1.- Encuentra una matriz X que verifique

$$X - B^2 = AB$$

siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

Solución:

$$X - B^2 = AB \iff X = AB + B^2$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4+0 & 0+4+0 & -1+4+6 \\ 1+6+0 & 0+6+0 & -1+6+6 \\ 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+12 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 4 & 9 \\ 7 & 6 & 11 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0+0 & 0+0+0 & -1+0-6 \\ 2+4+0 & 0+4+0 & -2+4+12 \\ 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+36 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 6 & 4 & 14 \\ 0 & 0 & 36 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X} = AB + B^2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 9 \\ 7 & 6 & 11 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 6 & 4 & 14 \\ 0 & 0 & 36 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 13 & 10 & 25 \\ 0 & 0 & 48 \end{pmatrix}}$$

2.- Determina una matriz cuadrada, simétrica, de orden 2 distinta de I, cuyos elementos sean nºs naturales y tal que su inversa coincida con su traspuesta.

Solución:

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\quad A$ simétrica $\iff b = c$

$A \neq I \iff a, d \neq 1$ y $b = c \neq 0$

$A^{-1} = A^t$

$$\left.\begin{array}{l} A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \\ A^t = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \end{array}\right\} A^{-1} = A^t \iff A^{-1} = A \iff AA^{-1} = AA \iff$$

$$\iff \boxed{I = A^2}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ab+bd \\ ab+bd & b^2+d^2 \end{pmatrix}$$

$$I = A^2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ab+bd \\ ab+bd & b^2+d^2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = a^2+b^2 \\ 0 = ab+bd \longrightarrow 0 = b(a+d) \overset{b\neq 0 \text{ ya que } A\neq I}{\Longrightarrow} a+d=0 \Rightarrow a=-d \\ 1 = b^2+d^2 \end{cases}$$

Sustituimos $a=-c$ en la 1^a ecuación:

$$1 = (-d)^2 + b^2$$

La 3^a ecuación se queda como está, y por tanto tenemos el sistema

$$\begin{cases} 1 = (-d)^2 + b^2 \Leftrightarrow 1 = d^2+b^2 \\ 1 = b^2+d^2 \end{cases}$$

que se reduce a una única ecuación (ya que las dos son iguales):

$$1 = b^2+d^2$$

Resolvemos esta ec. dándole valores a "b" o a "d", pero teniendo en cuenta que $b \neq 0$ y $d \neq 1$.

Tomando $d = 0 \Rightarrow b = 1$

Así, una matriz que verifica lo que nos pedían es $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ya que $a = -d = 0$.

3.-

Siendo

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ -8 & 13 \end{pmatrix}$$

resuelve la ec. matricial $AB + CX = D$

Solución:

$$AB + CX = D \Leftrightarrow CX = D - AB \Leftrightarrow \underbrace{C^{-1}C}_{=I}X = C^{-1}(D-AB) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow X = C^{-1}(D-AB)$$

Calculamos $D - AB$

$$AB = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}_{2\times\underline{3}} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}_{\underline{3}\times 2} = \begin{pmatrix} -6+0-1 & -2+0+2 \\ 3+0-5 & 1-1+10 \end{pmatrix}_{2\times 2} =$$

$$= \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$$

$$D - AB = \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ -8 & 17 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ -2 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$$

Calculamos C^{-1}

Por GAUSS-JORDAN

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 - 3F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 : (-2)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 - 2F_2}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right) \Longrightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Aplicando la fórmula $C^{-1} = \dfrac{1}{|C|}[\mathrm{Adj}(C)]^t$

$M_{11} = 4 \longrightarrow A_{11} = 4$

$M_{12} = 3 \longrightarrow A_{12} = -3$

$M_{21} = 2 \longrightarrow A_{21} = -2$

$M_{22} = 1 \longrightarrow A_{22} = 1$

$$\mathrm{Adj}(C) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow [\mathrm{Adj}(C)]^t = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$$

$$C^{-1} = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/2 & 2/2 \\ +3/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Obtenemos la solución:

$$X = C^{-1}(D - AB) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-6 & -6+7 \\ -\frac{6}{2}+\frac{6}{2} & \frac{9}{2}-\frac{7}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.- Resuelve el sistema matricial

$$\begin{cases} -A + 2B = \begin{pmatrix} 7 & +1 & -4 \\ 0 & -3 & 8 \end{pmatrix} \\ 3A + B = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -2 \\ 7 & 9 & -3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Solución:

Multiplicamos la 1ª ec. por 3 y sumamos:

$$-3A+6B = 3\begin{pmatrix} 7 & 1 & -4 \\ 0 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

$$3A+B = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -2 \\ 7 & 9 & -3 \end{pmatrix}$$

Sumamos: $$7B = 3\begin{pmatrix} 7 & 1 & -4 \\ 0 & -3 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & -3 & -2 \\ 7 & 9 & -3 \end{pmatrix}$$

$$7B = \begin{pmatrix} 21 & 3 & -12 \\ 0 & -9 & 24 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & -3 & -2 \\ 7 & 9 & -3 \end{pmatrix}$$

$$7B = \begin{pmatrix} 28 & 0 & -14 \\ 7 & 0 & 21 \end{pmatrix}$$

$$B = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 28 & 0 & -14 \\ 7 & 0 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28/7 & 0 & -14/7 \\ 7/7 & 0 & 21/7 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$$

Sustituimos B en la 2ª ec.:

$$3A+B = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -2 \\ 7 & 9 & -3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 3A = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -2 \\ 7 & 9 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 6 & 9 & -6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 6 & 9 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/3 & -3/3 & 0 \\ 6/3 & 9/3 & -6/3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}}$$

5.- (Selectividad, 2000) Una fábrica de calzado deportivo dispone de zapatillas para Atletismo (A), Balonmano (B) y Tenis (T), en dos modelos: Mujer (M) y Hombre (H). El nº de pares existentes en el almacén viene definido por la matriz E. El precio, en euros, de cada uno de los pares viene definido por la matriz P.

$$P = \begin{array}{c} \\ M \\ H \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & T \end{array} \\ \begin{pmatrix} 20 & 19 & 18 \\ 22 & 19 & 21 \end{pmatrix} \end{array} \qquad E = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ T \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} M & H \end{array} \\ \begin{pmatrix} 70 & 120 \\ 45 & 65 \\ 60 & 50 \end{pmatrix} \end{array}$$

Se pide: 1º) Obtener, si es posible, las matrices $C = PE$ y $D = EP$.

2º) ¿Qué información proporcionan los elementos c_{11} de C y d_{33} de D?

3º) ¿Qué elemento de C o de D nos informa de la valoración de todas las zapatillas de balonmano?

Solución:

1º) $C = P_{2\times 3} \cdot E_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 20 & 19 & 18 \\ 22 & 19 & 21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 70 & 120 \\ 45 & 65 \\ 60 & 50 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 20\cdot 70 + 19\cdot 45 + 18\cdot 60 & 20\cdot 120 + 19\cdot 65 + 18\cdot 50 \\ 22\cdot 70 + 19\cdot 45 + 21\cdot 60 & 22\cdot 120 + 19\cdot 65 + 21\cdot 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\,335 & 4\,535 \\ 3\,655 & 4\,925 \end{pmatrix}$

$D = E_{3\times 2} \cdot P_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 70 & 120 \\ 45 & 65 \\ 60 & 50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 & 19 & 18 \\ 22 & 19 & 21 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 70\cdot 20 + 120\cdot 22 & 70\cdot 19 + 120\cdot 19 & 70\cdot 18 + 120\cdot 21 \\ 45\cdot 20 + 65\cdot 22 & 45\cdot 19 + 65\cdot 19 & 45\cdot 18 + 65\cdot 21 \\ 60\cdot 20 + 50\cdot 22 & 60\cdot 19 + 50\cdot 19 & 60\cdot 18 + 50\cdot 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\,040 & 3\,610 & 3\,780 \\ 2\,330 & 2\,090 & 2\,175 \\ 2\,300 & 2\,090 & 2\,130 \end{pmatrix}$

2º) El elemento c_{11} se obtiene al multiplicar la 1ª fila de P (que indica el precio de los tres tipos de zapatillas) por la 1ª columna de E (que indica las existencias de los tres tipos de zapatillas para mujeres). Por tanto, c_{11} nos informa del coste total (en €) de las zapatillas (de los tres tipos) para mujeres.

El elemento d_{33} se obtiene al multiplicar la 3ª fila de E (que indica las existencias de zapatillas de Tenis para Hombres y Mujeres) por la 3ª columna de P (que indica el precio de las zapatillas de Tenis tanto para Hombres como para Mujeres). Así, d_{33} nos informa del precio total (en €) de las existencias de zapatillas de Tenis (tanto de hombre como de mujer).

3º) El elemento d_{22}

6.- (Selectividad, 2001) Los precios, en euros, de las entradas a un parque temático para Adultos (AD) y Niños y Jubilados (NJ) en Temporada Alta (TA), Temporada Media (TM) y Temporada Baja (TB) vienen dados por la matriz P. El nº de asistentes, en miles, a dicho porque a lo largo del año viene dado por la matriz N.

$$P = \begin{array}{c} \\ AD \\ NJ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} TA & TM & TB \end{array} \\ \begin{pmatrix} 25 & 20 & 14 \\ 20 & 15 & 7 \end{pmatrix} \end{array} \quad , \quad N = \begin{array}{c} \\ TA \\ TM \\ TB \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} AD & NJ \end{array} \\ \begin{pmatrix} 500 & 600 \\ 330 & 300 \\ 125 & 100 \end{pmatrix} \end{array}$$

Se pide: 1º) Obtener, si es posible, las matrices $R_1 = PN$ y $R_2 = NP$

2º) ¿A cuántos euros asciende la recaudación total correspondiente a los niños y jubilados?

3º) ¿Qué elemento de R_1 o de R_2 nos proporciona información sobre la recaudación total correspondiente a los adultos?

4º) ¿A cuántos euros asciende la recaudación total?

Solución:

1º)
$$R_1 = P_{2\times \underline{3}}\, N_{\underline{3}\times 2} = \begin{pmatrix} 25 & 20 & 14 \\ 20 & 15 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 500 & 600 \\ 330 & 300 \\ 125 & 100 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 25\cdot 500 + 20\cdot 330 + 14\cdot 125 & 25\cdot 600 + 20\cdot 300 + 14\cdot 100 \\ 20\cdot 500 + 15\cdot 330 + 7\cdot 125 & 20\cdot 600 + 15\cdot 300 + 7\cdot 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20\,850 & 22\,400 \\ 15\,825 & 17\,200 \end{pmatrix}$$

$$R_2 = N_{3\times \underline{2}}\, P_{\underline{2}\times 3} = \begin{pmatrix} 500 & 600 \\ 330 & 300 \\ 125 & 100 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25 & 20 & 14 \\ 20 & 15 & 7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 500\cdot 25 + 600\cdot 20 & 500\cdot 20 + 600\cdot 15 & 500\cdot 14 + 600\cdot 7 \\ 330\cdot 25 + 300\cdot 20 & 330\cdot 20 + 300\cdot 15 & 330\cdot 14 + 300\cdot 7 \\ 125\cdot 25 + 100\cdot 20 & 125\cdot 20 + 100\cdot 15 & 125\cdot 14 + 100\cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24\,500 & 19\,000 & 11\,200 \\ 14\,250 & 11\,100 & 6\,720 \\ 5\,125 & 4\,000 & 2\,450 \end{pmatrix}$$

2º) Este valor nos lo da el elemento $r_{22}^{(1)}$ de la matriz R_1

$$\underline{r_{22}^{(1)} = 17\,200\,000 \text{ €}}$$

(ya que el nº de visitantes viene dado en miles)

3º) El elemento $r_{11}^{(1)}$ de la matriz R_1

$$r_{11}^{(1)} = 20\,850\,000 \text{ €}$$

4º) La recaudación total viene dada por la suma de los elementos de la diagonal principal de R_1: $r_{11}^{(1)} + r_{22}^{(1)}$

$$20\,850\,000 + 17\,200\,000 = \underline{\underline{38\,050\,000 \text{ €}}}$$

7.- (Selectividad, 2001) Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}8&-2\\3&5\\5&7\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&1\\-1&2&1\end{pmatrix}\quad y\quad C=\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\\3&1\end{pmatrix}$$

halla otra matriz X tal que $A-BX=C$.

Solución:

$$A-BX=C \iff A=C+BX \iff A-C=BX \iff B^{-1}(A-C)=$$

$$=\underbrace{B^{-1}B}_{=I}X \iff \boxed{B^{-1}(A-C)=X}$$

Calculamos $A-C$

$$A-C=\begin{pmatrix}8&-2\\3&5\\5&7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\\3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&-1\\3&3\\2&6\end{pmatrix}$$

Calculamos B^{-1}

Por el método de GAUSS-JORDAN

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&2&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\-1&2&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{F_3+F_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&2&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\0&1&3&1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{F_3-F_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&2&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\0&0&2&1&-1&1\end{array}\right)\xrightarrow{F_3:2}$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&2&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\0&0&1&1/2&-1/2&1/2\end{array}\right)\xrightarrow{F_2-F_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&2&1&0&0\\0&1&0&-1/2&3/2&-1/2\\0&0&1&1/2&-1/2&1/2\end{array}\right)\xrightarrow{F_1+F_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1/2&3/2&-1/2\\0&1&0&-1/2&3/2&-1/2\\0&0&1&1/2&-1/2&1/2\end{array}\right)\longrightarrow$$

$$\xrightarrow{F_1-2F_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1/2&5/2&-3/2\\0&1&0&-1/2&3/2&-1/2\\0&0&1&1/2&-1/2&1/2\end{array}\right)\Rightarrow B^{-1}=\begin{pmatrix}-1/2&5/2&-3/2\\-1/2&3/2&-1/2\\1/2&-1/2&1/2\end{pmatrix}$$

Por la fórmula $B^{-1}=\dfrac{1}{|B|}[Adj(B)]^t$

$M_{11}=\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix}=-1\longrightarrow A_{11}=-1$ | $M_{21}=\begin{vmatrix}-1&2\\2&1\end{vmatrix}=-5\longrightarrow A_{21}=5$

$M_{12}=\begin{vmatrix}0&1\\-1&3\end{vmatrix}=1\longrightarrow A_{12}=-1$ | $M_{22}=\begin{vmatrix}1&2\\-1&1\end{vmatrix}=3\longrightarrow A_{22}=3$

$M_{13}=\begin{vmatrix}0&1\\-1&2\end{vmatrix}=1\longrightarrow A_{13}=1$ | $M_{23}=\begin{vmatrix}1&-1\\-1&2\end{vmatrix}=1\longrightarrow A_{23}=-1$

$M_{31}=\begin{vmatrix}-1&2\\1&1\end{vmatrix}=-3\longrightarrow A_{31}=-3$ | $M_{33}=\begin{vmatrix}1&-1\\0&1\end{vmatrix}=1\longrightarrow A_{33}=1$

$M_{32}=\begin{vmatrix}1&2\\0&1\end{vmatrix}=1\longrightarrow A_{32}=-1$

$$Adj(B)=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\5&3&-1\\-3&-1&1\end{pmatrix}\Rightarrow [Adj(B)]^t=\begin{pmatrix}-1&5&-3\\-1&3&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$$

$$|B|=\begin{vmatrix}1&-1&2\\0&1&1\\-1&2&1\end{vmatrix}=1+0+1+2-2+0=2$$

$$B^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&5&-3\\-1&3&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/2&5/2&-3/2\\-1/2&3/2&-1/2\\1/2&-1/2&1/2\end{pmatrix}$$

Calculamos X:

$$X=B^{-1}(A-C)=\begin{pmatrix}-1/2&5/2&-3/2\\-1/2&3/2&-1/2\\1/2&-1/2&1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7&-1\\3&3\\2&6\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-\frac{7}{2}+\frac{15}{2}-\frac{6}{2} & \frac{1}{2}+\frac{15}{2}-\frac{18}{2}\\ -\frac{7}{2}+\frac{9}{2}-\frac{9}{2} & \frac{1}{2}+\frac{9}{2}-\frac{6}{2}\\ \frac{7}{2}-\frac{3}{2}+\frac{2}{2} & -\frac{1}{2}-\frac{3}{2}+\frac{6}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\\3&1\end{pmatrix}$$

8.- (Selectividad, 2001) En una tienda de discos se dispone de música Rap (R), Pop (P) y Folk (F) en dos formatos: Compact-Disc (CD) y Musicassette (MC). Los precios, en euros, de los distintos ejemplares vienen determinados por la matriz D y el nº de existencias de cada tipo de música y formato por la matriz E.

$$E=\begin{array}{c|ccc} & R & P & F\\ \hline CD & 15 & 20 & 14\\ MC & 10 & 8 & 7\end{array}\ ,\quad D=\begin{array}{c|cc} & CD & MC\\ \hline R & 13 & 10\\ P & 12 & 10\\ F & 14 & 9\end{array}$$

Se pide: a) Obtener, si es posible, las matrices $V_1=DE$ y $V_2=ED$.

b) ¿A cuántos euros asciende la valoración de las existencias de música pop? ¿Y las de todos los Compact-Disc?

c) ¿Qué elemento de la matriz V_1 o de V_2 nos proporciona información sobre la valoración de las existencias de música folk?

d) ¿A cuántos euros asciende la valoración de las existencias de todos los tipos de música?

Solución:

a) $V_1 = D_{2\times 3}\, E_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 15 & 20 & 14 \\ 10 & 8 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 & 10 \\ 12 & 10 \\ 14 & 9 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 15\cdot 13 + 20\cdot 12 + 14\cdot 14 & 15\cdot 10 + 20\cdot 10 + 14\cdot 9 \\ 10\cdot 13 + 8\cdot 12 + 7\cdot 14 & 10\cdot 10 + 8\cdot 10 + 7\cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 631 & 476 \\ 324 & 243 \end{pmatrix}$

$V_2 = E_{3\times 2}\, D_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 13 & 10 \\ 12 & 10 \\ 14 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 & 20 & 14 \\ 10 & 8 & 7 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 13\cdot 15 + 10\cdot 10 & 13\cdot 20 + 10\cdot 8 & 13\cdot 14 + 10\cdot 7 \\ 12\cdot 15 + 10\cdot 10 & 12\cdot 20 + 10\cdot 8 & 12\cdot 14 + 10\cdot 7 \\ 14\cdot 15 + 9\cdot 10 & 14\cdot 20 + 9\cdot 8 & 14\cdot 14 + 9\cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 295 & 340 & 252 \\ 280 & 320 & 238 \\ 300 & 352 & 259 \end{pmatrix}$

b) La primera respuesta nos la da el elemento $v_{22}^{(2)}$ de la matriz V_2:

320 €

La segunda respuesta nos la da el elemento $v_{11}^{(1)}$ de la matriz V_1: 631€

c) El elemento $v_{33}^{(2)}$ de V_2

d) La respuesta nos la da la suma $v_{11}^{(2)} + v_{22}^{(2)} + v_{33}^{(2)}$ de los elementos de la diagonal principal de V_2:

$295 + 320 + 259 = \underline{874\ €}$

9.- (Selectividad, 2002) En una academia se imparten clases de Inglés (I), Lengua (L) y Matemáticas (M) para tres niveles (1º, 2º y 3º). El nº de horas de clase de cada asignatura por cada nivel en la academia viene dado por la siguiente matriz A:

$$A = \begin{array}{c} \\ 1^{\underline{o}} \\ 2^{\underline{o}} \\ 3^{\underline{o}} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} I & L & M \end{array} \\ \begin{pmatrix} 20 & 5 & 3 \\ 18 & 6 & 5 \\ 22 & 1 & 22 \end{pmatrix} \end{array}$$

La academia paga a sus profesores cada hora de clase según el nivel al que imparte, 8 € por el primer nivel, 9 € por el segundo nivel y 10 € por el tercero.

a) ¿Cuántas horas totales de inglés se dan en la academia?

b) ¿Cuántas horas totales se dan al segundo nivel?

c) ¿Cuánto le cuesta a la academia las clases de Lengua?

Solución:

a) Es la suma de la 1ª columna de A:

$$20+18+22=60\,h$$

b) Es la suma de la 2ª fila de A: $18+6+5=29\,h$

c) Llamamos

$$P=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1^{\circ} & 2^{\circ} & 3^{\circ} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} \end{array}$$

a la matriz de lo que la academia paga a cada profesor por nivel

Calculamos $C=PA=\begin{pmatrix} 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 20 & 5 & 3 \\ 18 & 6 & 5 \\ 22 & 1 & 22 \end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix} 8\cdot 20+9\cdot 18+10\cdot 22 & 8\cdot 5+9\cdot 6+10\cdot 1 & 8\cdot 3+9\cdot 5+10\cdot 22 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 542 & 104 & 289 \end{pmatrix}$$

El elemento $c_{12}=104$ € es la respuesta.

10.- Resuelve la ecuación matricial $AX=B$ con

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad y \quad B=\begin{pmatrix} -10 \\ -11 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$AX=B \Leftrightarrow \underbrace{A^{-1}A}_{=I}X=A^{-1}B \Leftrightarrow \boxed{X=A^{-1}B}$$

Calculamos A^{-1}

Por el método de GAUSS-JORDAN

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1:2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3/2 & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-4F_1}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3/2 & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & -5/2 & -1/2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2:(-7)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3/2 & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4/7 & 2/7 & -1/7 & 0 \\ 0 & -1/2 & -5/2 & -1/2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3+\frac{1}{2}F_2}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3/2 & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4/7 & 2/7 & -1/7 & 0 \\ 0 & 0 & -39/14 & -5/14 & -1/14 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3:\left(-\frac{39}{14}\right)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3/2 & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4/7 & 2/7 & -1/7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5/39 & 1/39 & -14/39 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2+\frac{4}{7}F_3}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3/2 & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 14/39 & -5/39 & -8/39 \\ 0 & 0 & 1 & 5/39 & 1/39 & -14/39 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1-\frac{3}{2}F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1/2 & -1/26 & 5/26 & 4/13 \\ 0 & 1 & 0 & 14/39 & -5/39 & -8/39 \\ 0 & 0 & 1 & 5/39 & 1/39 & -14/39 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1+\frac{1}{2}F_3}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/39 & 8/39 & 5/39 \\ 0 & 1 & 0 & 14/39 & -5/39 & -8/39 \\ 0 & 0 & 1 & 5/39 & 1/39 & -14/39 \end{array}\right) \Longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{39}\begin{pmatrix} 1 & 8 & 5 \\ 14 & -5 & -8 \\ 5 & 1 & -14 \end{pmatrix}$$

Aplicando la fórmula $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left[Adj(A)\right]^t$

$M_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 1 \longrightarrow A_{11} = 1$

$M_{12} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -14 \longrightarrow A_{12} = 14$

$M_{13} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \longrightarrow A_{13} = 5$

$M_{21} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -8 \longrightarrow A_{21} = 8$

$M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -5 \longrightarrow A_{22} = -5$

$M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \longrightarrow A_{23} = 1$

$M_{31} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \longrightarrow A_{31} = 5$

$M_{32} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 8 \longrightarrow A_{32} = -8$

$M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -14 \longrightarrow A_{33} = 14$

$Adj(A) = \begin{pmatrix} 1 & 14 & 5 \\ 8 & -5 & 1 \\ 5 & -8 & 14 \end{pmatrix}$

$\left[Adj(A)\right]^t = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 5 \\ 14 & -5 & -8 \\ 5 & 1 & 14 \end{pmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 6-4+6-1-4+36 = 39$$

$$A^{-1} = \frac{1}{39}\begin{pmatrix} 1 & 8 & 5 \\ 14 & -5 & -8 \\ 5 & 1 & 14 \end{pmatrix}$$

Calculamos X:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{39}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 8 & 5 \\ 14 & -5 & -8 \\ 5 & 1 & 14 \end{pmatrix}}_{3\times 3}\underbrace{\begin{pmatrix} -10 \\ 11 \\ -4 \end{pmatrix}}_{3\times 1} =$$

$$= \frac{1}{39}\begin{pmatrix} 1\cdot(-10)+8\cdot 11+5\cdot(-4) \\ 14\cdot(-10)-5\cdot 11-8\cdot(-4) \\ 5\cdot(-10)+1\cdot 11+14\cdot(-4) \end{pmatrix} = \frac{1}{39}\begin{pmatrix} 58 \\ -163 \\ -95 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 58/39 \\ -163/39 \\ -95/39 \end{pmatrix}$$

11.- Averigua para qué valores del parámetro x la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & x & 4 \\ -1 & 3 & x \end{pmatrix}$$

no tiene inversa. Calcula la matriz inversa de A para $x=1$, si es posible.

Solución:

$$\nexists A^{-1} \iff |A| = 0 \iff \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & x & 4 \\ -1 & 3 & x \end{vmatrix} = 0 \iff x^2 + 4x - 12 = 0$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = -12 \end{cases} \qquad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{2} =$$

$$= \frac{-4 \pm 8}{2} = \begin{cases} \frac{-4+8}{2} = 2 \\ \frac{-4-8}{2} = -6 \end{cases}$$

Por tanto, $\nexists A^{-1} \iff x = \begin{cases} 2 \\ -6 \end{cases}$

Calculamos la inversa de A para $x=1$ (que ya sabemos que existe):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Por el método de GAUSS-JORDAN:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3+F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3-2F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3:(-7)}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/7 & 3/7 & -1/7 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2-4F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4/7 & -5/7 & -4/7 \\ 0 & 0 & 1 & -1/7 & 3/7 & -1/7 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1-4F_3}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 11/7 & -12/7 & 4/7 \\ 0 & 1 & 0 & 4/7 & -5/7 & 4/7 \\ 0 & 0 & 1 & -1/7 & 3/7 & -1/7 \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 11 & -12 & 4 \\ 4 & -5 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Aplicando la fórmula $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left[Adj(A)\right]^t$

$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -11 \longrightarrow A_{11} = -11$

$M_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \longrightarrow A_{12} = 4$

$M_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \longrightarrow A_{13} = 1$

$M_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -12 \longrightarrow A_{21} = 12$

$M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \longrightarrow A_{12} = 5$

$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \longrightarrow A_{23} = -3$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -4 \longrightarrow A_{31} = -4$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 \longrightarrow A_{32} = -4$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \longrightarrow A_{33} = 1$$

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} -11 & 4 & 1 \\ 12 & 5 & -3 \\ -4 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[Adj(A)]^t = \begin{pmatrix} -11 & 12 & -4 \\ 4 & 5 & -4 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 4 - 12 = -7$$

$$A^{-1} = \frac{-1}{7} \begin{pmatrix} -11 & 12 & -4 \\ 4 & 5 & -4 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 11 & -12 & 4 \\ -4 & -5 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$