

1

Números enteros



DESAFÍO

Monedas y vasos

Se dispone de diez monedas y tres vasos.



¿Eres capaz de colocar diez monedas en tres vasos de forma que haya un número impar de monedas en cada uno?

•• ¿Qué sabes ya?

Cómo se aplica la jerarquía de las operaciones

De izquierda a derecha, se resuelven las multiplicaciones y las divisiones y, después, las sumas y las restas.

EJEMPLO

Resuelve la operación.

$$\begin{aligned} 25 - 4 \cdot 3 : 6 - 2 + 12 : 3 + 6 &= \\ = 25 - 12 : 6 - 2 + 4 + 6 &= \\ = 25 - 2 - 2 + 4 + 6 = 23 - 2 + 4 + 6 &= \\ = 21 + 4 + 6 = 25 + 6 = 31 & \end{aligned}$$

ACTIVIDADES

1 Calcula $15 + 3 \cdot 4 : 2 - [(3 + 5) : 2]$.

- a) 19 b) 17 c) 15 d) 5

Cómo se calculan el m. c. m. y el m. c. d. de números naturales

El m. c. m. de dos números naturales se calcula multiplicando los factores primos comunes y no comunes elevados al mayor exponente.

El m. c. d. de dos números naturales se calcula multiplicando los factores primos comunes elevados al menor exponente.

EJEMPLO

$$\text{m. c. m. } (24, 36) = \text{m. c. m. } (2^3 \cdot 3, 2^2 \cdot 3^2) = 2^3 \cdot 3^2 = 72$$

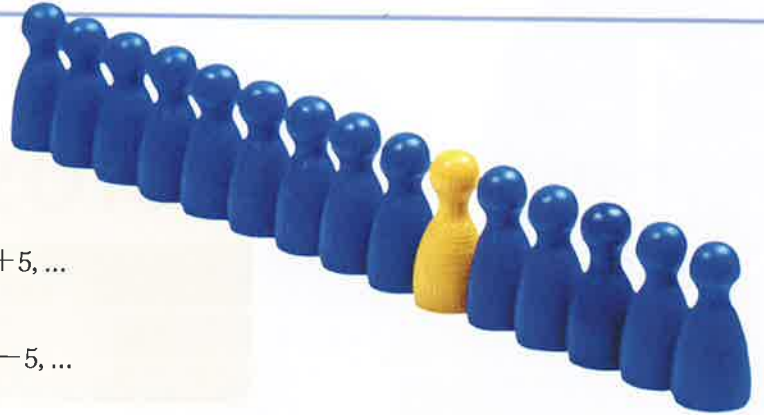
$$\text{m. c. d. } (24, 36) = \text{m. c. d. } (2^3 \cdot 3, 2^2 \cdot 3^2) = 2^2 \cdot 3 = 12$$

ACTIVIDADES

2 ¿Cuál es el máximo común divisor de 4, 12, 28?

- a) 2 b) 6 c) 4 d) 28

1. Números enteros



El conjunto de los números enteros se representa con la letra \mathbb{Z} y está formado por:

- Números enteros positivos: $+1, +2, +3, +4, +5, \dots$
- El número cero: 0 .
- Números enteros negativos: $-1, -2, -3, -4, -5, \dots$

1.1. Representación en la recta numérica

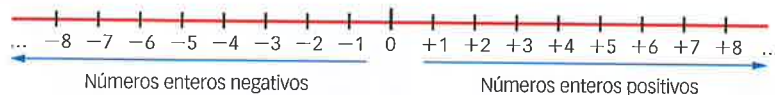


Los números enteros se representan ordenados en la recta numérica.

- El cero, 0 , divide la recta en dos partes iguales.
- Los números enteros positivos se sitúan a la derecha del cero: $+1, +2, +3, \dots$
- Los números enteros negativos se sitúan a la izquierda del cero: $-1, -2, -3, \dots$

Escribimos los números enteros positivos sin el signo $+$.

$$+2 = 2 \quad +13 = 13$$



EJEMPLO

1. Representa estos números enteros en la recta numérica: $-8, -5, -2, -1, 0, +3, +5, +6$.



1.2. Valor absoluto de un número entero

El **valor absoluto** de un número entero a es el número que resulta de prescindir de su signo. Se escribe $|a|$.



Valor absoluto:

$$|+a| = a \quad |-a| = a$$

EJEMPLO

2. Halla el valor absoluto de $-6, 0$ y $+4$.

$$\text{Valor absoluto de } -6 \rightarrow |-6| = 6$$

$$\text{Valor absoluto de } 0 \rightarrow |0| = 0$$

$$\text{Valor absoluto de } +4 \rightarrow |+4| = 4$$

ACTIVIDADES

- 1 Representa en la recta numérica.

$$-4, +5, -7, +2, -5, +3, -2$$

- 2 Halla el valor absoluto de:

$$-4, +5, -13, +27, -1, +18$$

- 3 Escribe situaciones que correspondan a estos números.

a) $+57 \text{ €}$ b) -100 m c) -6 °C d) $+2 \text{ l}$

- 4 **REFLEXIONA.** El valor absoluto de un número entero a es 7 . ¿Qué número es?

1.3. Opuesto de un número entero

El **opuesto de un número** entero es otro número entero con el mismo valor absoluto pero de signo contrario. El opuesto de a se escribe $Op(a)$.

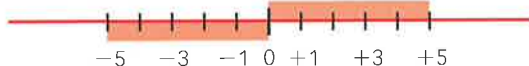
EJEMPLO

3. Halla el opuesto de -5 y $+5$. Representalos en la recta numérica.

$$Op(-5) = +5$$

$$Op(+5) = -5$$

Dos números opuestos están situados a igual distancia del origen.



1.4. Comparación de números enteros

RETO

¿Qué es mayor: el valor absoluto del opuesto de un número o el opuesto de su valor absoluto?



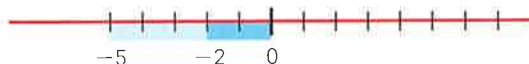
Un número entero es mayor que otro cuando está situado más a la derecha que él en la recta numérica.

- En un grupo de enteros positivos, es mayor el que tiene mayor valor absoluto.
- En un grupo de enteros negativos, es mayor el que tiene menor valor absoluto.
- Un número entero positivo es mayor que cualquier entero negativo.
- El cero es mayor que cualquier entero negativo y menor que cualquier entero positivo.

EJEMPLO

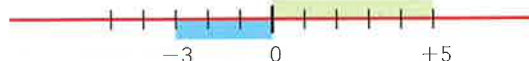
4. Compara estos números.

a) -2 y -5



$$\left. \begin{array}{l} |-2| = 2 \\ |-5| = 5 \end{array} \right\} \rightarrow |-2| < |-5| \rightarrow -2 > -5$$

b) $+5$ y -3



$$+5 > -3$$

“

Para «mayor que», utilizamos el símbolo $>$.

Para «menor que», utilizamos el símbolo $<$.

ACTIVIDADES

5. Ordena de menor a mayor.
 $-7, -2, +5, 0, +3, -8, +4, -10$
6. Completa con el signo $<$ o $>$, según corresponda.
 a) $-2 \square Op(5)$ b) $Op(7) \square 0$ c) $-1 \square Op(-2)$
7. Comprueba gráficamente estas desigualdades.
 a) $-4 < +9$ c) $-8 < -4$
 b) $+8 > -5$ d) $-4 > -9$
8. REFLEXIONA. Si $a < -3$, ¿puede ser $a < 0$?

Cómo se resuelven operaciones de sumas y restas con paréntesis

Estas operaciones también se pueden calcular resolviendo primero las operaciones que hay dentro de los paréntesis y, después, operando.

Resuelve esta operación.

$$-5 - (-3 + 2) - (3 - 1) + (-4 + 2)$$

1 Eliminamos los paréntesis.

$$-5 - (-3 + 2) - (3 - 1) + (-4 + 2) = -5 + 3 - 2 - 3 + 1 - 4 + 2$$

Si el paréntesis tiene delante un signo $-$, los signos de los números de dentro cambian.

Si va delante un signo $+$, los números mantienen su signo.

2 Resolvemos la operación resultante.

$$\begin{aligned} &= \frac{-5+3}{-2} - 2 - 3 + 1 - 4 + 2 = \frac{-2-2}{-4} - 3 + 1 - 4 + 2 = \\ &= \frac{-4-3}{-7} + 1 - 4 + 2 = \frac{-7+1}{-6} - 4 + 2 = \\ &= \frac{-6-4}{-10} + 2 = -10 + 2 = -8 \end{aligned}$$

ACTIVIDADES

12 Efectúa estas operaciones eliminando primero los paréntesis.

- $(4 - 1) - (2 - 3)$
- $(8 + 2) + (3 - 5)$
- $(-8 + 10) - (10 - 8)$
- $(-4 - 5) - (7 + 2)$
- $(9 - 3) + (5 - 9)$

13 Halla el resultado de estas operaciones.

- $-9 + (3 - 2 - 1) + 7$
- $4 + (6 - 3) - (2 - 1)$
- $-7 - (4 - 6) - (1 + 5)$
- $5 - (4 + 2 + 3) - 6$
- $-3 - (-1 - 2 - 3) + (5 - 1)$

14 Calcula.

- $-(4 - 9 + 3) + (11 - 8 - 7) + (-15)$
- $(+3) - (4 + 7 - 9) - (-19 + 3 - 10) + (-2)$
- $-8 - 3 - (4 - 6) - (9 + 3) - 5$
- $-4 - (9 + 3) + 11 - (8 - 7 + 15)$
- $(3 - 4 + 7) - 9 - (-19 + 3) - 10 + 2$
- $-(8 - 3) - 4 - 6 - (9 + 3 - 5)$

15 Realiza estas operaciones.

- $6 + (-4 + 2) - (-3 - 1)$
- $7 - (4 - 3) + (-1 - 2)$
- $3 + (2 - 3) - (1 - 5 - 7)$
- $-8 + (1 + 4) + (-7 - 9)$

16 Completa estas operaciones para que todas las igualdades sean ciertas.

- $-5 + \square = 4$
 $-1 - (-2 - \square) = 4$
- $6 - \square = -1$
 $(1 + \square - 3) - 1 = -1$
- $\square + 4 = -3$
 $3 - (\square - 1) = -3$
- $\square + 2 = -4$
 $(5 - \square + 1) - 2 = -4$
- $-7 - \square = 13$
 $9 + (2 - \square - 3) = 13$

17 Calcula el valor de a .

$$4 - (a + 2) - 3 = -1$$

2.2. Multiplicación de números enteros



Para **multiplicar dos números enteros**, primero se multiplican sus valores absolutos. El resultado tendrá el signo $+$ si los dos factores tienen el mismo signo y signo $-$ si tienen signos diferentes.



Regla de los signos para la multiplicación:

$+$	\cdot	$+$	$=$	$+$
$-$	\cdot	$-$	$=$	$+$
$+$	\cdot	$-$	$=$	$-$
$-$	\cdot	$+$	$=$	$-$

EJEMPLO

7. Realiza estos productos.

a) $(+3) \cdot (+5) = +15$

Mismo signo \rightarrow $|+3| \cdot |+5| = 3 \cdot 5 = 15$

b) $(-3) \cdot (-5) = +15$

c) $(-3) \cdot (+5) = -15$

Distinto signo \rightarrow $|-3| \cdot |+5| = 3 \cdot 5 = 15$

d) $(+3) \cdot (-5) = -15$

Para calcular el producto de varios números enteros, se multiplican sus valores absolutos. El resultado tendrá signo $+$ si el número de factores negativos es par y signo $-$ si es impar.

EJEMPLO

8. Calcula. a) $(+5) \cdot (+8) \cdot (-2) = -80$ b) $(-10) \cdot (+3) \cdot (-5) \cdot (+2) = +300$

2.3. División de números enteros

Para **dividir dos números enteros**, primero se dividen sus valores absolutos. El resultado tendrá el signo $+$ si los dos factores tienen el mismo signo y signo $-$ si tienen signos diferentes.



Regla de los signos para la división:

$+$	$:$	$+$	$=$	$+$
$-$	$:$	$-$	$=$	$+$
$+$	$:$	$-$	$=$	$-$
$-$	$:$	$+$	$=$	$-$

Encuentra números enteros cuyo cociente sea mayor que ellos.

RETO

EJEMPLO

9. Realiza estas divisiones.

a) $(+27) : (-3) = -9$

Distinto signo \rightarrow

b) $(+27) : (+3) = +9$

c) $(-27) : (-3) = +9$

Mismo signo \rightarrow

d) $(-27) : (+3) = -9$

ACTIVIDADES

18 Resuelve estas multiplicaciones.

- | | |
|----------------------|----------------------|
| a) $(-3) \cdot (+2)$ | e) $(+2) \cdot (+7)$ |
| b) $(-2) \cdot (-8)$ | f) $(+5) \cdot (-4)$ |
| c) $(-12) : (+6)$ | g) $(+21) : (+7)$ |
| d) $(-6) : (-2)$ | h) $(+24) : (-4)$ |

19 Resuelve estas operaciones.

- | | |
|---------------------------------|--------------------------|
| a) $(-4) \cdot (+2) \cdot (-6)$ | c) $(+20) : (+2) : (-5)$ |
| b) $(+8) \cdot (-3) \cdot (-4)$ | d) $(-32) : (-4) : (-8)$ |

20 REFLEXIONA. Completa con los números adecuados.

- | | |
|--------------------------|-------------------------------|
| a) $(\square) : 4 = -10$ | b) $(-100) : (\square) = -25$ |
|--------------------------|-------------------------------|



Cómo se resuelven las operaciones combinadas con números enteros

Calcula el resultado de esta operación.

$$(-15) : (+3) + (-7) - (-9 + 1) - [(-5) \cdot (-4)] : (+2) + (-4) \cdot (-3)$$

① Realizamos las operaciones que hay entre paréntesis y corchetes.

② Calculamos las multiplicaciones y divisiones en el orden en el que aparecen.

③ Escribimos la operación de forma abreviada eliminando los paréntesis que nos quedan.

④ Calculamos las sumas y restas en el orden en el que aparecen.

$$\begin{aligned} & (-15) : (+3) + (-7) - (-9 + 1) - [(-5) \cdot (-4)] : (+2) + (-4) \cdot (-3) = \\ & = (-15) : (+3) + (-7) - (-8) - (+20) : (+2) + (-4) \cdot (-3) = \\ & = (-5) + (-7) - (-8) - (+10) + (+12) = \\ & = -5 - 7 + 8 - 10 + 12 = \\ & = -12 + 8 - 10 + 12 = \\ & = -4 - 10 + 12 = \\ & = -14 + 12 = -2 \end{aligned}$$

Mantenemos los paréntesis al efectuar las multiplicaciones y las divisiones.

Recuerda que, al resolver las operaciones que hay entre paréntesis, el resultado queda entre paréntesis.
 $-5 - (3 - 7) = -5 - (-4) = -5 + 4 = -1$

1

ACTIVIDADES

21 Resuelve.

- $(+18) : (-2) : (-3) \cdot (-5)$
- $(-15) \cdot 3 : (-9) : 5$
- $[(-12) : 3] \cdot [(-8) : (-4)]$
- $(-18) : [(-9) : (-3)] \cdot (-6)$
- $[(+4) : (-2) \cdot (+8)] : [(+2) + (+6)]$

22 Calcula estas operaciones combinadas.

- $(-10) : (-5) + 2 : (-1)$
- $3 \cdot (-5) - 4 : (-2) + 3$
- $2 + 3 \cdot (-4) - (-2) + 2 \cdot 7 - (-3)$

23 Efectúa estas operaciones.

- $9 - (+8) : (-4) - 2 + (+3) \cdot (+2)$
- $[9 - (+8) : (-4)] : (+11) - (+6) : (-3)$
- $-5 - [4 - 1 + 3] : (+2) - (10 - 8)$
- $-6 : (3 - 2 - 2) - (1 - 2 + 3)$
- $4 \cdot [3 - 2 \cdot (-5)] - 12 : 3 + 6 : 2$
- $5 \cdot (-2) - [10 + 2 \cdot (-4)] : 2 - (-12) : 6$

24 Completa los huecos en tu cuaderno.

- $(-12) : (+6) - 1 = 3 - \square$
- $(+10) \cdot [(+2) : (-2)] = 5 + \square$
- $6 - (-8) : (+2) = \square - 4$
- $(+5) \cdot (+3) + 2 = \square + 3$

25 Averigua qué operaciones están bien hechas.

- $-9 + (8 - 2 - 1) : (-5) = 10$
- $4 - (-6 - 3) : (-2 - 1) = 1$
- $(-7 - 1) : 4 - (6 + 2) : (-2) = -6$
- $(-5 - 1 + 2 + 8) : (-2 - 1 - 1) = -1$
- $-3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 - (5 - 6 + 2) = 13$

26 Coloca los paréntesis para que las igualdades sean ciertas.

- $-1 - 2 \cdot 3 + 4 = -11$
- $4 + 5 - 6 \cdot 2 - 3 = 3$
- $4 + 5 - 6 \cdot 2 - 3 = 15$
- $8 - 3 + 2 + 4 \cdot 6 = 31$

3. Múltiplos y divisores de números enteros

Si la división $a : b$ es exacta, se cumple que:

a es múltiplo de b . \longleftrightarrow b es divisor de a .
 a es divisible por b .



El conjunto de todos los múltiplos de un número se obtiene multiplicándolo por los sucesivos números enteros positivos. Se representa por \dot{a} . Un número tiene infinitos múltiplos.

$$\dot{a} = \{a \cdot 1, a \cdot 2, a \cdot 3, \dots\}$$

EJEMPLO

10. Calcula los primeros cinco múltiplos de 8.

$$\text{Múltiplos de } 8 \rightarrow \dot{8} = \{8 \cdot 1, 8 \cdot 2, 8 \cdot 3, 8 \cdot 4, 8 \cdot 5, \dots\} = \{8, 16, 24, 32, 40, \dots\}$$



La divisibilidad solemos estudiarla solo en los números enteros positivos, ya que para los negativos se cumplen las mismas propiedades.

RETO

¿Existe algún número cuyos divisores y múltiplos coincidan?

El conjunto de todos los divisores de un número se obtiene realizando las sucesivas divisiones entre los números positivos menores que él y seleccionando aquellos cuya división es exacta. Se representa por $\text{Div}(a)$.



EJEMPLO

11. ¿Es 9 divisor de 12? ¿Y de 18?

9 no es divisor de 12 porque la división $12 : 9$ no es exacta.

9 sí es divisor de 18 porque $18 : 9 = 2$.

Un número es **primo** cuando es positivo y sus únicos divisores son él mismo y la unidad. En caso contrario, es **compuesto**.

EJEMPLO

12. Determina si los números 13 y 21 son primos o compuestos.

$\text{Div}(13) = \{1, 13\} \rightarrow$ Dos divisores: es un número primo.

$\text{Div}(21) = \{1, 3, 7, 21\} \rightarrow$ Más de dos divisores: es compuesto.



Todo número entero es múltiplo y divisor de sí mismo:

- a es múltiplo de a .
- a es divisor de a .

ACTIVIDADES

27. Calcula diez múltiplos y todos los divisores de estos números. ¿Cuáles son primos?

- a) 8 b) 7 c) 4 d) 10

28. REFLEXIONA. Dados dos números:

- a) ¿Podemos hallar el mínimo común de sus divisores?
b) ¿Y el mayor de sus múltiplos comunes?



Cómo se calculan todos los divisores de un número

Halla todos los divisores de 60.

- ① Dividimos el número entre los números naturales (1, 2, 3...) hasta llegar a una división en la que el cociente sea menor que el divisor.

$$\begin{array}{r} 60 \overline{) 1} \\ 0 \ 60 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 60 \overline{) 4} \\ 0 \ 15 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 60 \overline{) 7} \\ 4 \ 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 60 \overline{) 2} \\ 0 \ 30 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 60 \overline{) 5} \\ 0 \ 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 60 \overline{) 8} \\ 4 \ 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 60 \overline{) 3} \\ 0 \ 20 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 60 \overline{) 6} \\ 0 \ 10 \end{array}$$

- ② De cada división exacta, obtenemos dos divisores de ese número: el divisor y el cociente.

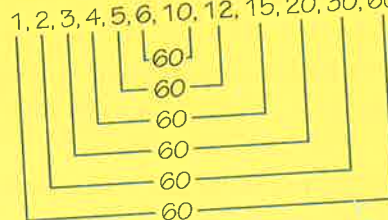
$60 : 1 = 60 \rightarrow 1$ y 60 son divisores de 60 .
 $60 : 2 = 30 \rightarrow 2$ y 30 son divisores de 60 .
 $60 : 3 = 20 \rightarrow 3$ y 20 son divisores de 60 .
 $60 : 4 = 15 \rightarrow 4$ y 15 son divisores de 60 .
 $60 : 5 = 12 \rightarrow 5$ y 12 son divisores de 60 .
 $60 : 6 = 10 \rightarrow 6$ y 10 son divisores de 60 .
 Las demás divisiones no son exactas.

Los divisores de 60 son $\text{Div}(60) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$.

1

Si ordenas los divisores de un número y multiplicas los que están en sus extremos, obtienes ese número.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60



El cociente, 7, es menor que el divisor, 8. Dejamos de dividir.



ACTIVIDADES

- 29 Halla todos los divisores de estos números y averigua cuáles son primos.

a) 18 d) 80 g) 42
 b) 31 e) 79 h) 41
 c) 32 f) 37 i) 96

- 30 Calcula todos los divisores de estos números y averigua cuáles son primos.

a) 199 c) 582 e) 856
 b) 424 d) 603 f) 1021

- 31 Estos son todos los divisores de un número. Completa en tu cuaderno los que faltan. ¿De qué número se trata en cada caso?

a) $\{1, \square, \square, 8\}$ c) $\{1, 2, 3, 5, \square, 10, 15, \square\}$
 b) $\{1, 5, \square\}$ d) $\{\square, 2, 4, \square, 8, 10, \square, 40\}$

- 32 Calcula los divisores de 24 y de 30. ¿Qué números aparecen en las dos listas? ¿Cuál es el mayor de sus divisores comunes?

- 33 Razona si es verdadero o falso.

a) Cualquier múltiplo de un número es mayor que ese número.
 b) Todo número es divisor de su doble y de su triple.
 c) Existe un número que es divisor de todos los números.
 d) Todos los números impares son primos.
 e) Todos los números primos, salvo el 2, son impares.
 f) Cualquier divisor de un número es menor o igual que ese número.
 g) Cualquier divisor de un número es menor que cualquier múltiplo de ese mismo número.

4. Factorización de un número entero

4.1. Criterios de divisibilidad

Los **criterios de divisibilidad** son reglas que nos permiten averiguar, sin dividir, si un número es divisible por otro.

Los criterios más útiles son los asociados con los números primos:

Divisible por	Criterio de divisibilidad
2	Si la última cifra es 0 o par.
3	Si la suma de sus cifras es divisible por 3.
5	Si la última cifra es 0 o 5.
11	Si la diferencia entre la suma de las cifras de lugar par y la suma de las cifras de lugar impar es 0 o divisible por 11.



Divisibilidad por 9:

Un número es divisible por 9 si la suma de sus cifras es múltiplo de 9.

Divisibilidad por 10:

Un número es divisible por 10 si acaba en 0.

RETO

Escribe los cuatro primeros números múltiplos de 3 cuyas cifras sean todas 1.

EJEMPLO

13. Averigua si 3234 es divisible por 2, 3, 5 u 11.

Es divisible por 2 porque acaba en cifra par.

Es divisible por 3 porque el resultado de la suma $3 + 2 + 3 + 4 = 12$ es divisible por 3.

No es divisible por 5 porque su última cifra no es 0 ni 5.

Es divisible por 11 porque $(3 + 3) - (2 + 4) = 0$.

4.2. Descomposición en factores primos

Todo número entero se puede expresar de forma única como el producto de potencias de números primos. A esta expresión se le llama **factorización del número**.

EJEMPLO

14. Comprueba que la factorización de 45 es $3^2 \cdot 5$.

3 y 5 son primos. $3^2 \cdot 5 = 9 \cdot 5 = 45$. Luego es la factorización de 45.



Para descomponer un número negativo en factores primos realizamos la descomposición de su valor absoluto y, después, añadimos el factor -1 a la descomposición.

ACTIVIDADES

34. Dados los números 12, 15, 18, 24, 4, 423, 10, 267, 23, di cuáles son múltiplos de 2, 3, 5 o 9.

35. Comprueba si son divisibles por 2, 3, 5, 10 y 11.

- a) 145 b) 3467 c) 12624 d) 212

36. ¿Qué factorizaciones son incorrectas?

- a) $2 \cdot 4 \cdot 5$ b) $2^3 \cdot 5 \cdot 7$ c) $5^2 \cdot 7^3 + 11$

37. **REFLEXIONA.** Calcula el valor de a y b para que el número $5a7b$ sea múltiplo de 2 y de 11.

Cómo se factoriza un número

Si el número es primo, su descomposición es él mismo por la unidad.

$$23 = 23 \cdot 1$$

Descompón el número 1404 como producto de factores primos.

① Dividimos el número entre los sucesivos números primos (2, 3, 5, 7, 11, 13...) tantas veces como se pueda hasta obtener la unidad.

- 1404 es divisible por 2. $1404 : 2 = 702$
- 702 es divisible por 2. $702 : 2 = 351$
- 351 no es divisible por 2.
351 es divisible por 3. $351 : 3 = 117$
- 117 es divisible por 3. $117 : 3 = 39$
- 39 es divisible por 3. $39 : 3 = 13$
- 13 es un número primo. $13 : 13 = 1$

Para evitar errores, comenzamos a dividir por los números primos más pequeños y continuamos en orden creciente.

Esta descomposición se puede escribir de forma abreviada de esta manera:

	Factores primos
1404	2
$1404 : 2 \rightarrow 702$	2
$702 : 2 \rightarrow 351$	3
$351 : 3 \rightarrow 117$	3
$117 : 3 \rightarrow 39$	3
$39 : 3 \rightarrow 13$	13
$13 : 13 \rightarrow 1$	

La factorización termina al llegar a un número primo. Al dividir este por sí mismo, obtenemos la unidad.

② Escribimos el número como producto de los factores primos y, si hay algunos repetidos, los expresamos como potencias.

La factorización de 1404 es $\frac{2 \cdot 2}{2^2} \cdot \frac{3 \cdot 3 \cdot 3}{3^3} \cdot 13 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 13$.

ACTIVIDADES

38 Halla la factorización de estos números.

- | | | |
|-------|--------|--------|
| a) 15 | e) 55 | i) 400 |
| b) 16 | f) 72 | j) 675 |
| c) 24 | g) 86 | k) 405 |
| d) 29 | h) 270 | l) 943 |

39 Determina si los siguientes números están bien factorizados. En caso de que no sea así, escribe la factorización correcta.

- | | |
|-----------------------------|-------------------------------|
| a) $60 = 3 \cdot 4 \cdot 5$ | d) $222 = 2 \cdot 3 \cdot 37$ |
| b) $72 = 2 \cdot 6^2$ | e) $360 = 2^3 \cdot 3^2$ |
| c) $104 = 2^3 \cdot 13$ | f) $2450 = 5^2 \cdot 7^2$ |

40 Escribe la descomposición factorial de estos números sabiendo que $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$.

- | | | | |
|--------|---------|--------|--------|
| a) 210 | b) 1050 | c) 315 | d) 945 |
|--------|---------|--------|--------|

41 Razona si estas afirmaciones son verdaderas o falsas.

- a) En la factorización de un número acabado en 0 hay como mínimo dos factores primos, el 2 y el 5.
- b) Si un número es múltiplo de 6, en su factorización estarán el 2 y el 3.
- c) El menor número que es múltiplo de 2, 3, 5 y 7 a la vez es 210.
- d) Un número puede ser múltiplo de 8 y no ser múltiplo de 2.

42 Del número a sabemos que su factorización es:

$$a = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot b$$

- a) ¿Es un múltiplo de 6? ¿Y de 45?
- b) ¿Podemos decir que el número a es divisible por 20? ¿Y por 14?

Razona tus respuestas.

5. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo

El **máximo común divisor** de varios números enteros es el mayor número entero positivo que es divisor de todos ellos.

El **mínimo común múltiplo** de varios números enteros es el menor número entero positivo que es múltiplo de todos.



EJEMPLO

15. Calcula el m.c.d. y el m.c.m. de 4 y 6.

$$\text{Div}(4) = \{1, 2, 4\}$$

$$\text{Div}(6) = \{1, 2, 3, 6\}$$

El mayor divisor común es 2:

$$\text{m.c.d.}(4, 6) = 2$$

$$\text{Múltiplos de } 4 \rightarrow 4, 8, 12, \dots$$

$$\text{Múltiplos de } 6 \rightarrow 6, 12, 18, \dots$$

El menor múltiplo común es 12:

$$\text{m.c.m.}(4, 6) = 12$$



El **máximo común divisor** de dos o más números, a, b, c, \dots , lo expresamos como **m.c.d.** (a, b, c, \dots).

El **mínimo común múltiplo** lo expresamos como **m.c.m.** (a, b, c, \dots).

RETO

¿Cuál es el m.c.d. de dos números primos?
¿Cuál es su m.c.m.?

Para **calcular el m.c.d.** de varios números, se descomponen en factores primos y se multiplican los factores primos comunes elevados al menor de sus exponentes.

Para **calcular el m.c.m.** de varios números, se descomponen en factores primos y se multiplican los factores primos comunes y no comunes elevados al mayor de sus exponentes.

EJEMPLO

16. Calcula el m.c.d. y el m.c.m. de 12 y 16.

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad 12 = 2^2 \cdot 3$$

$$\begin{array}{r|l} 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \quad 16 = 2^4$$

$$\text{m.c.d.}(12, 16) = 2^2 = 4$$

$$\text{m.c.m.}(12, 16) = 2^4 \cdot 3 = 48$$



Si los números no tienen factores en común, el **m.c.d.** es 1 y el **m.c.m.** es el producto de los números.

Cuando el $\text{m.c.d.}(a, b) = 1$, los números a y b no tienen divisores comunes (salvo el 1). En ese caso, decimos que son **primos entre sí**.

ACTIVIDADES

43. Descompón estos números en factores primos y calcula su máximo común divisor y su mínimo común múltiplo.

a) 18 y 20

c) 18 y 4

e) 48 y 32

b) 28 y 42

d) 18 y 32

f) 21 y 28

44. Halla el m.c.d. y el m.c.m. de estos números.

a) 10, 12 y 35

b) 15, 20 y 27

45. **REFLEXIONA.** ¿Es único el valor x que cumple que $\text{m.c.m.}(x, 8) = 40$?



Cómo se resuelven problemas utilizando el m. c. d. o el m. c. m.

Alex tiene tres tipos de bolitas para hacer colgantes:

- 9 bolitas rojas, que miden 4 mm cada una.
 - 12 bolitas verdes, que miden 6 mm cada una.
 - 15 bolitas azules, que miden 8 mm cada una.
- a) Si quiere hacer colgantes de un solo color, de manera que todos tengan el mismo número de bolitas, ¿cuántas bolitas llevará cada colgante como máximo?
- b) Si quiere hacer colgantes de la misma longitud sin mezclar colores, ¿qué longitud tendrán como mínimo?

El m. c. d. de varios números siempre es menor o igual que ellos.
El m. c. m. de varios números siempre es mayor o igual que ellos.



1

1 Analizamos cada problema y decidimos si hay que hallar el m. c. d. o el m. c. m.

- a) Los collares solo pueden tener bolitas de un color y con el mismo número de bolitas. El número de bolitas de cada collar debe ser divisor de 9, 12 y 15. Además, tiene que ser el máximo posible, por lo que hay que calcular el m. c. d.
- b) Si los collares son de un solo color, la longitud de los colgantes debe ser múltiplo de 4 mm, 6 mm y 8 mm. Además, el collar debe medir el mínimo de longitud posible, por lo que hay que calcular el m. c. m.

2 Descomponemos los números en factores primos.

$$\begin{array}{r} 9 \mid 3 \\ 3 \mid 3 \\ 1 \mid \end{array} \quad \begin{array}{r} 12 \mid 2 \\ 6 \mid 2 \\ 3 \mid 3 \\ 1 \mid \end{array} \quad \begin{array}{r} 15 \mid 3 \\ 5 \mid 5 \\ 1 \mid \end{array}$$

$$9 = 3^2 \quad 12 = 2^2 \cdot 3 \quad 15 = 3 \cdot 5$$

$$\begin{array}{r} 4 \mid 2 \\ 2 \mid 2 \\ 1 \mid \end{array} \quad \begin{array}{r} 6 \mid 2 \\ 3 \mid 3 \\ 1 \mid \end{array} \quad \begin{array}{r} 8 \mid 2 \\ 4 \mid 2 \\ 2 \mid 2 \\ 1 \mid \end{array}$$

$$4 = 2^2 \quad 6 = 2 \cdot 3 \quad 8 = 2^3$$

3 Calculamos el m. c. d. o el m. c. m. según corresponda.

- a) m. c. d. (9, 12, 15) = 3
- b) m. c. m. (4, 6, 8) = $2^3 \cdot 3 = 24$

4 Interpretamos el resultado.

- a) Cada colgante llevará 3 bolitas.
- b) Cada colgante medirá 24 mm.

ACTIVIDADES

46 Queremos enlosar una habitación rectangular de 520 cm de largo por 240 cm de ancho con baldosas cuadradas, con el lado más grande posible, sin cortar ninguna. ¿Qué medida deberá tener cada baldosa?

47 Silvia tiene tres relojes con alarmas programadas. El primero suena cada 30 minutos, el segundo cada 90 minutos y el tercero cada 150 minutos. A las 8 de la mañana, los tres relojes han sonado a la vez.



- a) ¿Cuánto tiempo tiene que pasar para que vuelvan a coincidir los dos primeros?
- b) ¿Y el segundo y el tercero?

48 Rosa tiene cubos azules de 55 mm de arista y cubos rojos de 45 mm de arista. Los apila en dos columnas, una de cada color.

Para conseguir que las dos columnas sean igual de altas, ¿cuántos cubos necesita, como mínimo, de cada color?

49 Los libros de una estantería se pueden colocar en montones de 4, 6 y 9 libros sin que sobre ninguno. ¿Cuál es la menor cantidad de libros que puede haber?



ACTIVIDADES FINALES

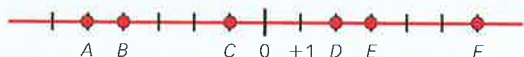
1. Expresa situaciones con números enteros y los compara

ACTIVIDADES FLASH

50 Expresa con números enteros.

- a) El coche está aparcado en el sótano 4.
- b) El pico de San Jerónimo tiene una altura de 1236 m.
- c) José le debe 10 € a su hermana.
- d) Platón nació en el año 428 antes de Cristo.

51 Indica el número entero que corresponde a cada punto marcado en la recta numérica.



52 Escribe el número anterior y el posterior.

- a) -4 c) 0 e) -80 g) -109
- b) -1 d) -9 f) -99 h) -999

53 **INVENTA.** Escribe una situación de la vida cotidiana que corresponda a cada uno de estos números.

- a) -4 b) +15 c) -25 d) 0

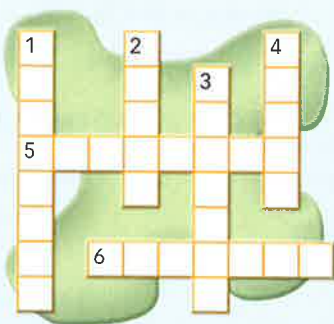
54 Completa las frases con la palabra adecuada.

HORIZONTALES

- 5. El valor ... de un número negativo es el mismo número sin el signo.
- 6. -5 es el ... de 5.

VERTICALES

- 1. El opuesto de un número positivo es un número ...
- 2. 0 es ... que cualquier número positivo.
- 3. Un número positivo y su valor absoluto son ...
- 4. 0 es ... que cualquier número negativo.



55 Encuentra los números enteros que están situados a una distancia igual o menor de tres unidades del número -7 y represéntalos en una recta numérica.

56 Si trazamos una circunferencia con centro en 0 y radio 6 unidades que corte a la recta numérica, ¿qué números enteros están dentro de ella?

57 ¿En qué año escribió Calderón de la Barca su obra *La vida es sueño*?

- a) $Op(-1)$ b) $|-6|$ c) $|Op(3)|$ d) $|+5|$

58 Completa en tu cuaderno los huecos.

- a) $Op(\square) = -5$ c) $Op(\square) = 6$ e) $|Op(\square)| = 8$
- b) $|\square| = 4$ d) $Op(|\square|) = 3$ f) $|\square - 1| = 2$

59 Dados los números -8, 5, 0, -2, 6, -1:

- a) Represéntalos en una recta numérica.
- b) Ordénalos de mayor a menor utilizando el signo correspondiente.

60 Compara estas parejas de números y completa en tu cuaderno con el signo $<$ o $>$.

- a) $-5 \square +8$ e) $-3 \square -1$
- b) $-2 \square -10$ f) $+15 \square -25$
- c) $+6 \square 0$ g) $-3 \square -8$
- d) $0 \square +6$ h) $-2 \square -5$

61 Escribe, en cada caso, tres números enteros.

- a) Menores que 5 y mayores que -2.
- b) Mayores que -4 y menores que 2.
- c) Menores que -5 y mayores que -10.

62 **RETO.** Decide si son verdaderas o falsas estas afirmaciones, si $a < 0$.

- a) $a < Op(a)$ c) $|a| \geq Op(a)$ e) $Op(|a|) \leq a$
- b) $|a| \leq a$ d) $|a| = a$ f) $Op(a) > |a|$

63 **INVESTIGA.** Asigna un número entero al inicio de estas etapas históricas y ordénalas en un eje cronológico.

- Neolítico Edad de los Metales Edad Media
- Edad Antigua Edad Moderna Paleolítico

64 **INVESTIGA.** ¿En qué año nacieron estos matemáticos? Asigna un número entero y ordena de mayor a menor.

- Pitágoras Euclides Arquímedes Tales

65 **MATEMÁTICAS Y... CAMBIO CLIMÁTICO.**

El calentamiento global conlleva, entre otros factores, un incremento de las temperaturas extremas, con días de frío muy intenso en invierno. La temperatura en Eskilstuna (Suecia) ayer no bajó de 5 °C bajo cero. A las 12 de la mañana era de -2 °C, la máxima del día.

- a) ¿Se superaron en algún momento los 0 °C?
- b) ¿Qué temperaturas pudo haber el resto del día?



66 MATEMÁTICAS Y... QUÍMICA. Los estados de la materia son las diferentes formas en las que podemos encontrar algunas sustancias puras o mezclas dentro de la naturaleza. Así, bajo las mismas condiciones de presión, las sustancias pueden cambiar de estado (sólido, líquido o gaseoso) al variar la temperatura. Observa estas temperaturas de fusión.

Sustancia	Temperatura
Agua	0 °C
Aceite	23 °C
Mercurio	-39 °C
Vinagre	-2 °C
Alcohol	-97,6 °C
Oro	1064 °C



- Ordena las sustancias de menor a mayor punto de fusión.
- Un congelador tiene una temperatura de congelación de hasta -20 °C . Explica qué sustancias se encuentran en estado líquido y cuáles en estado sólido dentro del congelador a esta temperatura.

2. Opera con números enteros

ACTIVIDADES FLASH

- 67** Resuelve estas operaciones.
- a) $(+4) + (-2)$ c) $(-3) - (-6)$ e) $(+2) + (+6)$
 b) $(-3) + (-6)$ d) $(-15) - (-5)$ f) $(+4) - (-8)$
- 68** Calcula los productos.
- a) $(-5) \cdot (-6)$ c) $(+15) \cdot (-3)$
 b) $(-10) \cdot (+3)$ d) $(+12) \cdot (+4)$
- 69** Efectúa las siguientes divisiones.
- a) $(-25) : (-5)$ c) $(-18) : (+6)$
 b) $(+27) : (-9)$ d) $(+12) : (+4)$

70 INVENTA. Escribe cuatro pares de números enteros diferentes cuya suma sea -9 .

71 JUEGO. Cada persona debe decir dos números enteros de diferente signo tales que, al sumarlos, el resultado sea cada vez una unidad menor: $-1, -2, -3, \dots$ Pierde quien se equivoque o no dé una respuesta.

72 Completa en tu cuaderno y responde.

a	b	a + b	b + a	a - b	b - a
-1		+4			
	+5		-2		
+3				+6	
	-6				-5

¿La suma de enteros es conmutativa? ¿Y la resta?

73 Copia el cuadrado mágico en tu cuaderno y complétalo. Recuerda que la suma de cada columna, fila y diagonal es la misma.

-4		
	-5	
-8		-6

- Suma -4 a todos los números de las celdas del cuadrado. ¿El resultado sigue siendo un cuadrado mágico? ¿Cuánto vale ahora la suma de cada fila?
- ¿Qué ocurre si sumas 2 a cada celda?

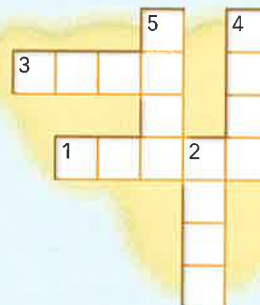
74 Escribe el resultado con letras en el crucigrama y contesta con la primera letra de cada respuesta. ¿Cuál es el pasado del verbo *to stand*?

HORIZONTALES

- $(+6) + (-1) - (-2)$
- $(-4) - (-2) + (+10)$

VERTICALES

- $(-1) - (+2) - (-6)$
- $(+15) + (-3) + (-1)$
- $(+20) - (+3) - (+5)$



75 ¿Cuándo nació Lope de Vega? ab/cd/efgh.

- $(-5) - (-4) + (+3)$ e) $(-2) - (-5) + (-2)$
 b) $(+4) + (-6) - (-7)$ f) $(+4) - (-3) - (+2)$
 c) $(-4) - (-6) + (-1)$ g) $(-3) - (-3) - (-6)$
 d) $(-6) - (+2) + (+9)$ h) $(-5) + (+3) - (-4)$

76 Calcula.

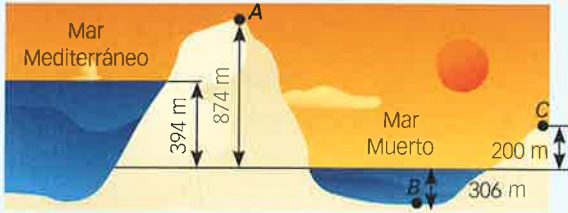
- $-5 + 6 - 8 + 12 - 6$ c) $-(10 + 4 - 3) + 8$
 b) $2 - 8 + 13 - 7 + 9$ d) $12 - (6 - 3) - (-2 + 7)$

77 MATEMÁTICAS E... HISTORIA. Cleopatra, reina de Egipto, nació en el año 69 antes de Cristo. Isabel I nació en 1451 y Napoleón en el año 1759.

- ¿Cuántos años pasaron desde el nacimiento de Isabel I hasta el de Napoleón?
- ¿Cuánto tiempo pasó entre el nacimiento de Cleopatra y el de Isabel I?

ACTIVIDADES FINALES

78 MATEMÁTICAS Y... GEOGRAFÍA. Observa la situación entre el mar Muerto y el mar Mediterráneo.



- ¿A qué altura sobre el nivel del mar Mediterráneo están los puntos A, B y C?
- ¿Qué punto está a menor distancia del nivel del mar Mediterráneo?
- ¿A qué altura está A de C? ¿Y B de C?

CÁLCULO MENTAL

79 RETO. Completa con los números $-1, 0, 1, 2$. Solo pueden aparecer una vez en cada fila y columna. El número de cada bloque indica la suma o la resta. Siempre se resta el número menor al mayor.

2+		3-	3+
0+			
	2-	0+	

80 Escribe el signo que tendrá el resultado:

- 25 factores, 13 de ellos negativos.
- El número -4 multiplicado por sí mismo 18 veces.
- El número -2 multiplicado por sí mismo 13 veces.
- 30 factores, la mitad de ellos negativos.

81 RETO. Coloca los números del 1 al 9 de forma que se cumplan las operaciones. Aplica de forma adecuada las propiedades de la jerarquía de las operaciones.

	:		-	=	-5
+		.	-		
	+		-	=	-3
-		+	+		
	-		.	=	0
=	=	=			
3	5	2			

82 Pedro tenía 357 € en su cuenta bancaria y a lo largo de un día se han registrado en ella estos movimientos:

- Recibo del agua: 103 €.
- Recibo del gas: 125 €.
- Ingreso en efectivo: 80 €.
- Recibo de la luz: 213 €.
- Nómina: 1 200 €.

a) ¿De cuánto dinero dispone Pedro ahora?

b) ¿Ha estado en algún momento en números rojos?

CÁLCULO MENTAL

83 Encuentra tres números seguidos tales que al multiplicarse sus resultados sean los siguientes.

- 5
- 6
- -30
- 32
- -16
- 12

-1	2	1	2
5	-3	-4	3
3	-2	5	2
4	-5	-1	1

84 MATEMÁTICAS Y... CLIMA. Las temperaturas máxima y mínima registradas durante la última semana en Abusejo (Salamanca) han sido:

Lunes: $11\text{ }^{\circ}\text{C}$ y $6\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Martes: $5\text{ }^{\circ}\text{C}$ y $-2\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Miércoles: $3\text{ }^{\circ}\text{C}$ y $-1\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Jueves: $-2\text{ }^{\circ}\text{C}$ y $-3\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Viernes: $7\text{ }^{\circ}\text{C}$ y $3\text{ }^{\circ}\text{C}$.

- ¿Cuál fue la temperatura máxima el lunes? ¿Y la mínima? ¿Cuál fue la oscilación térmica ese día?
- ¿Qué día hubo mayor oscilación térmica?

c) ¿En qué día se produjo la temperatura más alta? ¿Y la más baja? ¿Qué diferencia hubo entre las dos temperaturas?



Cómo se extrae factor común en operaciones con números enteros

85 Calcula $-4 \cdot (+2) + (-4) \cdot (-6)$.

PRIMERO. Se determina si existe un factor que se repite en todos los sumandos. Ese factor se denomina factor común.

$$-4 \cdot (+2) + (-4) \cdot (-6)$$

-4 se repite en los dos sumandos.

SEGUNDO. El factor repetido multiplica a la suma o resta del resto de los números.

$$-4 \cdot (+2) + (-4) \cdot (-6) = -4 \cdot [(+2) + (-6)] = -4 \cdot (-4) = 16$$

86 Calcula sacando factor común.

a) $(-2) \cdot (+6) + (-5) \cdot (-2)$

b) $(-3) \cdot (+4) + (+4) \cdot (-1)$

c) $(+4) \cdot (-1) + (-7) \cdot (+4)$

d) $(-6) \cdot (-3) + (-6) \cdot (+2)$

87 Completa en tu cuaderno y calcula.

a) $5 \cdot (-4) + \square \cdot (-7) = 5 \cdot [\square + (-7)]$

b) $(-9) \cdot 2 + (-9) \cdot (-4) = \square \cdot [2 + (-4)]$

88 Copia y completa en tu cuaderno.

a	b	a : b	a : b
-12	+2		
-100		-5	
	-3	+15	
+48		+6	

89 Un buque factoría ha pescado una gran cantidad de calamar y se dispone a congelarlo. En su cámara frigorífica la temperatura desciende 3 °C cada 15 minutos. Si al principio la cámara está a 9 °C:

- a) ¿Cuánto tardará en alcanzar -27 °C?
- b) ¿Qué temperatura tendrá tras dos horas y media?

90 Resuelve el crucigrama. Ten en cuenta que el signo negativo ocupa una celda.

HORIZONTALES

- 1. $(+2) \cdot (-2)$
 $(-2) + (+3)$
- 2. $(-3) \cdot (-7)$
 $(+5) - (+7)$
- 3. $(-13) \cdot (-17)$
- 4. $(-16) : (-8)$
 $(-8) \cdot (+3) \cdot (-13)$

	A	B	C	D	E
1					
2					
3					
4					
5					

- 5. $(+4) \cdot (+8)$
 $(-7) \cdot (+4) \cdot (-2)$
- VERTICALES**
- A. $-2 + 4$
 $-2 - 5 \cdot (-5)$
 - B. $6 \cdot (-2)$
 $-4 - (-6)$
 - C. $|2 - 6|$
 $-4 \cdot (-5) + 3$
 - D. $(-8) \cdot (-15) - 5$
 - E. $-3 + 3 \cdot 5$
 $(-50) : (-2) + 1$

91 **JUEGO.** Los grupos tienen un minuto para obtener el número exacto o el más cercano posible. Para ello deben utilizar todos los datos una sola vez, algunas de las operaciones básicas (suma, resta, producto y cociente) y paréntesis si es necesario.

- a) Número: 27
Datos: -3, 5, -2, -6
- b) Número: -1
Datos: -54, -35, -7, 9
- c) Número: -24
Datos: -6, -4, 2, 3
- d) Número: 0
Datos: -54, -35, 2, 17

92 Calcula.

- a) $(-6) \cdot [-(-2) - 3 \cdot (-4)]$
- b) $[(-6) \cdot 2 - 3] \cdot (-4)$
- c) $2 \cdot [(-2) - (-3) \cdot 5] + (-10) : (-2)$

3. Reconoce las propiedades de la divisibilidad entre números enteros



ACTIVIDADES FLASH

- 93 Razona si estas afirmaciones son ciertas.
 - a) 3 es divisor de 15.
 - b) 4 es múltiplo de 12.
 - c) 25 es divisible por 5.
 - d) 48 es múltiplo de 6.
- 94 Completa en tu cuaderno con *múltiplo* o *divisor*.
 - a) 5 es de 25.
 - b) 243 es de 3.
 - c) 25 es de 125.
 - d) 1 es de 22.
- 95 Razona.
 - a) ¿Cuál es el menor múltiplo de un número?
 - b) ¿Cuál es el mayor divisor que tiene un número? ¿Y el menor?



Cómo se calcula un múltiplo de un número comprendido entre otros dos

96 Encuentra un múltiplo de 38 que esté comprendido entre 470 y 515.

PRIMERO. Se divide el menor de los números, 470, entre el número del que se quiere hallar el múltiplo, 38.

$$\begin{array}{r} 470 \overline{) 38} \\ \underline{90} \\ 14 \end{array}$$

SEGUNDO. Se aumenta en una unidad el cociente, y se multiplica por el número del que se quiere obtener el múltiplo.

$$\text{Múltiplo} = (12 + 1) \cdot 38 = 494$$

Se comprueba que 494 es múltiplo de 38 y está comprendido entre 470 y 515.

97 Calcula.

- a) Un múltiplo de 27 comprendido entre 190 y 235.
- b) El mayor múltiplo de 32 menor de 500.
- c) El mayor múltiplo de 42 que tiene tres cifras.
- d) El menor múltiplo de 29 que tiene cuatro cifras.

98 Calcula todos los divisores de estos números e indica cuáles son primos.

- a) 68 b) 29 c) 120 d) 47 e) 346 f) 800

99 **INVENTA.** Escribe tres números capicúas de cinco cifras que sean divisibles por 2 y por 3, y otros tres que sean divisibles por 5 y por 9.

ACTIVIDADES FINALES

100 INVENTA. Aplica los criterios de divisibilidad y escribe tres números en cada caso.

- a) Que sean divisibles por 9.
- b) Que sean divisibles por 11.
- c) Que sean divisibles por 9 y 11.
- d) Que sean divisibles por 2, 9 y 11.

101 INVESTIGA. Contesta razonando tu respuesta.

- a) El doble de un número primo, ¿puede ser también primo?
- b) Un múltiplo de un número primo, ¿es también primo?
- c) El producto de dos números primos, ¿es también un número primo?

102 Completa los huecos en tu cuaderno para que:

- a) $25 \square 3$ sea divisible por 3.
- b) $\square 4 103$ sea divisible por 11.
- c) $43 \square$ sea divisible por 2 y por 3.
- d) $137 \square$ sea divisible por 2 y por 5.

103 Halla la descomposición factorial de estos números.

- a) 83 b) 48 c) 43 d) 60 e) 225

104 RETO. Cuatro estudiantes tienen edades diferentes por debajo de 18 años. El producto de sus edades es 882. ¿Cuánto vale la suma de sus edades?

105 Resuelve el crucigrama.

HORIZONTALES

- 1. m.c.m.(3, 5)
- 2. m.c.m.(8, 12)
m.c.d.(32, 28)
- 3. m.c.m.(18, 50)
- 4. m.c.d.(7, 13)
m.c.d.(50, 75)

	A	B	C	D
1				
2				
3				
4				

VERTICALES

- A. m.c.d.(12, 14) C. m.c.d.(15, 50)
- m.c.d.(5, 6) m.c.m.(4, 26)
- B. m.c.m.(16, 18) D. m.c.m.(45, 81)

106 INVENTA. Escribe dos parejas de números con:

- a) m.c.d. el número 10. b) m.c.m. el número 28.

107 INVESTIGA. Si $m.c.d.(a, 12) = 6$, calcula el valor de a .

108 Averigua qué parejas de números son primos entre sí.

- a) 16 y 25 b) 12 y 51 c) 18 y 49 d) 27 y 108

109 INVENTA. Escribe dos parejas de números primos entre sí.

4. Resuelve problemas cotidianos aplicando la divisibilidad de números enteros

110 En un almacén quieren poner 84 botellas en cajas, sin que sobre ninguna. ¿De cuántas formas posibles las pueden distribuir poniendo el mismo número de botellas en cada una de las cajas?

111 En un *catering* quieren envasar 240 bocadillos de jamón y 225 de tortilla en cajas, todas del mismo tamaño y sin mezclar sabores y con el mayor número posible de bocadillos. ¿Cuántos bocadillos tendrá cada caja? ¿Cuántas cajas habrá en total?

112 En un aeropuerto hay dos pistas, una de despegue y otra de aterrizaje. A las 8 de la mañana hay 9 aviones. A partir de esa hora despegan un avión cada 10 minutos y aterrizan otro cada 4 minutos. ¿A qué hora no hay ningún avión en el aeropuerto por primera vez?

113 En una clase de 32 estudiantes se tienen que hacer grupos para realizar un trabajo de Ciencias. Si el mínimo de componentes de cada grupo es dos y el máximo cuatro, y no queremos que nadie se quede solo, ¿cuál es el menor número de grupos que se pueden formar? ¿Y el mayor?

114 MATEMÁTICAS Y... TRANSPORTE. Estos tres autobuses van de Plaza de Castilla a Tres Cantos.



Autobús 712			
De 6:10	a 23:30	cada	20 min

Autobús 713			
De 6:40	a 23:25	cada	15 min

Autobús 716							
6 h	7 h	8 h	9 h	...	21 h	22 h	23 h
05	00	00	00		00	00	00
-	20	20	20		20	20	-
40	40	40	40		40	40	40

- a) Si llego a las 6:30 h, ¿cuál es el primer autobús que puedo coger desde Plaza de Castilla?
- b) ¿Coinciden el 712 y el 713 antes de las 8 h? ¿A qué hora? ¿Y el 713 y el 716?
- c) ¿Coinciden el 712 y el 716 en algún momento?
- d) ¿Cuántas veces habrá pasado cada autobús entre las 6 h y las 8 h?



**115 MATEMÁTICAS Y... TECNOLOGÍA.**

Usualmente los termómetros que miden la temperatura del ambiente suelen tener una temperatura mínima de $-10\text{ }^{\circ}\text{C}$ y una máxima de $40\text{ }^{\circ}\text{C}$. Entre dos marcas de un termómetro hay siempre el mismo número de grados, entero y mayor que 1.



- a) ¿Pueden estar señalados los grados de 2 en 2? ¿Qué marcas aparecerán entonces? ¿Y de 3 en 3?
- b) ¿De cuántas maneras pueden estar señalados?

116 Manuel quiere poner los 250 envases de productos químicos que hay en el almacén en estantes. Si en cada estante tiene que haber un mínimo de 15 envases:

- a) ¿De cuántas maneras puede colocarlos, poniendo en cada estante el mismo número y sin que sobren?
- b) ¿Se pueden colocar 21 en cada estante? ¿Por qué?

117 Un local mide 35 m de largo por 25 m de ancho, y se quiere dividir, para hacer plazas de aparcamiento dobles, en trozos cuadrados lo más grandes posible sin que sobre espacio. ¿Qué dimensión máxima de lado pueden tener las plazas? ¿Cuántas se obtendrán?

118 Juan tiene una colección de monedas que puede agrupar de tres en tres, de cinco en cinco y de siete en siete sin que sobre ninguna. ¿Cuántas monedas tiene, sabiendo que son más de 215 pero menos de 350?

**¿Subo o bajo la temperatura?**

En 2022 se aprobó una ley de ahorro energético que obligaba a mantener, en el interior de los edificios, una temperatura no inferior a los $27\text{ }^{\circ}\text{C}$ en verano y no superior a los $19\text{ }^{\circ}\text{C}$ en invierno. Los expertos estimaban que cada grado que se aumentaba o disminuía la temperatura suponía un ahorro del 7% de la factura de la electricidad.

En mi casa, en verano, mantenemos el termostato a $21\text{ }^{\circ}\text{C}$. Si pongo el termostato a $36\text{ }^{\circ}\text{C}$, ¿me devolverán dinero?



Y tú, ¿qué opinas?

PROBLEMAS APARENTEMENTE DISTINTOS

119 Opera.

- a) $+4 - (+6) + (+3)$
- b) $+4 + (-6)$

120 Sara vive en el cuarto piso. Baja 6 plantas para ir a su trastero y luego sube 3 para llevarle unos libros que ha recogido a su vecina Teresa. ¿En qué piso vive Teresa? ¿En qué piso está el trastero de Sara?

121 Calcula.

- a) m.c.d.(60, 80)
- b) $[60 : \text{m.c.d.}(60, 80)] \cdot [80 : \text{m.c.d.}(60, 80)]$

122 En una escuela tienen que cortar una cartulina de 80 cm de largo y de 60 cm de ancho en trozos cuadrados tan grandes como sea posible. ¿Qué medida tendrá cada trozo? ¿Cuántos trozos podrán hacer?

123 Calcula el múltiplo común de 8, 9 y 12 más cercano a 450.

124 Mónica tiene cerca de 450 fotografías. Puede pegarlas en un álbum en grupos de 8, 9 o 12 fotografías sin que le sobre ninguna. ¿Cuántas fotografías tiene Mónica?

SITUACIÓN DE APRENDIZAJE



¡Te vas
a quedar
helado!

La aparición del frigorífico marca un antes y un después en la conservación y el transporte de los productos sensibles al calor, no solo en los alimentos, sino también en los medicamentos, las vacunas...

Uno de los electrodomésticos más usados en cualquiera de nuestras casas es el frigorífico, que nos ayuda a conservar los alimentos en condiciones óptimas de consumo durante cierto tiempo. Generalmente, tiene dos zonas diferenciadas: nevera y congelador.



Nevera

- Para conservar alimentos frescos durante unos días.
- Temperatura de funcionamiento entre 2°C y 8°C .
- Regulación de la temperatura de manera manual con pulsador.

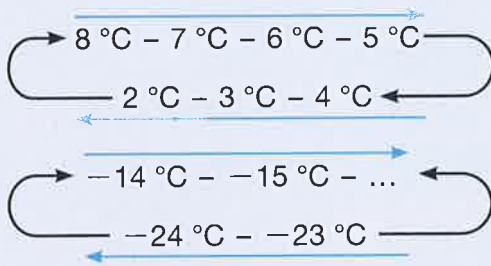
Congelador

- Para conservar alimentos durante meses (se recomienda no superar 3 meses de almacenamiento).
- Temperatura de funcionamiento entre -14°C y -24°C .
- Regulación de la temperatura manual con pulsador o automática con modo de funcionamiento.
- Tarda 45 minutos en bajar un grado la temperatura.

1 Puesta en marcha

Al encender el frigorífico, la nevera está a 5 °C y el congelador a -19 °C. Se recomienda que la primera vez que se pone en marcha la nevera se mantenga a 4 °C y el congelador a -24 °C.

Cada uno dispone de un pulsador que al presionarlo hace que la temperatura seleccionada sea un grado menos. Cuando llega al mínimo, salta a la máxima temperatura.



- ¿Cuántas veces tengo que presionar cada pulsador para seleccionar la temperatura recomendada?
- ¿Cuál es la diferencia de temperatura recomendada entre la nevera y el congelador?



Modo congelador

■ Super Freeze

Se pone en -24 °C y después de 5 horas se regula manualmente con una ruleta.

Posición 1: -20 °C

Posición 2: -22 °C

Posición 3: -24 °C

■ Normal

Se pone a -19 °C y no admite otra regulación.

■ ECO

Se pone a -17 °C y no admite otra regulación.

2 Modos de funcionamiento

La temperatura del congelador se puede regular manualmente, como en el apartado anterior, o utilizando alguno de sus modos predeterminados.

- En el modo Super Freeze, tras 5 horas de funcionamiento, ¿qué temperatura mínima puede alcanzar? ¿Y máxima?
- Si está en el modo ECO y pulsamos el modo Super Freeze, ¿cuántos grados tiene que bajar el congelador durante las 5 horas?

3 ¿Algo no funciona?

El manual del congelador avisa de que la temperatura seleccionada parpadeará hasta que alcance la temperatura deseada.

Se ha seleccionado la posición 2 en el control de temperatura del modo Super Freeze. Tras unas horas, el piloto de la temperatura seguía parpadeando.

Contesta si el congelador funciona bien o mal si ocurren los siguientes acontecimientos.

- Pongo el control de temperatura en la posición 3 y la temperatura deja de parpadear.
- Pongo el control de temperatura en la posición 1 y la temperatura deja de parpadear.
- Pongo el control de temperatura en la posición 1 y la temperatura sigue parpadeando.



RESUMEN DE UNIDAD

NÚMEROS ENTEROS

- Números enteros positivos:
+1, +2, +3, +4, +5, +6, +7, ...
- El número 0.
- Números enteros negativos:
-1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, ...

VALOR ABSOLUTO

Para $a > 0$: $|+a| = a$ $|-a| = a$ $|0| = 0$

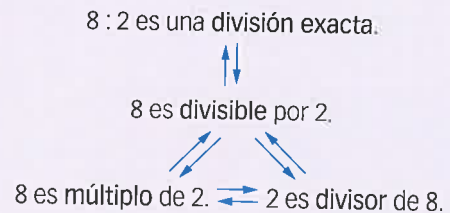
OPUESTO DE UN NÚMERO ENTERO

- Op (+a) = -a
Op (-a) = +a
Op (0) = 0

REGLA DE LOS SIGNOS

$(+) \cdot (+) = +$	$(+) : (+) = +$
$(+) \cdot (-) = -$	$(+) : (-) = -$
$(-) \cdot (+) = -$	$(-) : (+) = -$
$(-) \cdot (-) = +$	$(-) : (-) = +$

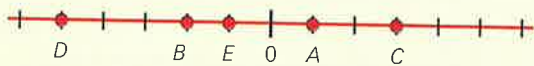
DIVISIBILIDAD



AUTOEVALUACIÓN

1. Expresa situaciones con números enteros y los compara

- 1 Indica los puntos representados en la recta real.



- a) $A = 1, B = 3, C = -2, D = -5, E = -1$
b) $A = 1, B = -1, C = 3, D = -5, E = -2$
c) $A = 1, B = -2, C = 3, D = -5, E = -1$

- 2 Ordena de mayor a menor estos números enteros:
 $|-3|$, Op (+3), $|+2|$, $|Op(-1)|$, Op ($|-7|$).

- a) $|-3| > |+2| > |Op(-1)| > Op(+3) > Op(|-7|)$
b) $Op(|-7|) > |-3| > |+2| > |Op(-1)| > Op(+3)$
c) $Op(|-7|) > Op(+3) > |Op(-1)| > |+2| > |-3|$

2. Opera con números enteros

- 3 Resuelve $4 + (-5) \cdot [4 \cdot (-3) + 2 \cdot (-4)] : (-3 - 2)$.
- a) 36 b) -4 c) -16 d) 24

- 4 Completa $(-10) : (+2) - 2 + 3 = -2 - \square$.
- a) 0 b) 2 c) 6 d) -2

3. Reconoce las propiedades de la divisibilidad entre números enteros

- 5 Señala el número primo.
- a) 33 b) 91 c) 39 d) 61

- 6 Determina todos los divisores de 70.

- a) {1, 2, 5, 7, 10, 14, 35}
b) {1, 2, 5, 7, 10, 14, 35, 70}
c) {1, 2, 5, 7, 10, 14, 15, 35, 70}

- 7 Halla la factorización del número 928.

- a) $2^5 \cdot 29$ c) $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$
b) $2^5 \cdot 3^3$ d) $2^3 \cdot 5 \cdot 23$

- 8 Halla el m.c.d. y el m.c.m. de 35, 90 y 150.

- a) m.c.d.(35, 90, 150) = 5, m.c.m.(35, 90, 150) = 5250
b) m.c.d.(35, 90, 150) = 5, m.c.m.(35, 90, 150) = 3150
c) m.c.d.(35, 90, 150) = 15, m.c.m.(35, 90, 150) = 500

4. Resuelve problemas cotidianos aplicando la divisibilidad de números enteros

- 9 Se están mezclando tres compuestos en un laboratorio de 20, 35 y 120 ml. Indica el número máximo de mezclas que se pueden hacer de forma que haya la misma cantidad de compuesto en todas las mezclas.

- a) 5 b) 10 c) 15 d) 30

VALORA TU APRENDIZAJE

- ¿Vuelves a intentarlo si algo no te sale bien?
- ¿Te sientes a gusto trabajando con otras personas?