3 Potencias y raíz cuadrada

DESAFÍO

De hijas, hijos y edades

Carlota tiene tres hijos y Héctor dos hijas, todos de distintas edades. La suma de las edades de los hijos de Carlota es igual a la suma de las edades de las hijas de Héctor. La suma del cubo de las edades coincide también.

¿Cuál es la menor edad que pueden tener?

¿Qué sabes ya?

Cómo se calcula la potencia de un número natural

Una potencia es una forma abreviada de escribir una multiplicación de factores iguales.

El factor que se repite, *a*, es la base.

El número de veces que se repite la base, *n*, es el exponente.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ veces}}$$

EJEMPLO

Producto	Potencia	Se lee
$9 \cdot 9$	9^2	9 al cuadrado
$7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$	7^4	7 a la cuarta

ACTIVIDADES

1 ¿Cómo se representa de otra forma 5^6?

a) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ b) $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6$

Cómo se conoce el significado de la raíz cuadrada

La raíz cuadrada de un número *a* es otro número *b* tal que, al elevarlo al cuadrado, nos da el número *a*.

Símbolo de la raíz → $\sqrt{a} = b$ ← Raíz

Radicando

$\sqrt{a} = b \rightarrow b^2 = a$

EJEMPLO

$\sqrt{4} = 2$, porque $2^2 = 4$. $6^2 = 36$, luego $\sqrt{36} = 6$.

ACTIVIDADES

2 Calcula la raíz cuadrada de 121.

a) 12 b) 11 c) 10 d) 13

1. Potencias de números enteros

Una **potencia de un número entero** es una forma abreviada de escribir una multiplicación de números enteros iguales.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{n \text{ veces}}$$

a → Se llama **base** y es el número entero que se repite.

n → Se llama **exponente** y es el número de veces que se multiplica ese número entero.

Ten en cuenta que $(-2)^4 \neq -2^4$, porque:

$(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = +16$

$-2^4 = -(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = -16$

EJEMPLO

1. Expresa cada producto como potencia y escribe cómo se lee.

Producto	Potencia	Se lee
$(+3) \cdot (+3)$	$(+3)^2$	3 al cuadrado
$(-8) \cdot (-8) \cdot (-8)$	$(-8)^3$	Menos 8 al cubo
$7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$	7^5	7 a la quinta

Signo de una potencia de un número entero

GEOGEBRA

En una potencia de base un número entero y exponente natural:

- Si la base es un entero positivo, la potencia es siempre positiva.
- Si la base es un entero negativo, la potencia es positiva cuando el exponente es par y negativa cuando es impar.

RETO

¿Cuándo tien
el mismo sign
la potencia de
número entero
la de su opuest

Para hallar potencias de números enteros con la calculadora usamos la tecla $x^{\blacksquare}$.

2^6 → 2 $x^{\blacksquare}$ 6 = 64

$(-2)^6$ → (− 2) $x^{\blacksquare}$ 6 = 64

EJEMPLO

2. Calcula el signo de estas potencias.

a) $(-3)^6$ Base negativa y exponente par → Signo +

b) $(-2)^7$ Base negativa y exponente impar → Signo −

c) $(+4)^9$ Base positiva → Signo +

ACTIVIDADES

1 Escribe cómo se leen las potencias y calcula su signo.

a) 3^5 c) $(-8)^6$ e) 10^3 g) $(-4)^2$

b) 2^2 d) $(-5)^3$ f) 4^2 h) $(-2)^3$

2 Expresa en forma de potencia y halla su signo.

a) $6 \cdot 6 \cdot 6$ c) $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$

b) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ d) $(-5) \cdot (-5)$

3 Calcula el exponente de estas potencias.

a) $3^{\square} = 27$ c) $4^{\square} = 64$

b) $(-3)^{\square} = -27$ d) $(-2)^{\square} = 16$

4 **REFLEXIONA.** Busca dos números tales que, al elevarlos a la cuarta potencia, tengan el mismo valor. ¿Cuántos números cumplen esta condición?

Cómo se calcula el valor de la potencia de un número entero

Halla el valor de las siguientes potencias.

a) 3^2 b) $(-3)^3$ c) $(-3)^4$ d) -3^4

La potencia -3^4 es una potencia con base positiva, 3. Al llevar delante el signo −, el resultado es negativo.
$-3^4 = -(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = -81$

① Tomamos el valor absoluto de la base y calculamos su potencia.

a) $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$ b) $3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ c) y d) $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$

② Si la base es negativa y el exponente es un número impar, añadimos el signo − al resultado. En caso contrario, la potencia es positiva.

a) $3^2 = +9$
Base positiva → Signo +

Exponente impar
b) $(-3)^3 = -27$
Base negativa → Signo −

Exponente par
c) $(-3)^4 = +81$
Base negativa → Signo +

Signo − delante
d) $-3^4 = -81$
Base positiva → Signo −

ACTIVIDADES

5 Calcula las potencias de números enteros.

a) $(-2)^4$ d) 5^2 g) -7^3
b) 2^3 e) $(-7)^3$ h) $(-6)^2$
c) $(-1)^7$ f) $(-10)^4$ i) -9^2

6 Escribe la potencia en cada caso y calcula su valor.

a) Base −2 y exponente 5.
b) Base −1 y exponente 6.
c) $(-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4)$
d) Tres factores iguales a 5.
e) Cinco factores iguales a −3.
f) Seis factores iguales a −2.

7 Razona cuál es el signo de cada potencia y su valor.

35 factores iguales a −1.
24 factores iguales a −1.
7 factores iguales a −10.
13 factores iguales a 1.
15 factores iguales a −10.
9 factores iguales a 10.

8 Forma todas las potencias posibles y halla su valor.

Bases
−3 −2
−10 5

Exponentes
3 2
4

9 Indica si estas desigualdades son ciertas.

a) $(-3)^2 > (-2)^3$ c) $(-3)^3 < (-3)^4$ e) $4^2 < (-2)^3$
b) $(-3)^4 < -3^4$ d) $4^3 > 3^4$ f) $4^2 > (-4)^4$

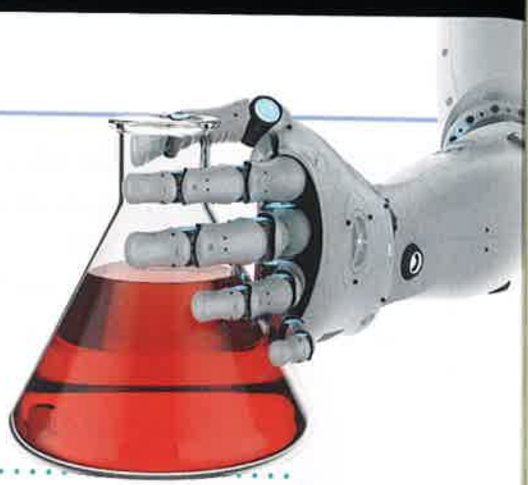
10 Completa los huecos en tu cuaderno.

a) $(-2)^{\square} = -8$ c) $-\square^4 = -16$
b) $(-4)^{\square} = 256$ d) $\square^3 = 125$

11 Razona si estas afirmaciones son ciertas.

a) Dos números enteros distintos al elevarlos a la cuarta pueden dar el mismo resultado.
b) Dos números enteros iguales elevados a diferentes exponentes pueden dar el mismo resultado.
c) Dos números enteros distintos elevados a distintos exponentes pueden dar el mismo resultado.
d) Si un número entero es menor que otro y los elevamos a un exponente común, el valor de la potencia del menor es menor que el de la potencia del mayor.

2. Notación científica



2.1. Potencias de base 10

Una **potencia de base 10** es igual a la unidad seguida de tantos ceros como indica el exponente.

EJEMPLO

3. Halla el valor de estas potencias de base 10.

a) $10^4 = 10\,000$

b) $10^6 = 1\,000\,000$

c) $10^8 = 100\,000\,000$

d) $10^9 = 1\,000\,000\,000$

2.2. Expresión de números muy grandes

GEOGEBRA

Los números muy grandes se suelen expresar con potencias de base 10.

Un número está expresado en **notación científica** cuando viene dado como el producto de un número mayor o igual que 1 y menor que 10 por una potencia de 10.

El exponente de la potencia de 10 se llama **orden de magnitud**.

RETO

¿Qué número es mayo

$(10^5)^2$ 1

EJEMPLOS

4. Expresa en notación científica indicando el orden de magnitud.
La extensión de Europa es de $10\,530\,000$ km^2.

$$10\,530\,000 = 1{,}053 \cdot 10\,000\,000 = 1{,}053 \cdot 10^7$$

El orden de magnitud es 7.

5. Determina si estos números están expresados en notación científica.

a) $17{,}45 \cdot 10^8$ → No, porque 17,45 es mayor que 10.

b) $7 \cdot 10^5$ → Está expresado en notación científica.

c) $5{,}89 \cdot 10^{22}$ → Está expresado en notación científica.

El número por el que se multiplica la potencia de 10 puede ser entero o decimal.

ACTIVIDADES

12 Calcula el valor de estas potencias de base 10.

a) 10^3 c) 10^5 e) 10^{12}

b) 10^7 d) 10^{10} f) 10^{11}

13 Escribe estos números en notación científica e indica el orden de magnitud.

a) 4 590 c) 39 876 e) 324 000 000

b) 13 800 d) 475 000 f) 800 500 000

14 Completa los huecos en tu cuaderno.

a) $89\,000 = \square \cdot 10^4$

b) $30\,500 = 3{,}05 \cdot 10^{\square}$

15 **REFLEXIONA.** Razona tu respuesta.

a) Si un número tiene mayor orden de magnitud que otro en notación científica, ¿es mayor que él?

b) Un número de 20 cifras, ¿qué orden de magnitud tendrá en notación científica?

3. Potencias de fracciones

GEOGEBRA

Para elevar **una fracción a una potencia**, elevamos el numerador y el denominador a esa potencia.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{b}}_{n \text{ veces}} = \frac{a^n}{b^n}$$

RETO

La potencia de una ...acción propia, ¿es propia? ¿Es mayor ...o menor que la inicial?

EJEMPLO

6. Calcula.

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$

b) $\left(-\frac{1}{5}\right)^3 = \left(-\frac{1}{5}\right)\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)\cdot\left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{(-1)^3}{5^3} = -\frac{1}{125}$

Signo de la potencia de una fracción

En una potencia de base una fracción y un exponente natural:

- Si la base es una fracción positiva, la potencia es positiva.
- Si la base es una fracción negativa, la potencia es positiva cuando el exponente es par y negativa cuando es impar.

EJEMPLO

7. Calcula.

a) $\left(-\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{(-1)^6}{2^6} = \frac{1}{64}$ Base negativa y exponente par → Signo +

b) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{(-1)^3}{2^3} = -\frac{1}{8}$ Base negativa y exponente impar → Signo −

c) $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$ Base positiva → Signo +

Son fracciones negativas:

$$\frac{-3}{4} = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}$$

Son fracciones positivas:

$$\frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$$

ACTIVIDADES

16 Expresa como potencia.

a) $\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)$

b) $\left(\frac{-3}{4}\right)\cdot\left(\frac{-3}{4}\right)\cdot\left(\frac{3}{-4}\right)\cdot\left(\frac{3}{-4}\right)$

c) $\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}$

d) $\left(-\frac{7}{8}\right)\cdot\left(-\frac{7}{8}\right)$

17 Indica el signo de cada potencia.

a) $\left(-\frac{9}{2}\right)^5$ b) $\left(\frac{11}{3}\right)^7$ c) $\left(\frac{8}{-5}\right)^6$ d) $-\left(\frac{3}{11}\right)^8$

18 Calcula.

a) $\left(-\frac{1}{2}\right)^6$ c) $\left(\frac{3}{4}\right)^5$ e) $\left(\frac{11}{-3}\right)^2$

b) $\left(-\frac{5}{6}\right)^3$ d) $\left(\frac{-2}{3}\right)^4$ f) $\left(\frac{5}{3}\right)^4$

19 **REFLEXIONA.** ¿La inversa de la potencia de una fracción es igual que la misma potencia de la fracción inversa?

4. Operaciones con potencias

4.1. Producto de potencias de la misma base

Para **multiplicar** dos o más **potencias con la misma base**, se deja la misma base y se suman los exponentes.

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

Al multiplicar potencias de la misma base, los exponentes se suman, NO se multiplican.

$2^5 \cdot 2^3 = 2^{5+3} = 2^8$

$2^5 \cdot 2^3 \neq 2^{5 \cdot 3} = 2^{15}$

EJEMPLO

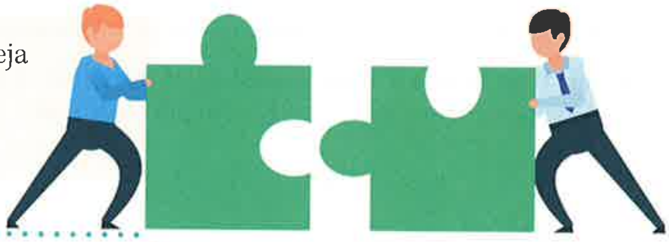
8. Escribe estos productos como una sola potencia.

	Por la definición de potencia	Por la propiedad
$2^2 \cdot 2^3$	$\underbrace{2 \cdot 2}_{2\text{ veces}} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{3\text{ veces}} = 2^5$	$2^{2+3} = 2^5$
$(-4)^2 \cdot (-4)$	$\underbrace{(-4) \cdot (-4)}_{2\text{ veces}} \cdot \underbrace{(-4)}_{1\text{ vez}} = (-4)^3$	$(-4)^{2+1} = (-4)^3$

4.2. Cociente de potencias de la misma base

Para **dividir** dos o más **potencias con la misma base**, se deja la misma base y se restan los exponentes.

$$a^n : a^m = a^{n-m} \qquad n \geq m$$



EJEMPLO

9. Escribe estos productos como una sola potencia.

	Por la definición de la potencia	Por la propiedad
$3^5 : 3^2$	$\dfrac{3^5}{3^2} = \dfrac{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{\cancel{3} \cdot \cancel{3}} = 3^3$	$3^{5-2} = 3^3$
$(-5)^3 : (-5)^2$	$\dfrac{(-5)^3}{(-5)^2} = \dfrac{\cancel{(-5)} \cdot \cancel{(-5)} \cdot (-5)}{\cancel{(-5)} \cdot \cancel{(-5)}} = -5$	$(-5)^{3-2} = -5$

Al dividir potencias de la misma base, los exponentes se restan, NO se dividen.

$7^8 : 7^2 = 7^{8-2} = 7^6$

$7^8 : 7^2 \neq 7^{8:2} = 7^4$

ACTIVIDADES

20 Expresa estas operaciones como una sola potencia. Usa la calculadora para hallar sus valores.

a) $(-2)^3 \cdot (-2)^6$

b) $\left(\dfrac{5}{2}\right)^4 \cdot \left(\dfrac{5}{2}\right)^3$

c) $\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(-\dfrac{1}{3}\right)^5$

d) $(-2)^6 : (-2)^3$

e) $\left(\dfrac{5}{2}\right)^4 : \left(\dfrac{5}{2}\right)^3$

f) $\left(-\dfrac{1}{3}\right)^5 : \left(-\dfrac{1}{3}\right)^2$

21 Escribe los productos y cocientes como una sola potencia y, después, opera.

a) $5^2 \cdot 5^2 + 3^6 : 3^5 - 10^2 \cdot 10^3$

b) $5^2 : 5 + 3^3 \cdot 3^2 + 10^2 : 10^2$

22 **REFLEXIONA.** Copia y completa en tu cuaderno.

a) $4^6 \cdot 4^{\square} = 4^9$

b) $(-7)^{\square} : (-7)^3 = (-7)^3$

- Una potencia de exponente 0 es igual a la unidad.

$(-5)^0 = 1 \qquad \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$

- Una potencia de exponente 1 es igual a la base

$(-7)^1 = -7 \qquad \left(\frac{7}{2}\right)^1 = \frac{7}{2}$

4.3. Potencia de una potencia

Para **elevar una potencia a otra potencia**, se deja la misma base y se multiplican los exponentes.

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

EJEMPLO

10. Expresa $(5^2)^4$ como una sola potencia.

Por la definición de potencia	Por la propiedad
$(5^2)^4 = \underbrace{5^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2}_{4\text{ veces}} = 5^{2+2+2+2} = 5^8$	$(5^2)^4 = 5^{2 \cdot 4} = 5^8$

4.4. Potencia de un producto y de un cociente

- La **potencia de un producto** es igual al producto de las potencias de sus factores.

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

- La **potencia de un cociente** es igual al cociente de las potencias de sus factores.

$$(a : b)^n = a^n : b^n$$

RETO

Expresa en forma de potencia cuántos abuelos, bisabuelos y tatarabuelos tienes.

EJEMPLO

11. Resuelve las siguientes operaciones con potencias.

Por la definición de potencia	Por la propiedad
$(5 \cdot 2)^4 = \underbrace{(5 \cdot 2) \cdot (5 \cdot 2) \cdot (5 \cdot 2) \cdot (5 \cdot 2)}_{4\text{ veces}} = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10\,000$	$(5 \cdot 2)^4 = 5^4 \cdot 2^4 = 625 \cdot 16 = 10\,000$
$\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\right)^2 = \underbrace{\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\right)}_{2\text{ veces}} = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$	$\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$
$(8 : (-4))^3 = \underbrace{(8 : (-4)) \cdot (8 : (-4)) \cdot (8 : (-4))}_{3\text{ veces}} = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$	$(8 : (-4))^3 = 8^3 : (-4)^3 = 512 : (-64) = -8$

ACTIVIDADES

23. Opera y expresa como una sola potencia.

a) $(5^4)^3$

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3$

c) $\left[(-3)^4\right]^3$

d) $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \frac{2}{3}\right]^3$

e) $\left[(-3)^9\right]^0$

f) $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2 : \left(-\frac{1}{2}\right)\right]^4$

24. **REFLEXIONA.** Razona en cada caso el número que falta y completa en tu cuaderno.

a) $(5^{\square})^4 = 5^{20}$

b) $[(-6)^{\square}]^4 = (-6)^8$

c) $(2^3)^{\square} = 2^{27}$

d) $[(-8)^7]^{\square} = (-8)^{21}$

5. Raíz cuadrada de números enteros

5.1. Raíz cuadrada exacta

La **raíz cuadrada exacta** de un número a es otro número, b, tal que al elevarlo al cuadrado obtenemos el número a.

$$\sqrt{a} = b \rightarrow b^2 = a$$

a es el **radicando**, $\sqrt{\ }$ es el símbolo de la raíz y b es la **raíz.**

Símbolo de la raíz → $\sqrt{a} = b$ ← Raíz
↑
Radicando

Para calcular la raíz de un número usamos la tecla $\boxed{\sqrt{\blacksquare}}$.

$\boxed{\sqrt{\blacksquare}}$ 25 $\boxed{=}$ $\boxed{5}$

$\boxed{\sqrt{\blacksquare}}$ $\boxed{-}$ 25 $\boxed{=}$ $\boxed{\text{MATH ERROR}}$

Los números con raíz cuadrada exacta se llaman **cuadrados perfectos.**

- Un número entero positivo tiene siempre dos raíces cuadradas, una positiva y otra negativa.
- Un número entero negativo no tiene raíz cuadrada.

$(+2)^2 = +4 \quad (-2)^2 = +4$

No existe ningún número que, elevado al cuadrado, dé -4.

EJEMPLO

12. Calcula.

a) $\left.\begin{array}{l}\sqrt{49} = 7 \quad \text{porque} \quad 7^2 = 49 \\ \sqrt{49} = -7 \text{ porque } (-7)^2 = 49\end{array}\right\} \rightarrow$ Lo escribimos $\sqrt{49} = \pm 7$.

b) $\sqrt{-4} \rightarrow$ No existe, porque ningún número elevado al cuadrado es negativo.

5.2. Raíz cuadrada entera

Si el radicando no es un cuadrado perfecto, su raíz no es exacta.

GEOGEBRA

La **raíz cuadrada entera** de un número a es el mayor número b cuyo cuadrado es menor que a. El **resto** de la raíz entera es la diferencia entre el radicando, a, y el cuadrado de la raíz entera, b.

$$\text{Resto} = a - b^2$$

RETO

¿Qué valore[s] puede tener l[a] última cifra de[l] número que te[nga] raíz cuadrad[a] exacta?

EJEMPLO

13. Calcula $\sqrt{45}$. → 45 no es un cuadrado perfecto.

Tanteando: …, $5^2 = 25$, $6^2 = 36$, $7^2 = 49$, … → $6^2 < 45 < 7^2$

La raíz entera de 45 es 6 y su resto es $45 - 6^2 = 45 - 36 = 9$.

ACTIVIDADES

25. Halla la raíz cuadrada en estos números.
a) 169 b) 400 c) 196 d) 900 e) 225

26. Calcula la raíz cuadrada entera y el resto.
a) 45 b) 87 c) 115

27. Obtén un número cuya raíz cuadrada entera sea 6 y su resto 2.

28. **REFLEXIONA.** ¿Cuánto puede valer como máximo el resto de una raíz cuadrada entera?

5.3. Aproximación decimal de una raíz cuadrada

Los números que no tienen raíz cuadrada exacta tienen como raíz un número decimal con infinitas cifras decimales. Podemos hallar la raíz de estos números mediante una **aproximación decimal**.

EJEMPLO

14. Calcula una aproximación decimal de $\sqrt{14}$.

1.º Calculamos la raíz entera del número.

$3^2 < 14 < 4^2 \rightarrow$ Raíz cuadrada entera $= 3$

2.º Añadimos una cifra decimal a la raíz entera y determinamos el valor que se aproxima más al radicando. Se suele empezar por la mitad del intervalo para, a partir de ahí, buscar el número apropiado.

$$\left.\begin{array}{l} 3{,}5^2 = 12{,}25 < 14 \\ \dots \\ 3{,}7^2 = 13{,}69 < 14 \\ 3{,}8^2 = 14{,}44 > 14 \end{array}\right\} \rightarrow 3{,}7^2 < 14 < 3{,}8^2$$

3.º Continuamos con el proceso hasta obtener el número de cifras decimales que deseamos.

$$\left.\begin{array}{l} 3{,}75^2 = 14{,}0625 > 14 \\ 3{,}74^2 = 13{,}9876 < 14 \end{array}\right\} \rightarrow 3{,}74^2 < 14 < 3{,}75^2$$

4.º Calculamos el valor del resto.

Resto $= 14 - 3{,}74^2 = 0{,}0124$

$\sqrt{14} = 3{,}74$ y resto $= 0{,}0124$

«

Al hallar la raíz cuadrada de un número que no es un cuadrado perfecto con la calculadora, obtenemos un número decimal.

$\sqrt{\blacksquare}$ 97 = 9,8488578

Ese número tendrá tantos decimales como la calculadora permita.

Si calculamos el cuadrado de ese número:

$9{,}8488578^2 = 96{,}999999$

no obtenemos el radicando porque la raíz de un número que no es un cuadrado perfecto tiene infinitas cifras decimales.

RETO

Si la proximación de una raíz iene 2 cifras decimales, uántas puede ener como máximo el resto?

La raíz se ha hallado correctamente si se cumple que:

$$\text{Radicando} = (\text{raíz})^2 + \text{resto}$$

EJEMPLO

15. Si aproximamos $\sqrt{18}$ por 4,24; ¿cuál es su resto?

Radicando $= (\text{raíz})^2 +$ resto $\rightarrow 18 = 4{,}24^2 +$ resto

Despejando obtenemos:

Resto $= 18 - 4{,}24^2 = 18 - 17{,}9776 = 0{,}0224$

ACTIVIDADES

29. Halla el valor de estas raíces cuadradas.

a) $\sqrt{19}$	d) $\sqrt{16}$	g) $\sqrt{625}$
b) $\sqrt{51}$	e) $\sqrt{37}$	h) $\sqrt{1}$
c) $\sqrt{7}$	f) $\sqrt{127}$	i) $\sqrt{28}$

30. Calcula la aproximación decimal de las siguientes raíces cuadradas, con dos cifras decimales y obtén su resto.

a) $\sqrt{21}$ b) $\sqrt{10}$ c) $\sqrt{45}$ d) $\sqrt{84}$

31. **REFLEXIONA.** ¿Existen dos números enteros de manera que la aproximación decimal de su raíz cuadrada sea 6,23?

6. Raíz cuadrada de fracciones

La **raíz cuadrada de una fracción** es el cociente entre la raíz cuadrada del numerador y la raíz cuadrada del denominador.

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Una fracción tiene raíz cuadrada exacta si su numerador y su denominador son cuadrados perfectos.

La **raíz cuadrada exacta de una fracción** es un número cuyo cuadrado es igual a dicha fracción.

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{c}{d} \rightarrow \left(\frac{c}{d}\right)^2 = \frac{a}{b}$$

- Una fracción positiva tiene siempre dos raíces cuadradas, una positiva y otra negativa.
- Una fracción negativa no tiene raíz cuadrada.

EJEMPLO

16. Calcula.

a) $\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5} \rightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{4^2}{5^2} = \frac{16}{25}$

$\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = -\frac{4}{5} \rightarrow \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{(-4)^2}{5^2} = \frac{16}{25}$

Es decir, $\sqrt{\frac{16}{25}} = \pm\frac{4}{5}$.

b) $\sqrt{-\frac{16}{25}} \rightarrow$ No existe ningún número con cuadrado negativo.

c) $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} = \pm\frac{1}{2}$

d) $\sqrt{\frac{10}{9}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{9}} = \pm\frac{\sqrt{10}}{3}$

RETO

La raíz cuadrada [...] una fracci[...] positiva, ¿[...] siempre u[...] fracción?

ACTIVIDADES

32 Calcula.

a) $\sqrt{\frac{9}{100}}$ c) $\sqrt{\frac{4}{81}}$ e) $\sqrt{\frac{121}{25}}$

b) $\sqrt{\frac{64}{144}}$ d) $\sqrt{\frac{16}{441}}$ f) $\sqrt{\frac{36}{225}}$

33 Completa las siguientes afirmaciones en tu cuaderno.

a) $\frac{2}{7}$ es una raíz cuadrada de la fracción…

b) $-\frac{5}{3}$ es una raíz cuadrada de la fracción…

34 Completa los huecos en tu cuaderno.

a) $\sqrt{\frac{49}{\square}} = \frac{7}{2}$ c) $\sqrt{\frac{\square}{2}} = 4$

b) $\sqrt{\frac{\square}{4}} = -\frac{5}{\square}$ d) $\sqrt{\frac{\square}{3}} = -3$

35 **REFLEXIONA.** Razona tu respuesta, ayudándote de algunos ejemplos.

La raíz cuadrada de una fracción impropia, ¿es también una fracción impropia?

Cómo se resuelven las operaciones combinadas con potencias y raíces

Cuando operamos con raíces, se toma el resultado positivo.
$\sqrt{9} = 3$

Resuelve esta operación considerando el resultado positivo de la raíz cuadrada.

$$\left[(-2)^3 \cdot \frac{1}{2}\right]^2 : \sqrt{16} - (6^5 : 6^4) \cdot \sqrt{\frac{81}{36}} + 1$$

1. Resolvemos las operaciones que hay dentro de los paréntesis y corchetes.

$$\left[(-2)^3 \cdot \frac{1}{2}\right]^2 : \sqrt{16} - (6^5 : 6^4) \cdot \sqrt{\frac{81}{36}} + 1 =$$

División de potencias de la misma base.

$$= \left[-8 \cdot \frac{1}{2}\right]^2 : \sqrt{16} - (6^{5-4}) \cdot \sqrt{\frac{81}{36}} + 1 =$$

$6^1 = 6$

$$= \left[-\frac{8}{2}\right]^2 : \sqrt{16} - 6 \cdot \sqrt{\frac{81}{36}} + 1 =$$

2. Calculamos las potencias y las raíces.

$$= [-4]^2 : \sqrt{16} - 6 \cdot \sqrt{\frac{81}{36}} + 1 =$$

$\frac{\sqrt{81}}{\sqrt{36}} = \frac{9}{6}$

3. Resolvemos las multiplicaciones y las divisiones de izquierda a derecha.

$$= 16 : 4 - 6 \cdot \frac{9}{6} + 1 =$$

4. Hallamos las sumas y las restas.

$$= 4 - 9 + 1 = -4$$

ACTIVIDADES

36 Calcula y simplifica.

a) $1 + \frac{2}{3} : \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right) - \frac{9}{8} \cdot \sqrt{\frac{16}{9}}$

b) $\sqrt{\frac{4}{16}} \cdot \left(\frac{4}{5} - \frac{3}{2}\right)^2 : \frac{7}{5} + 2 \cdot \frac{1}{10}$

c) $\frac{2}{5} : \left(\frac{5}{3} - \frac{1}{5} + \frac{2}{15}\right) \cdot \sqrt{\frac{9}{16}} + 1 : \left(-\frac{4}{3}\right)^2$

d) $\frac{2}{5} : \left(\frac{5}{3} : \frac{10}{9}\right)^2 \cdot \frac{5}{2} - \left(\frac{5}{2} - \frac{5}{3}\right)^2$

e) $\left[\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) \cdot 2 - \frac{3}{10}\right] \cdot \left(\frac{11}{7} - \frac{1}{2}\right)$

f) $-3 - \sqrt{\frac{4}{25}} \cdot \left[(-3) : \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{10}\right)\right]^3$

g) $\frac{8}{3} - \left[7 \cdot \left(\frac{8}{3} + 2 : \frac{1}{6}\right)\right]$

h) $\left(\frac{2}{6} + \frac{1}{3}\right)^3 : \sqrt{\frac{4}{9}} : \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} - 1\right)$

37 Resuelve estas operaciones.

a) $\sqrt{\frac{16}{25}} - \frac{7}{2} + \left[\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1 - \frac{2}{5}\right]$

b) $\left(\frac{1}{5} + \frac{7}{2}\right) + \left[\left(\sqrt{\frac{9}{4}} + \frac{3}{10}\right) - 2^3\right]$

c) $(-3)^3 \cdot \frac{1}{9} + \frac{5}{3} - \left(-4 : \sqrt{\frac{1}{64}} + 3^3\right)$

d) $\frac{3}{5} \cdot 4 - \left(\frac{6}{5}\right)^2 - \left(\frac{13}{10} - \sqrt{\frac{144}{25}} + 2\right)$

e) $\frac{3}{2} : \left[\left(-4 + \frac{11}{8}\right) \cdot \left(-\frac{2}{7}\right)^2\right]$

f) $3^2 - \left[3 + \left(\frac{5}{2}\right)^3 + \frac{3}{4}\right] : \left(\sqrt{\frac{49}{4}} - 1\right)$

g) $\left[\frac{3}{4} + \left(\frac{7}{3} - 2\right)^3 \cdot \frac{9}{2}\right] - \left(\sqrt{\frac{49}{144}} + \sqrt{\frac{1}{16}}\right)$

h) $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 + \frac{7}{8} : \left[\left(\frac{1}{2}\right)^4 - \frac{1}{2}\right] \cdot \left(\sqrt{\frac{49}{36}} - \frac{1}{4}\right) + 2$

1. Realiza cálculos en los que intervienen potencias de exponente natural

ACTIVIDADES FLASH

38 Escribe en forma de potencia si es posible y explica cuál es la base y cuál es el exponente en cada caso.

a) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$

b) $\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5}$

c) $(-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4)$

d) $\frac{-2}{7} \cdot \frac{2}{-7} \cdot \frac{-2}{7} \cdot \left(-\frac{2}{7}\right)$

39 Indica los términos de estas potencias y léelas en voz alta.

a) $(-2)^3$

b) 4^4

c) $\left(\frac{2}{5}\right)^3$

d) 3^2

e) 2^6

f) $\left(-\frac{7}{2}\right)^3$

g) 1^{10}

h) $(-1)^{15}$

i) $\left(\frac{-2}{3}\right)^4$

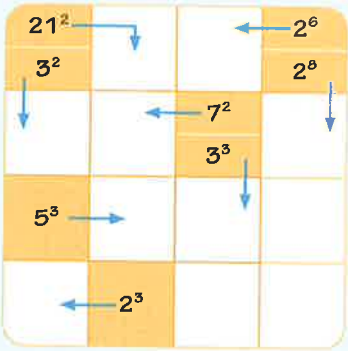
40 Expresa en forma de producto y halla el resultado de las siguientes potencias.

a) $\left(\frac{10}{3}\right)^2$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^4$

c) $\left(-\frac{1}{2}\right)^7$

41 Copia y completa el autodefinido.



CÁLCULO MENTAL

42 Determina el valor de a en estas igualdades.

a) $\left(\frac{5}{4}\right)^a = \frac{125}{64}$

b) $\left(-\frac{5}{4}\right)^a = -\frac{125}{64}$

c) $\left(\frac{3}{4}\right)^a = \frac{9}{16}$

d) $\left(-\frac{3}{4}\right)^a = \frac{9}{16}$

43 **INVESTIGA.** ¿En qué casos el cuadrado de un número coincide con su cubo?

44 Indica si son ciertas las siguientes igualdades.

a) $\left(-\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{3}$

b) $\left(\frac{-3}{-3}\right)^4 = 81$

c) $-\left(-\frac{7}{2}\right)^3 = \frac{-343}{8}$

d) $\frac{(-2)^5}{7^5} = \left(-\frac{2}{7}\right)^5$

45 **JUEGO.** Formad parejas para jugar al *memory*. Elaborad estas tarjetas, mezcladlas y colocadlas bocabajo formando filas y columnas.

$(-2)^4$	-3^2	-2^4	-25
$(-3)^2$	$(-5)^2$	16	25
9	-9	-5^2	-16

46 **RETO.** Comprueba que el número 153 es igual a la suma de los cubos de sus dígitos. Encuentra otros dos números de tres cifras que cumplan la misma condición y contenga las cifras 0 y 7.

47 **INVESTIGA.** Sabiendo que 2^{10} es aproximadamente igual a 10^3 (1024 frente a 1000), contesta:

a) ¿A qué potencia de 10 equivale 2^{60}?

b) ¿A qué potencia de 2 equivale 10^{81}?

c) ¿Qué es mayor, 2^{40} o mil millones? ¿Cuántas veces es mayor aproximadamente?

2. Representa cantidades de forma adecuada

Notación científica

ACTIVIDADES FLASH

48 Escribe con todas sus cifras los siguientes números expresados en notación científica.

a) $1,5 \cdot 10^4$

b) $9,03 \cdot 10^3$

c) $5,607 \cdot 10^8$

d) $6,01 \cdot 10^{11}$

49 Expresa en notación científica estos números.

a) 87000

b) 1256,7

c) 482,63

d) 2100000

e) 19037,453

f) 90000000000

g) 94300000

h) 1852,67

i) 4540000

j) 45,9

50 Escribe los siguientes números en notación científica e indica el orden de magnitud en cada caso.

a) Doce mil quinientos.

b) Siete millones doscientos mil.

c) Ciento trece mil setecientos.

d) Cuatrocientos veintidós billones.

INTERNET

51 ●●○ **INVESTIGA.** Busca en internet las distancias medias a las que se encuentran estos planetas del Sol y exprésalas en notación científica y con todas sus cifras.

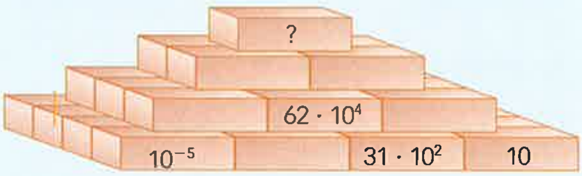
a) Mercurio.
b) Venus.
c) Marte.
d) Júpiter.

52 ●●○ Calcula y expresa en notación científica.

a) La distancia en kilómetros que recorre la luz en un año (velocidad de la luz: 3 000 000 km/s).

b) La masa en kilos de 500 000 litros de mercurio (1 litro de mercurio pesa 13,6 kg).

53 ●●○ ¿Cuántos metros hay de la Tierra a la Luna? Cada casilla se obtiene multiplicando las dos de abajo.



3. Aplica las reglas básicas de las operaciones con potencias

54 ●○○ Expresa como una sola potencia.

a) $(2^4)^3$
b) $(7^0)^2$
c) $[(-1)^3]^5$
d) $\left[\left(\frac{3}{4}\right)^6\right]^3$
e) $[((-5)^4)^2]^4$
f) $\left[\left(-\frac{2}{11}\right)^7\right]^8$

55 ●●○ **INVENTA.** Escribe un número que se pueda expresar como una potencia de exponente 4 y otra potencia de exponente 3 al mismo tiempo.

56 ●○○ Expresa como una sola potencia y calcula.

a) $(2 \cdot 3)^3$
b) $[5 \cdot (-2)]^5$
c) $\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{2}\right)^3$
d) $[(-2) \cdot (-1)]^{10}$
e) $[(-9) : (-3)]^4$
f) $\left[\left(-\frac{3}{2}\right) : \left(\frac{3}{4}\right)\right]^6$

57 ●○○ Determina el signo de cada operación.

a) $5^6 \cdot 5^{12}$
b) $[(-12) : 3]^2$
c) $\left(-\frac{3}{4}\right)^5 : \left(-\frac{3}{4}\right)^2$
d) $(-5)^7 : (-5)^4$
e) $[(-9) : 3]^8$
f) $\left[\left(-\frac{7}{3}\right)^3\right]^5$

58 ●●○ Copia y completa el cuadrado mágico multiplicativo en el que el producto de los elementos de sus filas, columnas y diagonales coinciden.

		3^2
	3^5	
3^8		3^6

59 ●●○ **INVENTA.** Escribe posibles exponentes en cada operación para que se cumpla el resultado. Compara tu respuesta con la de un compañero o compañera.

a) $5^4 \cdot 5^{\square} \cdot 5^{\square} = 5^9$
b) $13^{\square} \cdot 13^{\square} \cdot 13^{\square} = 13^5$
c) $(-11)^{\square} \cdot (-11)^4 \cdot (-11)^{\square} = (-11)^7$
d) $(-10)^8 \cdot (-10)^{\square} \cdot (-10)^{\square} = (-10)^{11}$

60 ●●○ Coloca paréntesis para que las igualdades sean ciertas.

a) $4^4 \cdot 4^{20} : (4^6)^3 \cdot 4^2 = 4^4$
b) $3^{12} : 3^5 \cdot (3^5)^3 \cdot 3^2 = 3^{24}$
c) $(-2)^6 \cdot (-2)^8 : (-2)^4 : (-2)^2 = (-2)^{12}$
d) $\left(\frac{3}{5}\right)^{20} : \left(\frac{3}{5}\right)^6 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^4 : \left(\left(\frac{3}{5}\right)^2\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^6$

61 ●○○ Expresa como una sola potencia.

a) $(2^4)^3$
b) $(7^0)^2$
c) $[(-1)^3]^5$
d) $\left[\left(\frac{3}{4}\right)^6\right]^3$
e) $[((-5)^4)^2]^4$
f) $\left[\left(-\frac{2}{11}\right)^7\right]^8$

62 ●●● **INVESTIGA.** Calcula estas potencias.

$7^1 \quad 7^2 \quad 7^3 \quad 7^4 \quad 7^5 \quad 7^6 \quad 7^7$

¿En qué cifra terminará 7^8? ¿Y 7^{10}? ¿Y 7^{7^7}?

63 ●●○ Expresa como una sola potencia.

a) $(6^2 \cdot 6^3) \cdot (6^4 : 6^3)$
b) $[(-3)^{12} : (-3)^7)] \cdot [(-3)^5 \cdot (-3)^2]$
c) $(-4)^{35} : [(-4)^5 \cdot (-4)^{20}]$
d) $\left[\left(\frac{5}{4}\right)^6 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^2\right] : \left[\left(\frac{5}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^4\right]$
e) $4^{10} : [(4^6)^2 \cdot 4^3] \cdot 4^3$
f) $\left(\left(\frac{5}{2}\right)^2\right)^7 : \left[\left(\frac{5}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^6\right]$
g) $((-2)^4 \cdot (-2)^5) : (-2)^3 \cdot ((-2)^2)^5$
h) $\left[\left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{3}{4}\right)\right]^8 : \left(\left(\frac{1}{2}\right)^3\right)^3$

Cómo se calcula un producto o división de potencias

64 Expresa, si se puede, con una sola potencia.

a) $6^7 \cdot 6^3$ c) $6^5 \cdot (-2)^5$ e) $(-6)^5 \cdot 2^3$

b) $6^7 : 6^3$ d) $6^5 : (-2)^5$ f) $(-6)^5 : 2^3$

PRIMERO. Se estudia si las bases o los exponentes de las potencias son iguales.

a) y b) 6^7 y $6^3 \longrightarrow$ La base de las dos potencias es la misma, 6.

c) y d) 6^5 y $(-2)^5 \rightarrow$ Las bases son distintas, pero los exponentes son iguales, 5.

e) y f) $(-6)^5$ y $2^3 \longrightarrow$ No son iguales las bases ni los exponentes.

SEGUNDO.

- Si las bases son iguales, se suman o restan los exponentes.

  a) $6^7 \cdot 6^3 = 6^{7+3} = 6^{10}$ b) $6^7 : 6^3 = 6^{7-3} = 6^4$

- Si las bases no son iguales, pero los exponentes sí, se multiplican o dividen las bases.

  c) $6^5 \cdot (-2)^5 = (6 \cdot (-2))^5 = (-12)^5$

  d) $6^5 : (-2)^5 = (6 : (-2))^5 = (-3)^5$

- Si no son iguales las bases ni los exponentes, no se puede expresar como una sola potencia.

  e) $(-6)^5 \cdot 2^3 = (-6)^5 \cdot 2^3$

  f) $(-6)^5 : 2^3 = (-6)^5 : 2^3$

65 ●○○ Expresa, si se puede, con una sola potencia.

a) $9^8 : 9^3$

b) $11^6 \cdot 11^5$

c) $(-6)^8 : (-6)^5$

d) $13^5 \cdot 2^7$

e) $\left(\frac{2}{3}\right)^7 : \left(\frac{2}{3}\right)^5$

f) $\left(-\frac{4}{5}\right)^3 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right)^6$

g) $\left(\frac{2}{3}\right)^5 : \left(\frac{3}{2}\right)^5$

h) $(-2)^3 \cdot 3^3$

i) $9^8 : (-3)^5$

j) $5^6 : 5^4$

k) $(-5)^6 : (-5)^2$

l) $\left(\frac{2}{3}\right)^7 : \left(\frac{3}{2}\right)^5$

m) $\left(-\frac{10}{4}\right)^7 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right)^7$

n) $\left(\frac{-3}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{-3}{2}\right)^8$

66 ●○○ **INVENTA.** Escribe tres productos y tres cocientes de potencias que tengan como resultado:

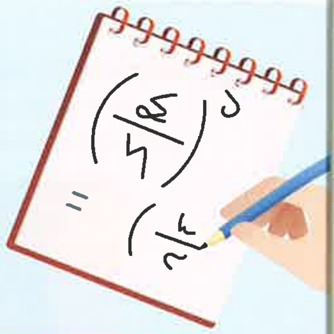
a) 7^{10} b) $\left(\frac{3}{5}\right)^9$ c) $\left(-\frac{5}{2}\right)^4$

67 ●●○ Completa los huecos en tu cuaderno.

a) $9^8 : \square^8 = (-3)^8$

b) $\left(-\frac{3}{2}\right)^{\square} \cdot \left(\frac{\square}{\square}\right)^3 = \left(-\frac{9}{4}\right)^3$

c) $(-6)^5 \cdot (-6)^{\square} = (-6)^9$



Cómo se resuelven operaciones cuando las bases tienen factores primos comunes

68 Simplifica estos productos de potencias.

a) $8^4 \cdot 16^2$ b) $3^4 \cdot 9^2$ c) $(-3)^4 \cdot 18^2$

PRIMERO. Se descomponen las bases de las potencias en producto de factores primos.

a) $8 = 2^3$, $16 = 2^4$ b) $3 = 3$, $9 = 3^2$ c) $-3 = -1 \cdot 3$, $18 = 2 \cdot 3^2$

SEGUNDO. Se sustituyen las bases por su descomposición en factores y se opera.

a) $8^4 \cdot 16^2 = (2^3)^4 \cdot (2^4)^2 = 2^{12} \cdot 2^8 = 2^{20}$

b) $3^4 \cdot 9^2 = 3^4 \cdot (3^2)^2 = 3^4 \cdot 3^4 = 3^8$

c) $(-3)^4 \cdot 18^2 = (-1 \cdot 3)^4 \cdot (2 \cdot 3^2)^2 =$
$= (-1)^4 \cdot 3^4 \cdot 2^2 \cdot 3^4 =$
$= 1 \cdot 2^2 \cdot 3^8 = 2^2 \cdot 3^8$

69 ●●○ Simplifica estos productos de potencias.

a) $(-3)^5 \cdot 9^4$ c) $6^5 \cdot (-3)^4$ e) $6^7 \cdot 12^4$

b) $15^3 \cdot 3^2$ d) $16^7 \cdot 32^3$ f) $8^{10} \cdot 10^3$

70 ●●○ Simplifica estos cocientes de potencias.

a) $15^3 : 3^2$ c) $9^5 : (-3)^4$ e) $9^7 : 3^5$

b) $(-8)^5 : 2^3$ d) $(-16)^{10} : 4^3$ f) $16^7 : 32^3$

71 ●●● Resuelve.

a) $[(-4)^8 \cdot 8^2]^3 \cdot 2^5$

b) $[2^{13} \cdot 4^2 : 8^5]^2 : 2^5$

c) $(-6)^{30} : ((-6)^{12})^2 \cdot 12^3$

d) $(-13)^5 \cdot ((13)^4)^0 : 13^2$

e) $(18^6)^3 : [(-2)^5 \cdot (-2)^3] \cdot 4^3$

f) $(-15)^8 : [3^{10} \cdot (5^2)^5] \cdot 15^4$

72 ●●● **RETO.** Si $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 25^2 = 5\,525$, di cuál es el valor de $2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots + 50^2$.

73 ●●● **INVESTIGA.** Utiliza la calculadora para hallar las potencias 2^{13}, 2^{17}, 2^{18}, 2^{20}, 2^{22}, 2^{25}.

a) Los resultados, ¿son números pares o impares?

b) ¿Qué ocurre con las potencias 3^4, 3^7, 3^{12}, 3^{13}?

c) El número resultante de la suma $2^7 + 2^4$, ¿será par o impar? ¿Y el de la suma $3^5 + 3^6$?

4. Calcula el valor de expresiones numéricas con raíces cuadradas

ACTIVIDADES FLASH

74 Completa los huecos en tu cuaderno.

a) $\sqrt{16} = \square \rightarrow 4^{\square} = 16$

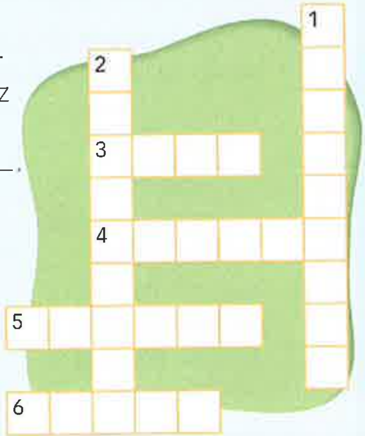
b) $\sqrt{\square} = 5 \rightarrow \square^2 = \square$

c) $9^2 = \square \rightarrow \sqrt{\square} = 9$

d) $\square^2 = 121 \rightarrow \sqrt{\square} = \square$

75 Indica todos los cuadrados perfectos comprendidos entre 1 y 250.

76 Copia y completa el crucigrama.



VERTICALES

1. En $\sqrt{54}$, 54 es el ___.
2. Los números con raíz cuadrada exacta se llaman cuadrados ___.

HORIZONTALES

3. En $\sqrt{121} = 11$, 11 es la ___.
4. Si el radicando es un cuadrado perfecto, su raíz cuadrada es ___.
5. Si el radicando no es un cuadrado perfecto, su raíz cuadrada es ___.
6. En $\sqrt{82}$, el ___ es 1.

77 **INVESTIGA.** ¿Qué números enteros positivos son iguales a su raíz cuadrada exacta positiva?

78 Copia en tu cuaderno la tabla y complétala.

	Raíz cuadrada entera	Resto
$\sqrt{27}$		
$\sqrt{201}$		
$\sqrt{34}$		

CÁLCULO MENTAL

79 Calcula la raíz cuadrada entera de estos números.

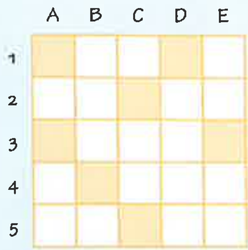
a) 19 b) 49 c) 79 d) 119 e) 229

80 Halla el resto en cada caso.

a) Raíz = 12
Radicando = 160

b) Raíz = 30
Radicando = 901

81 Resuelve el crucigrama.



VERTICALES

A. $\sqrt{\square} = 1$ y resto 1. $\sqrt{\square} = 6$

B. $\sqrt{\square} = 20$ y resto 32. $\sqrt{\square} = 16$

C. $\sqrt{\square} = 2$ y resto 1. $\sqrt{\square} = 5$

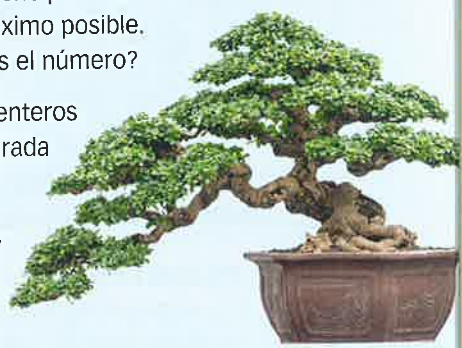
D. $\sqrt{\square} = 39$ y resto 42.

E. $\sqrt{\square} = 6$ y resto 10. $\sqrt{\square} = 7$

HORIZONTALES

1. $\sqrt{\square} = 6$ y resto 9. $\sqrt{\square} = 2$
2. $\sqrt{\square} = 4$ y resto 7. $\sqrt{\square} = 4$
3. $\sqrt{\square} = 15$
4. $\sqrt{\square} = 1$ y resto 2. $\sqrt{\square} = 23$ y resto 35.
5. $\sqrt{\square} = 8$ $\sqrt{\square} = 6$ y resto 3.

82 **INVESTIGA.** Un número tiene por raíz cuadrada entera 5 y su resto es el máximo posible. ¿Cuál es el resto? ¿Y cuál es el número?



83 Escribe todos los números enteros de dos cifras cuya raíz cuadrada entera tenga de resto 2.

84 Halla el menor número que, sumado a 265, da un cuadrado perfecto.

85 **INVESTIGA.** Un número tiene como raíz cuadrada entera 12. ¿Cuál es el resto más grande que puede tener ese número? ¿Y si tuviera como raíz entera 135?

86 ¿Es posible que el resto de una raíz sea negativo? Razona tu respuesta.

87 Calcula.

a) $\sqrt{\dfrac{4}{9}}$ b) $\sqrt{\dfrac{400}{64}}$ c) $\sqrt{\dfrac{1600}{49}}$ d) $\sqrt{\dfrac{81}{36}}$

88 **RETO.** Escribe los números 3, 9 y 14 utilizando 4 cuatros y las operaciones de suma, resta, multiplicación, división, potencias y raíz cuadrada.

5. Realiza operaciones combinadas con la jerarquía de las operaciones

89 Resuelve considerando solo el resultado positivo.

a) $(-3)^3 : (-9) + \sqrt{64} : (-2) \cdot 5^2 - (-8)$

b) $(-2) \cdot (-3)^2 : \sqrt{9} - (-8)^4 : 2^3 - \sqrt{100}$

c) $\sqrt{\dfrac{36}{25}} + \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 + \left[\dfrac{1}{5} - \left(\dfrac{3}{5}\right)^3\right] : \left(\dfrac{1}{5}\right)^3$

d) $\left[\sqrt{\dfrac{16}{9}} : \sqrt{\dfrac{25}{36}}\right]^2 - \left(\dfrac{-5}{2}\right)^2 : \left(\dfrac{5}{3}\right)^2$

90 Opera.

a) $\sqrt{\dfrac{16}{9}} \cdot \dfrac{7}{4} - \dfrac{3}{2}$

b) $\dfrac{1}{3} \cdot \sqrt{\dfrac{400}{64}} + 8 : \dfrac{2}{5}$

c) $\left(-\dfrac{5}{6}\right)^2 : \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 - \sqrt{\dfrac{121}{36}}$

91 Simplifica.

a) $[((-2)^2)^4 : (-2)^3 \cdot (-2)^5]^2 \cdot [((-2)^3)^2 : (-2)^5]$

b) $\left(\sqrt{\dfrac{25}{4}}\right)^3 : \left(\dfrac{5}{2}\right)^2 + \left[\left(\dfrac{5}{2}\right)^6 : \left(\dfrac{5}{2}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{5}{2}\right)^5\right]^2$

c) $[3^4 : 3^3 \cdot 3^8 : 3^6]^2 \cdot [(3^4)^4 : 3^7]^3 : \sqrt{81}$

d) $\left[\sqrt{\dfrac{25}{9}} - \dfrac{5}{4}\right]^4 : \left(\dfrac{5}{3} \cdot \dfrac{1}{4}\right)^2 - \left(\left(\dfrac{5}{12}\right)^2\right)^3$

e) $\sqrt{\dfrac{16}{81}} - \left(\dfrac{2}{3}\right)^3 + [(3^2)^4 : 3^3]^2 \cdot 3^4$

6. Emplea los distintos tipos de números para resolver problemas de la vida real

INTERNET

92 **MATEMÁTICAS Y... ORDENADORES.** Los ordenadores más potentes que se están diseñando podrán realizar mil billones de operaciones por segundo.

a) Expresa ese número como potencia de 10.

b) Arquímedes calculó que el número de granos de arena necesarios para llenar el universo que los griegos conocían era 10^{51}. ¿Cuánto tiempo tardaría un ordenador de ese tipo en computar ese número de operaciones? Exprésalo en segundos y en años.

c) Un gúgol es un 1 seguido de 100 ceros. ¿Cuánto tardaría uno de estos ordenadores en computar un gúgol de operaciones?

93 ¿Cuál es el cuadrado más grande que podemos formar con 48 monedas? ¿Y con 169 monedas?

94 Se ha organizado un concurso de tiro con arco. Participan cinco equipos de cinco personas cada uno. Cada persona del equipo dispone de cinco flechas para lanzar a la diana. ¿Cuántas flechas se necesitan?

95 **INVESTIGA.** El matemático británico Augustus de Morgan decía que él tenía x años en el año x^2. Se sabe que murió en 1871. ¿Cuándo nació?

96 **RETO.** Un viaje espacial sale de la Tierra hacia un planeta situado a 2^{20} km. Después de hacer un cuarto del trayecto, la nave pierde el contacto con la Tierra, recuperándolo cuando está a 2^{19} km de ella. ¿Cuántos kilómetros recorrió la nave sin comunicación?

97 **MATEMÁTICAS Y... ALIMENTACIÓN.** La calidad del yogur casero viene determinada por el tiempo y la temperatura a la que se deja fermentar. Durante el proceso de fermentación, las bacterias se multiplican duplicando su población cada 20 minutos. Estas bacterias se comen la lactosa y generan ácido láctico. Cuanto más tiempo se deje fermentar, menos cantidad de lactosa contendrá el yogur. Contamos inicialmente con 10 millones de bacterias.

a) ¿Cuántas habrá al cabo de una hora?

b) A una temperatura adecuada, podemos conseguir yogur entre 6 y 8 horas. ¿Cuántas bacterias tendrá el yogur?

c) Para reducir aún más la cantidad de azúcar, el yogur se deja fermentar durante 24 horas. ¿Cuántas bacterias tendrá este tipo de yogures?

Escribe los resultados en notación científica.

98 **MATEMÁTICAS Y... BIOLOGÍA.** Algunos animales como el oso polar o el oso panda se encuentran en peligro de extinción. Muchas de las especies en peligro de extinción tienen periodos de gestación largos, como en el caso del oso polar, de hasta 265 días y con solo dos crías por camada. Estas especies contrastan con otras poblaciones que se reproducen de manera exponencial en un corto periodo de tiempo. Por ejemplo, las hembras del pez luna pueden soltar hasta 300 millones de huevos en el agua de una sola vez. Estos peces alcanzan su edad madura sexual a los cinco años y su esperanza de vida es de unos 10 años.

a) Escribe el número de huevos en notación científica.

b) Suponiendo que, de los huevos, la mitad dan lugar a peces hembras, ¿cuántos peces producirán estas al cabo de 5 años?

INTERNET

99 En una mudanza, se han preparado 28 cajas cúbicas de cartón con los objetos del salón, 21 en las habitaciones y 15 en la cocina. Si apilan todas las cajas formando un cubo, ¿cuántas cajas tendrá de altura?

100 **MATEMÁTICAS Y... LITERATURA.** En el país de los liliputienses, las dimensiones (altura, anchura y grosor) de todas las personas, los animales, plantas... eran 12 veces menores que en nuestro mundo. Gulliver, por lo tanto, era 12 veces mayor que un liliputiense.

a) «Para llevarme a la capital en caballo mandaron millar y medio de los más grandes caballos», cuenta Gulliver. ¿Crees que fueron suficientes?

b) «De un centenar y medio de colchones, cosidos entre sí, salió uno en el que cabía libremente a lo largo y ancho. Pusieron uno encima de otro, cuatro colchones como este, pero aun así el lecho era duro como el suelo de piedras». ¿Por qué era tan duro para Gulliver? ¿Cabía en la cama?

FAKE NEWS

El principio del fin

Después de unos meses, que a mucha gente le habrán podido parecer años, la prensa ha amanecido con el esperanzador titular de que, por fin, el factor R0 de la pandemia es menor que la unidad. Las mediciones de los expertos estiman que R0 $= \frac{4}{5}$ y que, por tanto, la pandemia remitirá en no mucho tiempo.

Empezamos, por fin, a ver luz al final del túnel, aunque tengamos que seguir tomando las precauciones recomendadas.

Y tú, ¿qué opinas?

El R0 de una enfermedad es el número de nuevos infectados, en promedio, que van a ser causados por una persona contagiada.

PROBLEMAS APARENTEMENTE DISTINTOS

101 Realiza esta operación y expresa el resultado en forma de potencia.

$$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$$

102 El ayuntamiento dispone de un comedor benéfico con cuatro plantas iguales, tienen cuatro salas y en cada sala cuatro mesas con capacidad para cuatro personas. ¿Cuántas personas pueden comer al mismo tiempo? Expresa el resultado en forma de potencia.

103 Halla el resultado de estas operaciones.

a) $120 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{5-1}$

b) $120 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{3-1} - 120 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{6-1}$

104 La distancia que recorre una bola situada en el extremo de un péndulo es, en cada oscilación, tres cuartas partes de lo que recorrió en la anterior. Si la primera oscilación midió 120 cm:

a) ¿Cuánto medirá la quinta oscilación?

b) ¿Qué diferencia hay entre la tercera y la sexta?

105 Sigue las instrucciones y contesta a la pregunta.

a) Halla las potencias de 2 y súmalas hasta que su resultado sea mayor o igual que 30 000. ¿Cuántas potencias de 2 has sumado?

b) Continúa sumando potencias de 2 hasta pasar de 30 000 000 000. ¿Cuántos sumandos han sido?

106 La capacidad de un almacén es de 1 000 t de arroz. El primer día llevo dos granos de arroz y, a partir de ahí, llevaré el doble cada día. Si en 1 kg de arroz hay 30 000 granos aproximadamente:

a) ¿Cuántos días pasarán hasta que haya 1 kg?

b) ¿Cuánto tiempo se tarda en llenar el almacén?

SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

Me faltan datos

Estamos en la era de la comunicación, todo este mundo parece interrelacionado y a veces la información nos satura. ¿Quién subirá todos esos datos, imágenes, sonidos... a la red? ¿Cómo podemos comunicarnos con los ordenadores y servidores que almacenan la información?

La información en un ordenador, tanto de datos como de programas, se almacena en unidades básicas de 1 byte (agrupación de 8 bits) y sus múltiplos: kilobyte, megabyte, gigabyte, terabyte...

Múltiplos del byte
Sistema Internacional

Múltiplos (abreviaturas)	Valor en bytes
Kilobyte (kB)	10^3
Megabyte (MB)	10^6
Gigabyte (GB)	10^9
Terabyte (TB)	10^{12}
Petabyte (PB)	10^{15}
Exabyte (EB)	10^{18}
Zettabyte (ZB)	10^{21}
Yottabyte (YB)	10^{24}

Terabyte

Son 200 000 fotos o canciones de mp3 en un único disco de 1 TB.

Petabyte

Serían 1 000 discos de 1 TB. Ocuparían 2 armarios de almacenamiento.

Exabyte

Serían un millón de discos de 1 TB. Ocuparían un edificio de 4 pisos.

Zettabyte

Ocuparían 1 000 edificios de 4 pisos, una superficie similar a 1 200 campos de fútbol.

Yottabyte

Ocuparían una superficie similar a la Región de Murcia.

1 ¿Qué capacidad tengo?

La capacidad de almacenaje en dispositivos móviles, teléfonos o tabletas, y en los dispositivos informáticos, PC, portátiles, discos de memoria..., se mide, por lo general, en MB.

- Haz una tabla con la memoria de los dispositivos móviles que tienes tú y tus personas conocidas, y comprueba si esas capacidades se pueden escribir en forma de potencia.
- ¿Cuántos megas (MB) tienen 8 gigas (GB)? ¿Cuántos megas (MB) son 1 tera (TB)?
- Indica con una sola potencia la memoria de un dispositivo de 512 GB en bytes.

2 ¿La nube o la realidad?

Después de meses pidiendo fotos a familiares y escaneando las más antiguas, que estaban impresas, por fin las tengo todas. Las he clasificado en carpetas y, entre todas, ocupan 49 GB en mi ordenador. Quiero hacer una copia y no tengo claro si será mejor comprar un disco duro o almacenar en la nube. Evidentemente, los gastos los compartiríamos entre los 5 familiares.

1 000 GB
57,99 € (IVA incluido)

Almacenamiento en la nube
- Plan de 15 GB: gratis.
- Plan de 50 GB: 0,99 € al mes.
- Plan de 200 GB: 2,99 € al mes.
- Plan de 2 TB: 9,99 € al mes.

- Económicamente, ¿qué oferta nos interesaría más?
- Si, además de las fotos, incluimos también vídeos y música, el tamaño aumenta hasta 132 GB. ¿Qué nos interesa ahora si consideramos solo el precio?

3 ¿Cuánto tardará en descargarse?

Al final, hemos decidido almacenar en la nube, así nos aseguramos su mantenimiento y, además, tenemos acceso todos desde cualquier lugar. Los abuelos tienen un ADSL de 10 Mbps (megabits por segundo), en casa tenemos internet por fibra de 600 Mbps y, los abuelos en sus móviles, disponen de velocidad 4G y nosotros 5G.

Velocidad de internet	Velocidad de descarga
100 Mbps	12,5 MB/s
300 Mbps	37,5 MB/s
600 Mbps	75 MB/s

Internet móvil
5G → 20 Mbps
4G → 4 Mbps

- Cada uno va a hacer un álbum con 32 fotos. Si una foto ocupa de media 2,5 MB, ¿cuánto tardará cada uno en descargar las fotos en su casa? ¿Y desde el móvil?
- Acabo de compartir un vídeo que he grabado con mi móvil nuevo en alta calidad (4K). Cada minuto que dura ocupa 375 MB y he tardado 5 minutos en descargarlo con el móvil. ¿Cuál es la duración del vídeo? ¿Cuánto espacio ocupa?

RESUMEN DE UNIDAD

POTENCIAS DE NÚMEROS ENTEROS

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ veces}}$$

a = base n = exponente

POTENCIA DE UNA FRACCIÓN

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b}}_{n \text{ veces}} = \frac{a^n}{b^n}$$

PRODUCTO DE POTENCIAS DE LA MISMA BASE

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

COCIENTE DE POTENCIAS DE LA MISMA BASE

$$a^n : a^m = a^{n-m}$$

POTENCIA DE UNA POTENCIA

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

POTENCIA DE UN PRODUCTO

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

POTENCIA DE UN COCIENTE

$$(a : b)^n = a^n : b^n$$

RAÍZ CUADRADA

$$\sqrt{a} = b \rightarrow b^2 = a$$

Símbolo de la raíz → $\sqrt{a} = b$ ← Raíz

Radicando

RAÍZ CUADRADA DE UNA FRACCIÓN

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{c}{d} \rightarrow \left(\frac{c}{d}\right)^2 = \frac{a}{b}$$

AUTOEVALUACIÓN

1. Realiza cálculos en los que intervienen potencias de exponente natural

1 ¿Cuál de las siguientes potencias tiene como resultado un número negativo?

a) $(-10)^2$ b) $(+10)^2$ c) $(+10)^3$ d) $(-10)^3$

2 Señala la forma correcta de expresar $\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$.

a) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3$ b) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ c) $-\frac{1^3}{2}$ d) $\left(\frac{-1}{-2}\right)^3$

2. Representa cantidades de forma adecuada

3 Escribe 0,00000000123 en notación científica.

a) $1{,}23 \cdot 10^{-7}$ c) $1{,}23 \cdot 10^{-8}$

b) $12{,}3 \cdot 10^{-10}$ d) $1{,}23 \cdot 10^{-9}$

3. Aplica las reglas básicas de las operaciones con potencias

4 Opera $2^4 \cdot (12^7 : 12^5 : 6^2) \cdot 3^6$.

a) 6^{14} b) 6^6 c) 6^8 d) 6^{12}

5 Resuelve $\left(-\frac{5}{2}\right)^6 : \left(-\frac{5}{2}\right)^4 \cdot \left(-\frac{10}{4}\right)^3$.

a) $-\left(\frac{5}{2}\right)^5$ b) $\left(\frac{5}{2}\right)^5$ c) $(-8) \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^5$ d) $8 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^5$

4. Calcula el valor de expresiones numéricas con raíces cuadradas

6 Aproxima hasta las centésimas $\sqrt{11}$.

a) 3,35 b) 3,36 c) 3,37 d) 3,31

5. Realiza operaciones combinadas con la jerarquía de las operaciones

7 Calcula $\frac{5}{3} : \left[\sqrt{\frac{16}{49}} : \frac{2}{7} - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] \cdot \frac{3}{2}$.

a) $\frac{7}{10}$ b) $\frac{10}{7}$ c) $\frac{5}{32}$ d) $\frac{5}{72}$

6. Emplea los distintos tipos de números para resolver problemas de la vida real

8 María debe 16 € a su hermana. Cada semana le da la mitad de lo que le debe. ¿Cuántas semanas pasan hasta que solo deba 0,50 €?

a) 3 b) 5 c) 7 d) 9

VALORA TU APRENDIZAJE

- ¿Te enfrentas a los retos con optimismo?
- ¿Participas activamente en el grupo?