F_1+F_2 \\ 3F_1+F_3 \end{matrix}]{\begin{matrix} -2F_1+F_2 \\ 3F_1+F_3 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 13 \end{pmatrix} \xrightarrow{-13F_2+F_3} \\ \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\text{rango } B = 2}$$

$$c) C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\begin{matrix} 2F_1+F_2 \\ 3F_1+F_3 \end{matrix}]{\begin{matrix} 2F_1+F_2 \\ 3F_1+F_3 \end{matrix}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2F_2+F_3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{rango } C = 3}$$

$$d) D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{-F_1+F_2 \\ 2F_1+F_3}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\text{rang } D = 3}$$