Potencia de una matriz

1. Hallar A^n para

a) $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ b) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}$

a) Calculamos algunas potencias de A:

$$A^2=AA=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}$$

Por inducción: $A^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\ n & 1\end{pmatrix}$

b) Calculamos algunas potencias de A:

$$A^2=AA=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=I$$

$$A^3=A^2A=IA=A$$

$$A^4=A^2A^2=I\cdot I=I$$

Por inducción: $A^n=\begin{cases}A & \text{si } n \text{ es impar}\\ I & \text{si } n \text{ es par}\end{cases}$

2. Calcula A^n, para $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

$$A^2=AA=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 4 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 4 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 6 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^4=A^3A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 6 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 8 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Por inducción: $A^n=A\cdot\underset{n\text{ veces}}{\ldots}\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2n & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

Demostremos la última igualdad de forma rigurosa:
Para $n=1$ es cierta.

Hipótesis de inducción: la suponemos cierta para n, es decir, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Lo demostramos para $n+1$:

$$A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2n+2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2(n+1) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Calcula A^n, para $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^3 A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

A la vista de los cálculos anteriores, podemos reescribir las potencias como sigue:

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 2^{2-1} & 0 & 2^{2-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{2-1} & 0 & 2^{2-1} \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 2^{3-1} & 0 & 2^{3-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{3-1} & 0 & 2^{3-1} \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^3 A = \begin{pmatrix} 2^{4-1} & 0 & 2^{4-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{4-1} & 0 & 2^{4-1} \end{pmatrix}$$

Por inducción: $A^n = A \cdot \underset{n \text{ veces}}{\ldots} \cdot A = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

4. Hallar A^n, $n \in \mathbb{N}$, para:

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^5 = A^4A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Por inducción:

$$\boxed{A^n = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{si} \quad n = \text{par} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \text{si} \quad n = \text{impar} \end{cases}}$$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Calculamos algunas potencias:

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2/5 & 2/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 1 & 2/5 & 2/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3/5 & 3/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3A = \begin{pmatrix} 1 & 3/5 & 3/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4/5 & 4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por inducción:

$$\boxed{A^n = \begin{pmatrix} 1 & n/5 & n/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

c) $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$

Calculamos algunas potencias:

$$A^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&9\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&8&0\\0&0&27\end{pmatrix}$$

$$A^4=A^3A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&8&0\\0&0&27\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&16&0\\0&0&81\end{pmatrix}$$

Por inducción:

$$\boxed{A^n=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2^n&0\\0&0&3^n\end{pmatrix}}$$

d) $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$$\boxed{A^n=\begin{cases}A & \text{si} \quad n=\text{impar}\\ I & \text{si} \quad n=\text{par}\end{cases}}$$

Resolución de ecuaciones matriciales

Ejercicio 1:

Resolver la ecuación matricial $AXB = C$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 0 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$.

Despejamos X :

$$AXB = C \to A^{-1}AXB = A^{-1}C \to XB = A^{-1}C \to XBB^{-1} = A^{-1}CB^{-1} \to \boxed{X = A^{-1}CB^{-1}}$$

Calculamos A^{-1}:

$$\left(A|I\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-2F_1+F_3]{-F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2:(-2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{3F_2+F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3:(-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3+F_1]{F_3+F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-2F_2+F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{array}\right) = \left(I|A^{-1}\right)$$

Calculamos B^{-1}:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1:2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1+F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2:\left(\frac{3}{2}\right)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}F_2+F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right)$$

Calculamos X :

$$X = A^{-1}CB^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 0 \\ 7 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 1 \\ 1 & 4 \\ 14 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -3 \\ 2 & 3 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2:

Resolver la ecuación matricial $XA = 2B + C$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ -2 & -8 & -6 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Despejamos X :

$$XA = 2B + C \rightarrow XAA^{-1} = (2B + C)A^{-1} \rightarrow \boxed{X = (2B + C)A^{-1}}$$

Calculamos $2B + C$:

$$2B + C = 2\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ -2 & -8 & -6 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculamos A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2:3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_2+F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow{F_3\,:\,2}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{array}\right)\xrightarrow{-F_3+F_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{array}\right)\xrightarrow{F_2+F_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{array}\right)\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Calculamos X :

$$X=(2B+C)A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3:

Resolver la ecuación matricial $AX+A=B$ con $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Despejamos X :

$$AX+A=B\rightarrow AX=B-A\rightarrow A^{-1}AX=A^{-1}(B-A)\rightarrow \boxed{X=A^{-1}(B-A)}$$

Calculamos A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_2+F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_3+F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_2+F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Calculamos $B-A$:

$$B-A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos X :

$$X=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4:

Resolver la ecuación matricial $A+2XB=C$ con $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Despejamos X :

$$A+2XB=C \rightarrow 2XB=C-A \xrightarrow[D:=2B]{} XDD^{-1}=(C-A)D^{-1} \rightarrow \boxed{X=(C-A)D^{-1}}$$

Calculamos D:

$$D=2B=2\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculamos D^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1:2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[2F_1+F_3]{-4F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3:4} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow[-F_3+F_1]{\frac{1}{2}F_3+F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right) \xrightarrow{F_2+F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right) \Rightarrow D^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Calculamos $C - A$:

$$C - A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 8 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculamos X :

$$X = (C - A)D^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 8 & -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 5:

Resolver la ecuación matricial $A-BX=C$ con $A=\begin{pmatrix}8 & -2\\ 3 & 5\\ 5 & 7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$.

Despejamos X :

$$A-BX=C \to A-C=BX \to B^{-1}\left(A-C\right)=B^{-1}BX \to \boxed{B^{-1}\left(A-C\right)=X}$$

Calculamos B^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{F_1+F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{-F_1+F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{F_3:2} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow[-2F_3+F_1]{-F_3+F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{array}\right) \xrightarrow{F_2+F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{array}\right) \Rightarrow B^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{5} & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Calculamos $A-C$:

$$A-C=\begin{pmatrix}8 & -2\\ 3 & 5\\ 5 & 7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & -1\\ 3 & 3\\ 2 & 6\end{pmatrix}$$

Calculamos X :

$$X=B^{-1}(A-C)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{5} & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & -1\\ 3 & 3\\ 2 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$$

Ejercicio 6:

Resolver la ecuación matricial $AX=BX+C$ con $A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}2 & 0\\ \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}$.

Despejamos X :

$$AX=BX+C\rightarrow AX-BX=C\rightarrow (A-B)X=C\rightarrow (A-B)^{-1}(A-B)X=(A-B)^{-1}C\rightarrow \boxed{X=(A-B)^{-1}C}$$

Calculamos $A-B$:

$$A-B=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 4\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

Calculamos $(A-B)^{-1}$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc}0 & 4 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{F_1\leftrightarrow F_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 4 & 1 & 0\end{array}\right)\xrightarrow{F_2:4}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0\end{array}\right)\xrightarrow{-2F_2+F_1}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & -\frac{1}{2} & 1\\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0\end{array}\right)$$

Calculamos X :

$$X=(A-B)^{-1}C=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Resolución de sistemas de ecuaciones matriciales

Ejercicio 7:

Resuelve el sistema de ecuaciones matriciales $\begin{cases} X+Y=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \\ 2X-Y=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \end{cases}$

Si llamamos $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, el sistema que tenemos que resolver es: $\begin{cases} X+Y=A \\ 2X-Y=B \end{cases}$.

Sumando ambas ecuaciones resulta que $3X=A+B$, de donde obtenemos que $X=\frac{1}{3}(A+B)$:

Calculamos X:

$$X=\frac{1}{3}\left[\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\right]=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Por otra parte, como $X+Y=A$, se tiene que $Y=A-X$:
Calculamos Y:

$$Y=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución: $\boxed{(X,Y)=\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right)}$

Ejercicio 8:

Resuelve el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 3X+Y=M \\ X+Y=N \end{cases}$ donde X e Y son matrices cuadradas de orden 3, y $M=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $N=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Sumando ambas ecuaciones resulta: $2X=M-N \Rightarrow X=\frac{1}{2}(M-N)$

$$X=\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por otra parte, si multiplicamos por – 3 la segunda ecuación y las sumamos, obtenemos:

$$-2Y=M-3N \Rightarrow \Rightarrow Y=-\frac{1}{2}(M-3N)=-\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}\right]=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución: $\boxed{(X,Y)=\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)}$

Resolver el sistema de ecuaciones matricial $\begin{cases} 2X+Y=A \\ 4X-3Y=B \end{cases}$, donde $A=\begin{pmatrix} -1 & 8 & 7 \\ -3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Lo resolvemos por reducción:

$$\begin{cases} 2X+Y=A \xrightarrow{\cdot 3} \\ 4X-3Y=B \end{cases} \underbrace{\begin{cases} 6X+3Y=3A \\ 4X-3Y=B \end{cases}}_{\text{Sumamos}} \Rightarrow 10X=3A+B \Rightarrow X=\frac{1}{10}(3A+B)$$

Calculamos X :

$$X=\frac{1}{10}(3A+B)=\frac{1}{10}\left[3\begin{pmatrix} -1 & 8 & 7 \\ -3 & 6 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}\right]=\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 0 & 20 & 20 \\ -10 & 20 & 10 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Por otra parte, de la primera ecuación, resulta que $Y=A-2X$:

$$Y=\begin{pmatrix} -1 & 8 & 7 \\ -3 & 6 & 2 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución: $\boxed{(X,Y)=\left(\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\right)}$

Ejercicio 9:

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones matriciales: $\begin{cases} X+2Y=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \\ 2X-Y=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \end{cases}$

Llamamos $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$. Así, el sistema a resolver es: $\begin{cases} X+2Y=A \\ 2X-Y=B \end{cases}$

$$\begin{cases} X+2Y=A \\ 2X-Y=B \xrightarrow{\cdot 2} \end{cases} \underbrace{\begin{cases} X+2Y=A \\ 4X-2Y=2B \end{cases}}_{\text{sumamos}} \to 5X=A+2B \Rightarrow X=\frac{1}{5}(A+2B)$$

Calculamos X :

$$X=\frac{1}{5}\left[\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}\right]=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 10 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

De la segunda ecuación resulta que: $Y = 2X - B$
Calculamos Y:

$$Y = 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución: $\boxed{(X, Y) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \right)}$

CÁLCULO DEL RANGO DE UNA MATRIZ

Diremos que una fila o columna (de una matriz) es linealmente independiente si no se puede expresar como combinación lineal de las otras.

El rango de una matriz A es el número de filas (o de columnas) linealmente independientes que tiene la matriz. Se representa por $rg(A)$ o por $rango(A)$.

Método de Gauss
Si en una matriz cuadrada A
- Intercambiamos dos filas (columnas) o
- Multiplicamos una fila (columna) por un número no nulo o
- Le sumamos a una fila (columna) una combinación lineal del resto

la matriz A' resultante tiene el mismo rango que A.

Por tanto, el rango se calcula, ***aplicando el método de Gauss***, haciendo cero el mayor número de filas (o de columnas). En este caso, el rango es el número de filas (o de columnas) no nulas.

EJEMPLOS:
Calcula el rango de las siguientes matrices:

a) $A=\begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Por Gauss:

$$A=\begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[-5F_3+Fl2]{-8F_3+F_1} \begin{pmatrix} 0 & -7 & 4 \\ 0 & -7 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2+F_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rango(A)=2$$ (número de filas distintas de cero)

b) $B=\begin{pmatrix} 6 & -1 & 3 \\ -6 & 8 & 0 \\ 2 & 5 & -5 \end{pmatrix}$

Por Gauss:

$$B=\begin{pmatrix} 6 & -1 & 3 \\ -6 & 8 & 0 \\ 2 & 5 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_2} \begin{pmatrix} -1 & 6 & 3 \\ 8 & -6 & 0 \\ 5 & 2 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[5F_1+F_3]{8F_1+F_2} \begin{pmatrix} -1 & 6 & 3 \\ 0 & 42 & 24 \\ 0 & 32 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{-32F_2+42F_3}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 6 & 3 \\ 0 & 42 & 24 \\ 0 & 0 & -348 \end{pmatrix} \Rightarrow rango(B)=3$$ ya que tiene tres filas distintas de cero.

c) $C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ -2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

Por Gauss:

$$C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 7\\ -2 & 4 & 3 & 5\\ -1 & 6 & 5 & 4\end{pmatrix}\xrightarrow[F_1+F_3]{2F_1+F_2}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 7\\ 0 & 8 & 9 & 19\\ 0 & 8 & 8 & 11\end{pmatrix}\xrightarrow{-F_2+F_3}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 7\\ 0 & 8 & 9 & 19\\ 0 & 0 & -1 & -8\end{pmatrix}\Rightarrow rango(C)=3$$