UCLM
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

Evaluación para el Acceso a la Universidad
Curso 2022/2023

Materia: MATEMÁTICAS II

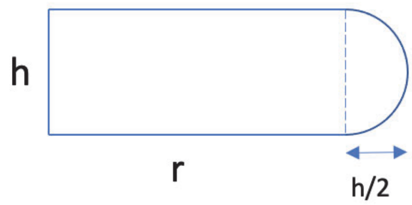
Instrucciones: El estudiante deberá resolver **CUATRO** de los ocho ejercicios propuestos. Si resuelve más, se corregirán solo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntuará 2,5 puntos. Duración de la prueba: 1 hora y 30 minutos.

1. Sea el sistema de ecuaciones lineales $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -2x & + & y & - & z & = & -1 \\ -x & + & a\cdot y & + & z & = & 2 \\ 2x & + & y & + & a\cdot z & = & 3 \end{array}\right.$, con $a \in \mathbb{R}$.

   a) **[1,75 punto]** Discute cómo es el sistema en función de los valores del parámetro a.

   b) **[0,75 puntos]** Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a = 2$, si es posible.

2. Una empresa desea construir un aparcamiento para sus empleados y necesita vallarlo de manera que la región resultante sea un rectángulo más medio círculo, tal y como se ve en la figura adjunta. El rectángulo tiene de lados $h, r \in \mathbb{R}$, de manera que el radio del semicírculo es $h/2$. La empresa tiene solamente presupuesto para comprar una valla de 80 metros de longitud, que ha de ser el perímetro del aparcamiento. La empresa desea construir un aparcamiento con el mayor área posible con ese perímetro de 80 metros.



   a) **[1 punto]** Escribe el área del aparcamiento en función del valor h.

   b) **[1,5 puntos]** ¿Cuánto deben valer h y r para que el área del aparcamiento sea lo mayor posible?

3. *a*) Tenemos dos urnas con bolas. La urna A tiene 6 bolas rojas y 8 negras y la urna B tiene 8 bolas rojas y 10 bolas negras. Disponemos de un dado de 12 caras numeradas del 1 al 12. Lanzamos el dado y si sale un número múltiplo de 4 se extrae una bola de la urna A. Si sale otro número se extrae una bola de la urna B. Calcula razonadamente:

   a.1) **[0,5 puntos]** La probabilidad de obtener una bola roja.

   a.2) **[0,75 puntos]** Sabiendo que la bola extraída es roja, la probabilidad de que haya sido extraída de la urna A.

   b) Una empresa de mensajería sabe que la probabilidad de que el destinatario esté ausente (y no se pueda hacer la entrega) durante el reparto es del 25 %. Un repartidor de esta empresa ha de entregar 6 paquetes.

   b.1) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que no pueda entregar uno de ellos porque el destinatario esté ausente?

   b.2) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que pueda entregar al menos uno de los paquetes?

n	**k \ p**	**0.05**	**0.15**	**0.25**	**0.35**	**0.45**	**0.55**	**0.65**	**0.75**	**0.85**	**0.95**
6	**0**	0.7351	0.3771	0.1780	0.0754	0.0277	0.0083	0.0018	0.0002	0.0000	0.0000
	1	0.2321	0.3993	0.3560	0.2437	0.1359	0.0609	0.0205	0.0044	0.0004	0.0000
	2	0.0305	0.1762	0.2966	0.3280	0.2780	0.1861	0.0951	0.0330	0.0055	0.0001
	3	0.0021	0.0415	0.1318	0.2355	0.3032	0.3032	0.2355	0.1318	0.0415	0.0021
	4	0.0001	0.0055	0.0330	0.0951	0.1861	0.2780	0.3280	0.2966	0.1762	0.0305
	5	0.0000	0.0004	0.0044	0.0205	0.0609	0.1359	0.2437	0.3560	0.3993	0.2321
	6	0.0000	0.0000	0.0002	0.0018	0.0083	0.0277	0.0754	0.1780	0.3771	0.7351

4. Sean el plano $\pi \equiv a \cdot x + y - z = 1$, con $a \in \mathbb{R}$, y los puntos $A(1,0,0)$ y $B(b,1,-1)$, con $b \in \mathbb{R}$.

   a) **[1,5 puntos]** Determina el valor de a, b para que el vector $\vec{AB}$ sea perpendicular al plano π y el punto A esté contenido en el plano π.

   b) **[1 puntos]** Con los valores de a, b obtenidos en el apartado anterior, escribe la ecuación de la recta que pasa por A y es perpendicular al plano π.

5. *a*) **[1 punto]** Encontrar el área encerrada por la recta $x = -1$ y las gráficas de las funciones $f(x) = x^2 - 2x + 3$ y $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$.

   b) **[1,5 puntos]** Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & a \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & a+1 & a+1 \end{pmatrix}$ con $a \in \mathbb{R}$. Estudia el rango de A en función de los valores de a.

6. *a*) **[1 punto]** Calcula el límite siguiente:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 9}{3x - 9}.$$

   b) **[1,5 puntos]** Sean el punto $A(1,2,1)$ y el plano $\pi \equiv x - y = 1$. Calcula la distancia del punto A al plano π.

7. *a*) **[1 punto]** Resuelve la siguiente integral:

$$\int (x+3)e^{-2x} dx.$$

   b) En un juego de azar cada jugador tira un dado de seis caras. Si sale un 1 vuelve a tirar. Si sale otro resultado deja de tirar y la puntuación obtenida es el número de unos obtenidos durante las tiradas.

      b.1) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probablidad de no obtener ningún uno? ¿Cuál es la probabilidad de obtener una puntuación de uno? ¿Y la de obtener una puntuación de tres?

      b.2) **[0,75 puntos]** ¿Podrías dar la probabilidad de obtener una puntuación de $n \in \mathbb{N}$?

8. *a*) **[1,25 puntos]** Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 6$ con $a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R}$. Calcula el valor de $\begin{vmatrix} 1/2 & 3/2 & 5/2 \\ a+2 & b+6 & c+10 \\ 4x & 4y & 4z \end{vmatrix}$ e indica en cada paso las propiedades que utilizas.

   b) **[1,25 puntos]** Calcula el ángulo que forman los vectores $\vec{u} = (1,1,1)$ y $\vec{v} = (3,2,3)$.

Julio 2023

Cipri

(1) $\begin{cases} -2x + y - z = -1 \\ -x + ay + z = 2 \\ 2x + y + az = 3 \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}$

a) $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & a & 1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$, $|A| = -2a^2 + 1 + 2 + 2a + 2 + a =$

$= -2a^2 + 3a + 5 = 0 \Rightarrow a = \begin{cases} -1 \\ 5/2 \end{cases}$

$\boxed{a = -1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[-2F_1 + F_3]{2F_1 + F_2}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 + 3F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ rango $(A|b) = 3$ con $b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\boxed{a = \frac{5}{2}}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 5/2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 5/2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 + F_3]{F_1 - 2F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 3/2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 + 2F_3}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \text{rango } (A|b) = 3$$

Discusión

Si $a \neq \begin{cases} -1 \\ 5/2 \end{cases} \Rightarrow$ rango A = rango $(A|b) = 3$ = nº de incógnitas $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ (TRF) S.C.D.

Si $a = \begin{cases} -1 \\ 5/2 \end{cases} \Rightarrow$ rango $A = 2 \neq 3$ = rango $(A|b) \Rightarrow$ (TRF) S.I.

b) Resolución para $\boxed{a=2}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1+F_3]{F_1-2F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{2F_2+3F_3}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{c} [1] \\ [2] \\ [3] \end{array}$$

De [3]: $z = \frac{4}{3}$

Sustituimos en [2]: $y = \dfrac{-5+3\cdot\frac{4}{3}}{-3} = \frac{1}{3}$

Sustituimos en [1]: $x = \dfrac{-1+\frac{4}{3}-\frac{1}{3}}{-2} = 0$

$$\boxed{\text{Solución: } (x,y,z) = \left(0, \tfrac{1}{3}, \tfrac{4}{3}\right)}$$

2

a) Sabemos que (condición sobre el perímetro)

$$80 = h + 2r + \frac{\cancel{2}\pi \cdot \frac{h}{\cancel{2}}}{2}$$

$$160 = 2h + 4r + \pi h$$

$$r = \frac{160-2h-\pi h}{4} = 40 - \frac{1}{2}h - \frac{\pi}{4}h$$

La función a optimizar es el área:

$$A = A_{\text{rectángulo}} + A_{\text{semicírculo}} = h \cdot r + \frac{\pi \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2}{2} =$$

$$= h\left(40 - \frac{h}{2} - \frac{\pi h}{4}\right) + \frac{\pi h^2}{8} = 40h - \frac{h^2}{2} - \frac{\pi h^2}{4} + \frac{\pi h^2}{8} =$$

$$= \boxed{40h - \frac{h^2}{2} - \frac{\pi h^2}{8} = A(h)}$$

b) Maximizamos $A(h)$

$$A'(h) = 40 - h - \frac{\pi}{4}h = 40 - \left(\frac{\pi+4}{4}\right)h$$

$$A'(h) = 0 \Rightarrow h = \frac{160}{\pi+4}$$

$$A''(h) = -\left(\frac{\pi+4}{4}\right)$$

$$A''\left(\frac{160}{\pi+4}\right) < 0 \Rightarrow h = \frac{160}{\pi+4} \text{ es un máx. relativo de } A(h)$$

$\boxed{\text{Solución: para maximizar el aparcamiento } h = \frac{160}{\pi+4}\text{ m} \simeq 22{,}40\text{ m y } r = 40 - \frac{1}{2}\left(\frac{160}{\pi+4}\right) - \frac{\pi}{4}\left(\frac{160}{\pi+4}\right) \simeq 11{,}21\text{ m}}$

3) a) M = múltiplo de 4

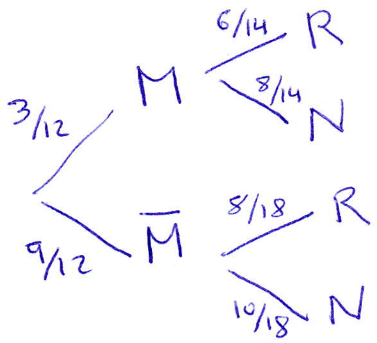
R = bola roja

N = " negra

A = caja A

B = caja B

a1)



$$P(R) = P(M)P(R/M) + P(\overline{M})P(R/\overline{M}) =$$

$$= \frac{3}{12}\cdot\frac{6}{14} + \frac{9}{12}\cdot\frac{8}{18} = \boxed{\frac{37}{84} \simeq 0{,}44}$$

a2) $\boxed{P(A/R)} = \dfrac{P(A\cap R)}{P(R)} = \dfrac{\frac{3}{28}}{\frac{37}{84}} = \boxed{\frac{252}{1036} \simeq 0{,}24}$

b) X = nº de paquetes que no se han podido entregar

$X \sim B(0{,}25,\, 6)$, $p = 0{,}25$, $n = 6$

b1) $\boxed{P(X=1) = 0{,}3560}$ (mirando en la tabla)

b2) $\boxed{P(X\le 5) = 1 - P(X=6) = 1 - 0{,}0002 = 0{,}9998}$

4) $\pi \equiv ax + y - z = 1$, $a\in\mathbb{R}$

$A(1,0,0)$, $B(b,1,-1)$, $b\in\mathbb{R}$

a) ¿ $a,b\in\mathbb{R}$ / $\overrightarrow{AB}\perp\pi$ y $A\in\pi$?

- $A\in\pi \Rightarrow \boxed{a=1}$
- $\overrightarrow{AB} = (b,1,-1) - (1,0,0) = (b-1,1,-1) \perp \pi \Rightarrow$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{n_\pi} = (a, 1, -1) = (1, 1, -1) \Rightarrow \frac{b-1}{1} = \frac{1}{1} = \frac{-1}{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{b = 2}$

b) $\pi \equiv x + y - z = 1$

¿r recta / $A \in r$ y $r \perp \pi$?

$r \perp \pi \Rightarrow \vec{u_r} = \overrightarrow{n_\pi} = (1, 1, -1) \Rightarrow \boxed{r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}}$

⑤ a) $f(x) = x^2 - 2x + 3$

$g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$

Extremos de integración y área

$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 - 2x + 3 = \frac{1}{2}x^2 + 1 \Rightarrow x = 2$

$$\boxed{A} = \left| \int_{-1}^{2} (f(x) - g(x))\,dx \right| = \left| \int_{-1}^{2} \left(\frac{x^2}{2} - 2x + 2 \right) dx \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} - x^2 + 2x \Big]_{-1}^{2} \right| = \left| \frac{4}{3} - \left(-\frac{19}{6}\right) \right| = \boxed{\frac{9}{2}\,u^2}$$

b) $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & a \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & a+1 & a+1 \end{pmatrix}, \ a \in \mathbb{R}$

$|A| = -a(a+1) + a + 1 = -a^2 - a + a + 1 = -a^2 + 1 = 0 \Rightarrow a = \pm 1$

Si $\boxed{a = \pm 1}$:

$\begin{pmatrix} -2 & 1 & \pm 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & \pm 1 + 1 & \pm 1 + 1 \end{pmatrix}, \ \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rango } A = 2$

Discusión del rango

Si $a \neq \pm 1 \Rightarrow$ rango $A = 3$

Si $a = \pm 1 \Rightarrow$ rango $A = 2$

6 a) $\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 9}{3x - 9} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 3} \frac{(x^2+3)\cancel{(x-3)}}{3\cancel{(x-3)}} = \boxed{4}$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 3 & -9 \\ 3 & & 3 & 0 & 9 \\ \hline & 1 & 0 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

Por L'Hôpital

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 9}{3x - 9} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 3} \frac{3x^2 - 6x + 3}{3} = \frac{12}{3} = \boxed{4}$$

b) $A(1,2,1)$

$\pi \equiv x - y = 1$

$$\boxed{d(P,\pi)} = \frac{|1-2-1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \boxed{\sqrt{2}\ u}$$

7 a) $\int (x+3)e^{-2x}dx = \left[\begin{array}{l} u = x+3 \longrightarrow du = dx \\ dv = e^{-2x}dx \longrightarrow v = -\frac{1}{2}e^{-2x} \end{array}\right] =$

$$= \frac{1}{2}(x+3)e^{-2x} - \int -\frac{1}{2}e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}(x+3)e^{-2x} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-2x} =$$

$$= \boxed{-\frac{1}{2}(x+3)e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C}$$

b) X = número de 1 obtenidos

En cualquier momento del juego, la probabilidad de obtener un 1 es $1/6$ y la de obtener cualquier otro valor es $\frac{5}{6}$

b1) $\boxed{P(X=0) = \frac{5}{6}}$ ya que el jugador no obtiene un 1 en la 1ª tirada

$P(X=1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{36} = \frac{5}{6^2}$

$P(X=3) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{6^4}$

b2) $\boxed{P(X=n) = \left(\frac{1}{6}\right)^n \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{6^{n+1}}}$

(8) a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 6$ con $a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R}$

$$\begin{vmatrix} 1/2 & 3/2 & 5/2 \\ a+2 & b+6 & c+10 \\ 4x & 4y & 4z \end{vmatrix} \underset{[1]}{=} \frac{1}{2}\cdot 4 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ a+2 & b+6 & c+10 \\ x & y & z \end{vmatrix} \underset{[2]}{=}$$

$$= 2\left(\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 10 \\ x & y & z \end{vmatrix} \right) = 2\left(6 + 2 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 5 \\ x & y & z \end{vmatrix}}_{\underset{[3]}{=} 0} \right) =$$

$$= \boxed{12}$$

Propiedades: [1] Si multiplicamos una fila o columna por un nº real, el valor del determinante queda multiplicado por dicho número.

[2]: Un determinante, con una fila o columna formada por la suma de dos números, puede descomponerse en suma de otros dos determinantes que tienen las mismas filas o columnas restantes y, en lugar de aquella, otra formada por los primeros y segundos sumandos, respectivamente.

[3]: El determinante de una matriz con dos filas o columnas iguales es cero.

b) $\vec{u} = (1,1,1)$ $\quad \alpha = \sphericalangle\{\vec{u}, \vec{v}\}$

$\vec{v} = (3,2,3)$

$$\boxed{\alpha = \arccos \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \arccos \frac{8}{\sqrt{3}\sqrt{22}} = 10^\circ 1' 29,96''}$$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 3+2+3 = 8$

$|\vec{u}| = \sqrt{3}$

$|\vec{v}| = \sqrt{3^2+2^2+3^2} = \sqrt{22}$