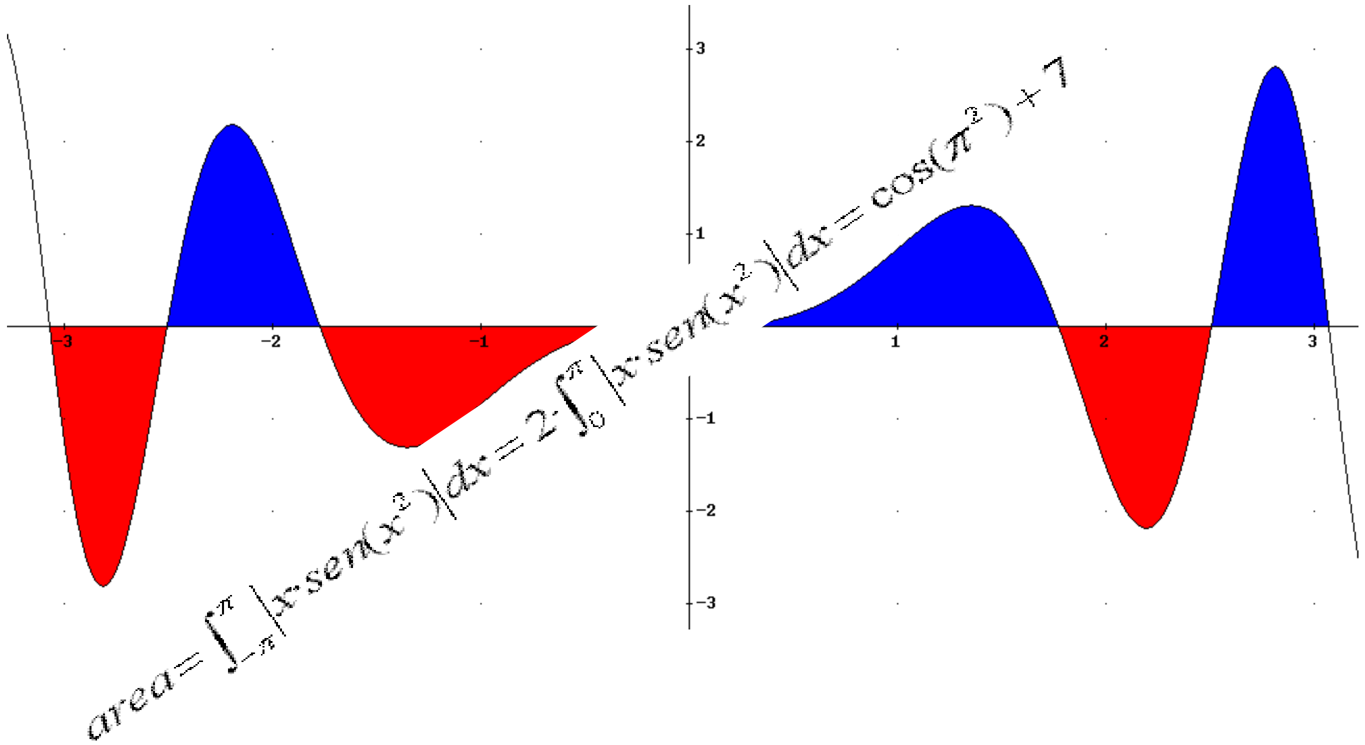
Matemáticas II
(preparación para la PAU)
Tomo 1 (Análisis)



José Luis Lorente Aragón

A mi mujer, Ruth, y a mi hijo David.

Muchas gracias al corrector, el otro José L. Lorente

ÍNDICE:

TEMA 1. FUNCIONES REALES. DEFINICIÓN Y LÍMITES

Contexto con la P.A.U.

En los exámenes de la PAU por lo general hay dos problemas (2.5 puntos) en cada una de las dos opciones del bloque de análisis. De esta forma el bloque de análisis es, de los tres, el más importante.

Este tema es básico para el conocimiento y dominio de las funciones que en los temas siguientes abordaremos con detenimiento. Por lo general en el examen de la PAU no hay problemas ni cuestiones específicamente relacionadas con este tema, si bien el no dominar los conceptos que se plantean en la unidad, hará dificultoso, por no decir imposible, realizar los ejercicios del examen relacionados con este, bloque I.

Nótese que con bastante asiduidad en el examen de la PAU, hay una o dos cuestiones relacionadas con el cálculo de límites de funciones, si bien por lo general se resuelven a partir del teorema de L'Hopital que veremos en el tema 4; no obstante en alguna ocasión estos límites se resuelven mediante los métodos de resolución que veremos en este tema, en especial los límites relacionados con el número ***e,*** las indeterminaciones exponenciales y los límites de funciones racionales.

1. Funciones reales de variable real. Dominio de una función

Las funciones se utilizan en numerosos campos, tanto de las ciencias (física, biología, química) como en economía, etc. Definamos funciones reales de variable real:

Definición: Una función real de variable real es una aplicación o correspondencia entre un subconjunto de R, llamado dominio de la función (*Dom(f)*),y otro subconjunto de R llamado conjunto imagen o recorrido de la función (*Im(f)*), tal que a cada elemento de Dom(f) le corresponda un ***único elemento*** de Im(f). Una forma habitual de expresar las funciones es:

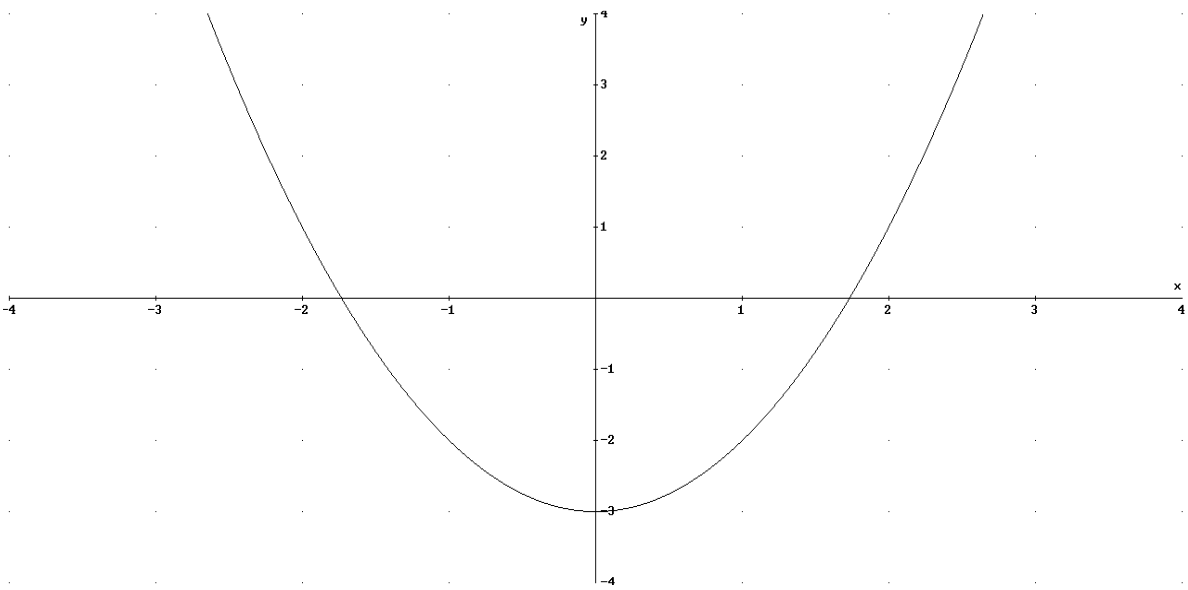
$$f : R \longrightarrow R$$
$$x \longrightarrow y = f(x)$$

Ejemplos de funciones:

a) $y=f(x)=x^2-3$

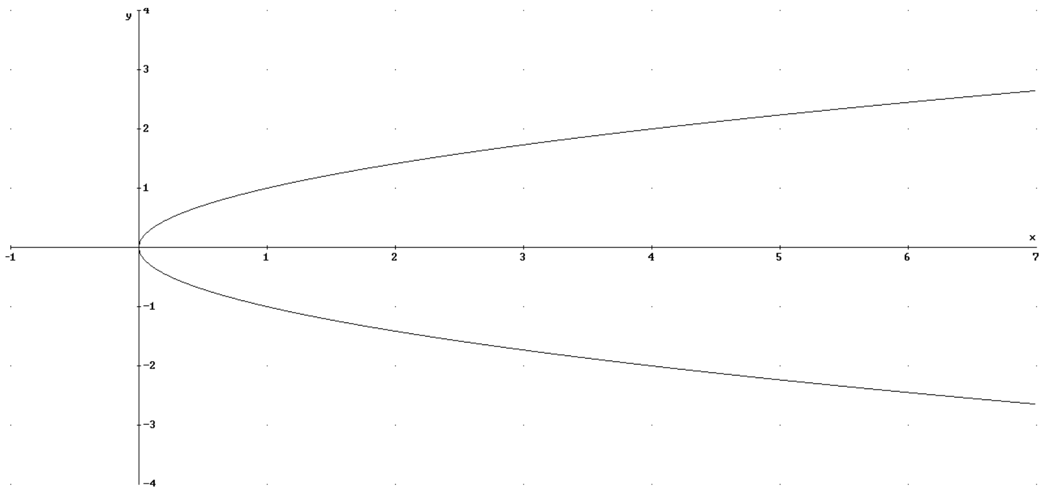
$$f : R \longrightarrow R$$
$$x \longrightarrow y = f(x) = x^2 - 3$$
$$3 \longrightarrow y = f(3) = 3^2 - 3 = 6$$

Gráfica:



Como puedes ver en la gráfica de la función, a cada valor x del conjunto dominio (eje OX, abscisas u horizontal) le corresponde un único valor y del conjunto imagen (eje OY, ordenado o vertical)

b) Veamos la siguiente gráfica que representa las soluciones de la expresión $y^2=x$:



En este caso la gráfica no representa una función, pues para cada elemento del dominio (eje OX) le corresponden dos valores. Por ejemplo, la solución a $x^2=4$ es y=2 e y=-2, que no es un valor único, como deberían de ser las funciones. En este caso tendremos que las soluciones de la ecuación de segundo grado vienen dadas por dos funciones: y= $\sqrt{x}$ (rama encima del eje OX), e y=- $\sqrt{x}$ (rama por debajo del eje OX).

No es necesario para que no sea función que todo valor x le correspondan dos o más valores, con que sólo haya un valor de x con dos o más imágenes la expresión no será una función.

1.1 Dominio de las funciones más usuales

En este apartado vamos a ver el estudio del dominio de las funciones reales de variable real más usuales y utilizadas:

- **Funciones polinómicas:** Son funciones del tipo $y=f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$, es decir, f(x) es un polinomio. El dominio de estas funciones es el conjunto de los números reales, ya que para cualquier valor de x, por ejemplo x=2, la función tiene sentido siendo su imagen $y= a_0+a_12+\ldots+a_n2^n$. Luego en estas funciones ***Dom(f)=R***

- **Funciones racionales fraccionarias:** Son del tipo $y=f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, siendo P(x) y Q(x) polinomios. El dominio de la función son todos los número reales, excepto aquellos que anulan el denominador (soluciones de Q(x)=0), ya que no se puede dividir entre cero. Así en estas funciones ***Dom(f)=R-{x:Q(x)=0}***

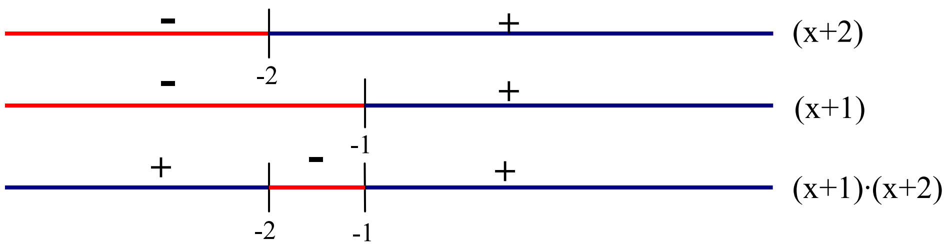
  Ejemplo: $f(x)=\dfrac{x^2-3x+4}{x^3-x}$ → Dom(f)=R-{0,1,-1}

- **Funciones irracionales:** Son del tipo $f(x)=\sqrt[n]{g(x)}$; dos casos:
  - Si n es impar el dominio de f(x) es el mismo que el de g(x), pues las raíces impares de números negativos son valores reales. Así tenemos que ***Dom(f(x))=Dom(g(x)***

- Si n es par el dominio de f(x) es el conjunto de números del domino de g(x), tales que g(x)≥0, ya que las raíces pares de números negativos no son números reales. Así ***Dom(f(x))={x∈Dom(g(x): g(x)≥0}***

***Ejemplo**:* $y = f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 2}$ → Dom(f)={x / $x^2+3x+2 \geq 0$}

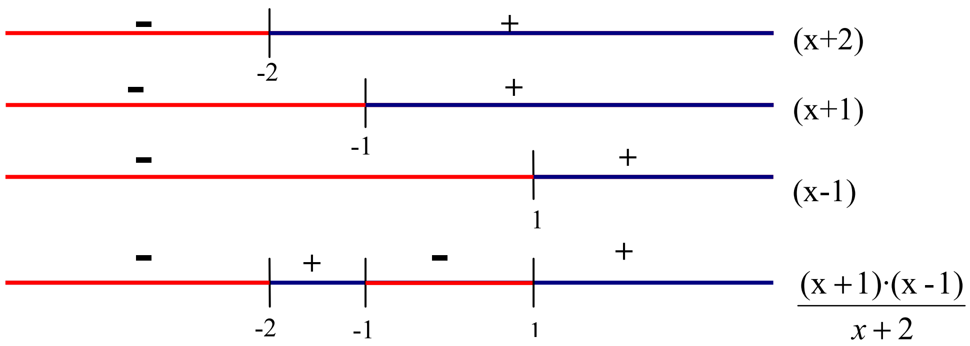
$x^2+3x+2=(x+2)\cdot(x+1) \geq 0$



Dom(f)=(-∞,-2] ∪ [-1,∞)

- **Funciones exponenciales:** son funciones del tipo $y=a^{g(x)}$, su dominio es el mismo que el dominio del exponente g(x). Así en estas funciones ***Dom(g(x))=Dom(f(x))***
- **Funciones logarítmicas:** $f(x)=\log_a(g(x))$ el dominio es el conjunto de puntos del dominio de g(x) en los que se cumple g(x)>0, pues no existe solución real para los logaritmos cuando el argumento es negativo o cero. Así en estas funciones ***Dom(g(x))={x∈Dom(f(x)):f(x)>0}***

  Ejemplo: y=*f(x)*= $\log\left(\frac{x^2-1}{x+2}\right)$ el dominio de g(x) es R-{2}, veamos el dominio de f(x) → $\frac{x^2-1}{x+2} = \frac{(x+1)(x-1)}{x+2} > 0$:



Dom(f(x))= (-2,-1) ∪ (1,∞)

2. Composición de funciones. Propiedades

Definición: Dadas dos funciones f y g tales que $Im(f) \subseteq Dom(g)$ se llama *función compuesta* de g con f y se denota $(g \circ f)(x)$, a la función definida de la siguiente forma:

$(g \circ f)(x) = g[f(x)]$, es decir la imagen en $(g \circ f)$ de x es la imagen del punto f(x) en g:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "(g \circ f)"] & \mathbb{R} \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \\ x \arrow[r] & f(x) \arrow[r] & g(f(x)) \end{tikzcd}$$

Ejemplos:

$f(x)=x^2$, $g(x)=sen(x)$ → $(g \circ f)(x)=sen(x^2)$; $(f \circ g)(x)=sen^2(x)$

Propiedades:

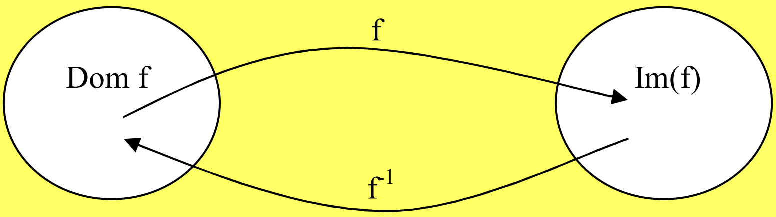
1.) *Asociativa:* $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

2.) No conmutativa: en general la composición de funciones no es conmutativa $(g \circ f) \neq (f \circ g)$, ver ejemplo anterior → $sen(x^2) \neq sen^2(x)$

3. Función Inversa

Definición: *La función inversa* de una función f(x) inyectiva (no existen dos valores x_1 y $x_2 \in Dom(f)$ tal que $f(x_1)=f(x_2)$) es otra función, que se denota por $f^{-1}(x)$, tal que se cumple:

$$(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = id(x) = x \quad \forall x \in Dom(f(x))$$



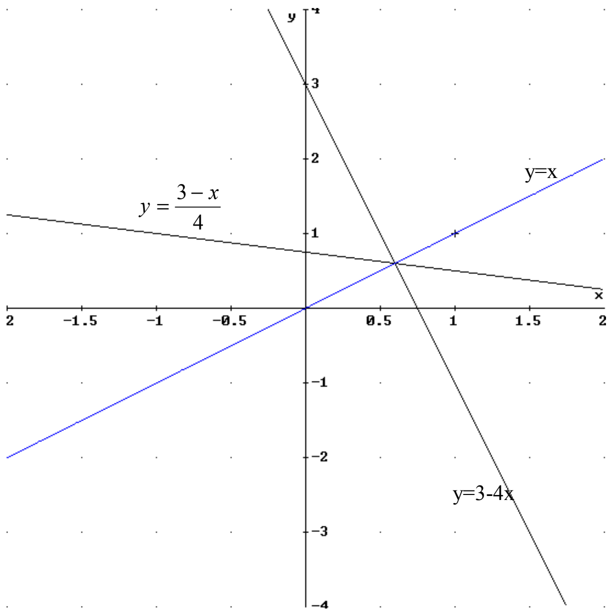
Ejemplos:

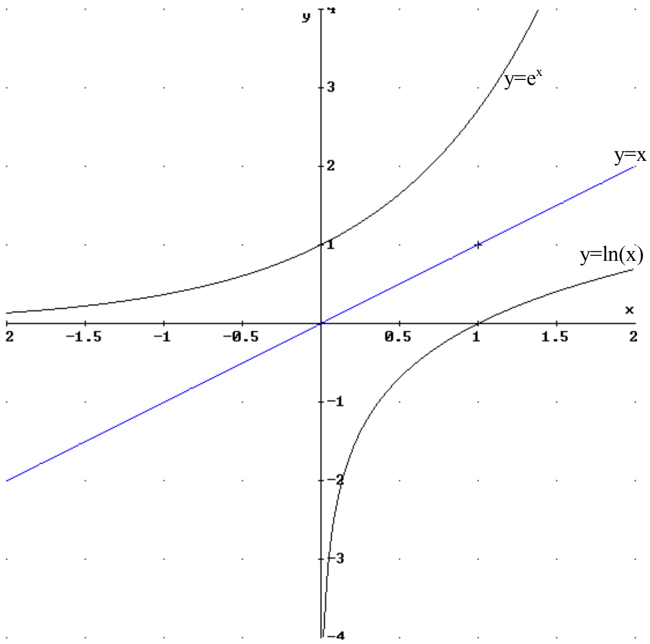
a) $y=f(x)=3-4x$ → $x=(3-y)/4$ → $f^{-1}(x)=\dfrac{3-x}{4}$. $(f \circ f^{-1})(x)=3-4\left(\dfrac{3-x}{4}\right)=x$

b) $y=\ln(x)$ → $y=e^x$

Representación gráfica de las función inversa: la propiedad más importante de las funciones inversas es que la gráfica de f(x) es simétrica a $f^{-1}(x)$ respecto a la bisectriz del primer cuadrante, y=x.

***Representación gráfica de los ejemplos*:**





Ejercicio 1. **Sean las siguientes funciones f(x)=1, g(x)=x^2+1, h(x)=$\frac{1}{x^2+1}$ realizar las siguientes composiciones: a) (g○f○h), b) (f○g○h), c) (h○g○f)**

a) $(g\circ f\circ h)=g\circ(f\circ h)=g\circ(f(\frac{1}{x^2+1}))=g(1)=2$

b) $(f\circ g\circ h)=f\circ(g\circ h)=f\circ(g(\frac{1}{x^2+1}))=f\left(\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^2+1\right)=1$

c) $(h\circ g\circ f)=h\circ(g\circ f)=h\circ(g(1))=h(1^2+1)=h(2)=1/5$

4. Límite de una función. Funciones convergentes

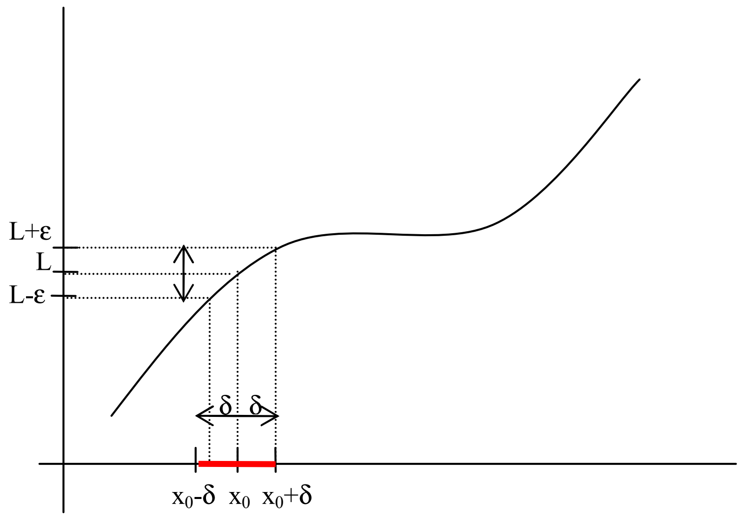
La idea intuitiva de límite de una función en un punto es fácil de comprender: es el valor hacia el que se aproxima la función cuando la variable independiente, x, se aproxima a dicho punto.

Ejemplo: sea f(x)=$\frac{1}{(x-1)^2}$ el límite de la función cuando x tiende a 1 es infinito, ya que cuanto más se aproxima x a 1 entonces $(x-1)^2$ más próximo a cero (positivo), y por tanto la función se hace más grande (1/0.00000001=100000000).

Definición: Matemáticamente una función f tiene límite L cuando x tiende a un valor x_0, y se denota $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ si se cumple:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0; \exists\, \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

El significado de la definición es la siguiente: sea cual sea el entorno de y=L, existe un entorno de $x=x_0$ tal que en este entorno la función cae dentro del entorno de L. Veámoslo gráficamente:



Vamos a considerar dos casos diferentes:

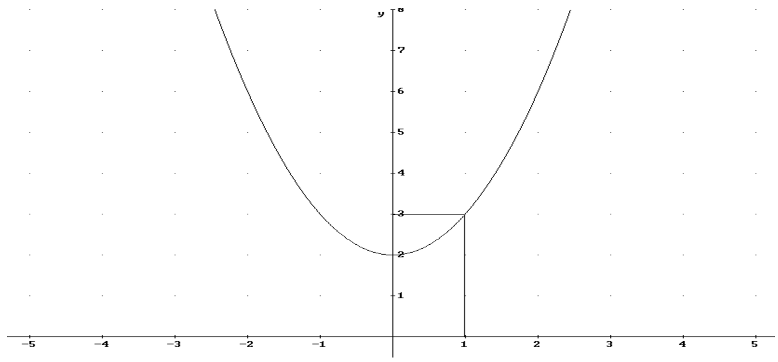
a) $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ y $f(x_0)=L$

b) $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ pero $f(x_0)\neq L$

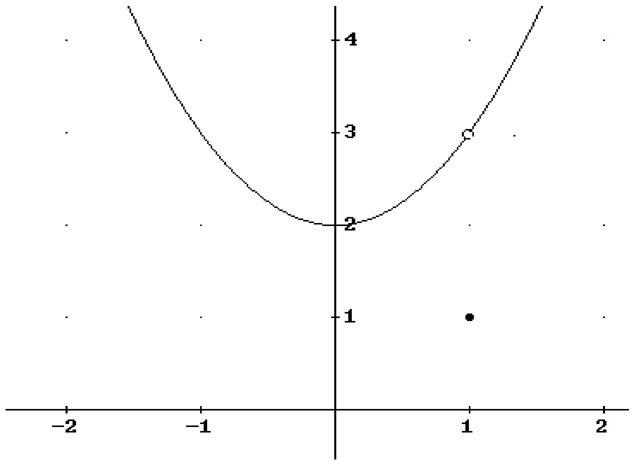
Ejemplo:

a) $f(x)=x^2+2$ → $\lim_{x\to 1} f(x) = 3 = f(1)$

Veamos la gráfica de la función:



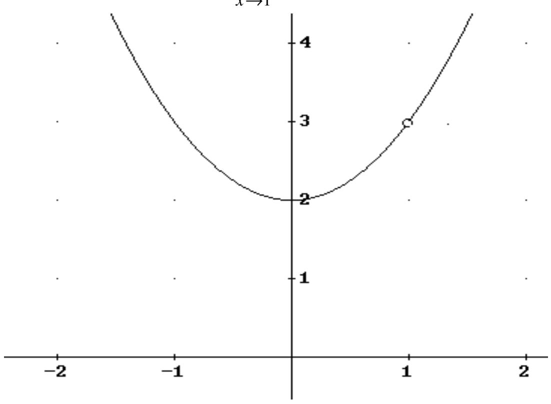
b) g(x)=$\begin{cases} x^2+2 & si \;\; x\neq 1 \\ 1 & si \;\; x=1 \end{cases}$ → $\lim_{x\to 1} g(x)=3 \;\; g(1)=1$



Definición: Dada una función f(x), se dice que es convergente en x_0 si, existe el límite $\lim_{x\to x_0} f(x)=L$.

Para que f(x) sea convergente en x_0 no es necesario que x_0 pertenezca al dominio, por ejemplo

g(x)=x^2+2 si x∈R-{1} (es decir x≠1) → $\lim_{x\to 1} g(x)=3, \; 1\notin Dom(g(x))$



Cuando x se aproxima a 1 la función se acerca a y=3 (tanto antes de x=1 como después), aunque justo en x=1 la función no definida.

4.1 Límites laterales

Existen funciones definidas a trozos, son aquellas que están definidas de diferente manera a lo largo de distintos intervalos de la recta real. En estas funciones, cuando queremos estudiar el límite en los puntos donde cambia la expresión analítica, es necesario calcular los límites laterales, viéndose así la tendencia de la función a ambos lados del punto.

Definición: Una función f tiene límite L cuando x tiende a un valor x_0 por la izquierda, y se denota $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$, si se cumple:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0; \exists\, \delta > 0 : \; x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Consiste en estudiar el comportamiento de la función en el entorno a la izquierda de x_0.

Definición: Una función f tiene límite L cuando x tiende a un valor x_0 por la derecha, y se denota $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$, si se cumple:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0; \exists\, \delta > 0 : \; x_0 + \delta > x > x_0 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Consiste en estudiar el comportamiento de la función en todo entorno a la derecha de x_0.

Teorema: El límite de una función f(x) en x_0 existe si, y sólo si, existen los límites laterales y éstos coinciden:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$$

Este teorema será muy importante en los ejercicios de la PAU donde se nos pide estudiar la continuidad de funciones definidas a trozos. Además, como veremos en el apartado 6.4, es el método utilizado para resolver las indeterminaciones de los límites del tipo $\frac{k}{0}$

4.2. Propiedades de los límites:

1. Si una función es convergente en un punto ésta acotada en un entorno del punto.

2. Sean f(x) y g(x) dos funciones convergentes en x_0, tal que $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ y $\lim_{x \to x_0} g(x) = L'$. Se cumplirá:

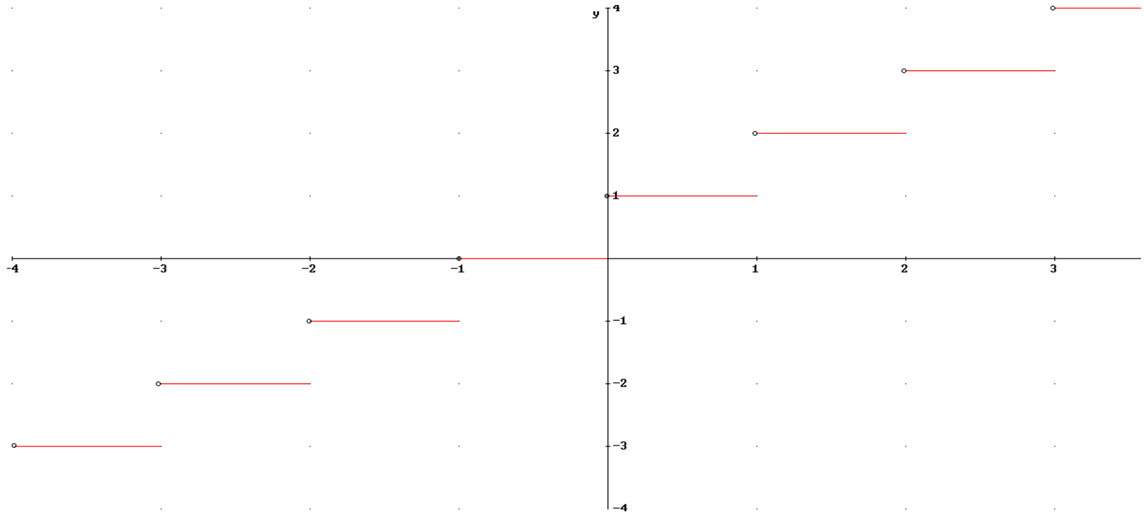
a) (f+g)(x) es convergente en x_0 tal que $\lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = L + L'$

b) (f-g)(x) es convergente en x_0 tal que $\lim_{x \to x_0} (f-g)(x) = L - L'$

c) (f·g)(x) es convergente en x_0 tal que $\lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = L \cdot L'$

d) (f/g)(x) es convergente en x_0 si L'≠0 tal que $\lim_{x \to x_0} (f/g)(x) = L/L'$

Ejercicio 2. Dada la función f(x) con la siguiente gráfica, calcular los límites:



a) $\lim_{x\to n^+} f(x)$ con n∈Z → $\lim_{x\to n^+} f(x)$=n+1

b) $\lim_{x\to n^-} f(x)$ con n∈Z → $\lim_{x\to n^-} f(x)$=n

c) $\lim_{x\to n} f(x)$ con n∈Z → $\lim_{x\to n} f(x)$ no existe pues $\lim_{x\to n} f(x) \neq \lim_{x\to n^+} f(x)$

Ejercicio 3. Hallar el limite, si existe, de f(x)=|x|-1 cuando x tiende a cero

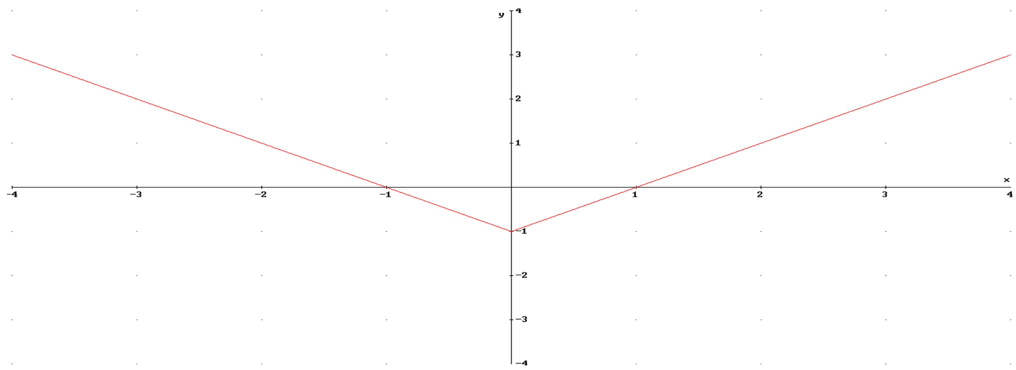
Siempre que tengamos una función con valor absoluto, la redefiniremos como una función definida a trozos. La forma de proceder es estudiar los intervalos donde el argumento del valor absoluto es negativo, cambiando en dichos intervalos el signo de dicho argumento y conservando el signo en el resto de la recta real:

$$|x|=\begin{cases} x & si \quad x>0 \\ -x & si \quad x\leq 0 \end{cases} \rightarrow \quad f(x)=\begin{cases} x-1 & si \quad x>0 \\ -x-1 & si \quad x\leq 0 \end{cases}$$

Nota: el igual se puede poner en cualquiera de los dos trozos de la función (pero sólo en uno) ya que en ambos casos el valor de y es cero.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0-1=-1, \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -0-1=-1 \rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = -1$$

Veamos la gráfica de la función:



Ejercicio 4. Hallar el limite, si existe de f(x)=|(x^2-1)| cuando x tiende a 1 y a -1

Definamos la función como una función a trozos. En este caso x^2-1 es negativo en el intervalo (-1,1).

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & si \quad x\leq -1 \\ -x^2+1 & si \quad -1<x<1 \\ x^2-1 & si \quad x\geq 1 \end{cases}$$

$\lim_{x\to 1^+} f(x)=1^2-1=0$, $\lim_{x\to 1^-} f(x)=-1^2+1=0$ → $\lim_{x\to 1} f(x)=0$

$\lim_{x\to -1^+} f(x)=-(-1)^2+1=0$, $\lim_{x\to -1^-} f(x)=(-1)^2-1=0$ → $\lim_{x\to -1} f(x)=0$

5. Distintos tipos de límites

5.1 Límites infinitos cuando x tiende a un número real (asíntota vertical)

En este apartado vamos a estudiar el caso de funciones que cuanto más se aproxima x a un valor x_0, bien por la izquierda, por la derecha o por los dos, la función se hace infinitamente grande (tiende a +∞) o pequeña (tiende a -∞). Cuando esto ocurre se dice que la función f(x) tiene asíntota vertical en $x=x_0$ Veamos los siguientes casos:

Definición: Una función f(x) tiene limite +∞ cuando x tiende a x_0 por la izquierda si cuando para todo valor K existe un entorno a la izquierda de x_0, tal que la función en este entorno es mayor que K. Matemáticamente

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall K>0\ \exists\delta>0 : \forall x\in(x_0-\delta,x_0)\to f(x)>K$$

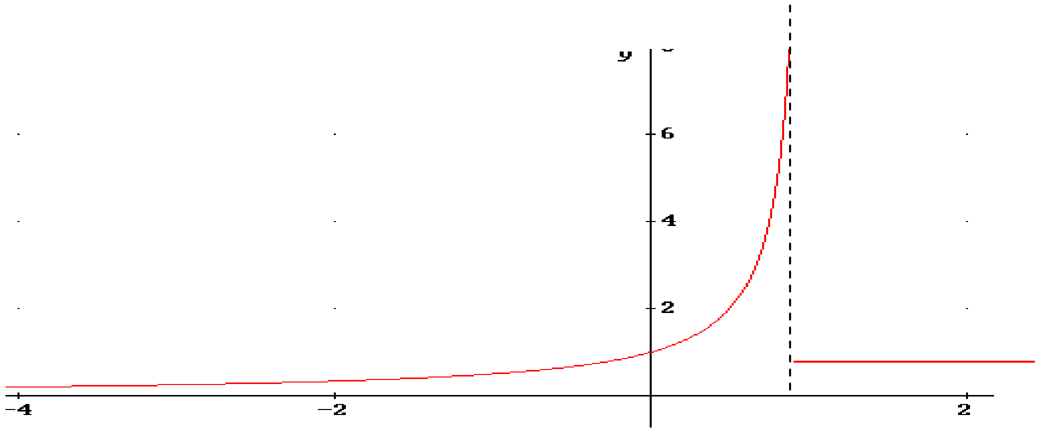
Ejemplo: f(x)= $\begin{cases} \dfrac{1}{1-x} & si \quad x<1 \\ 2 & si \quad x\geq 1 \end{cases}$

$\lim_{x\to 1^-} f(x)=+\infty$ ya que cuanto más se aproxime x a 1 por la izquierda entonces x-1 más pequeño y positivo y por tanto f(x) más grande. Es decir, cuando x→1^- entonces la función f(x)→+∞.

En cambio $\lim_{x\to 1^+} f(x)=2$

Cuando esto ocurre la función se aproxima a la asíntota vertical x=1. Es decir cuando la función se aproxima a 1 por la izquierda, ésta se acerca infinitamente a la recta x=1, que es paralela al eje OY

Veamos la gráfica:



Definición: Una función f(x) tiene limite $+\infty$ cuando x tiende a x_0 por la derecha, si para todo valor K existe un entorno a la derecha de x_0 tal que la función en este entorno es mayor que K. Matemáticamente

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall K>0\ \exists\delta>0 : \forall x\in(x_0, x_0+\delta) \to f(x)>K$$

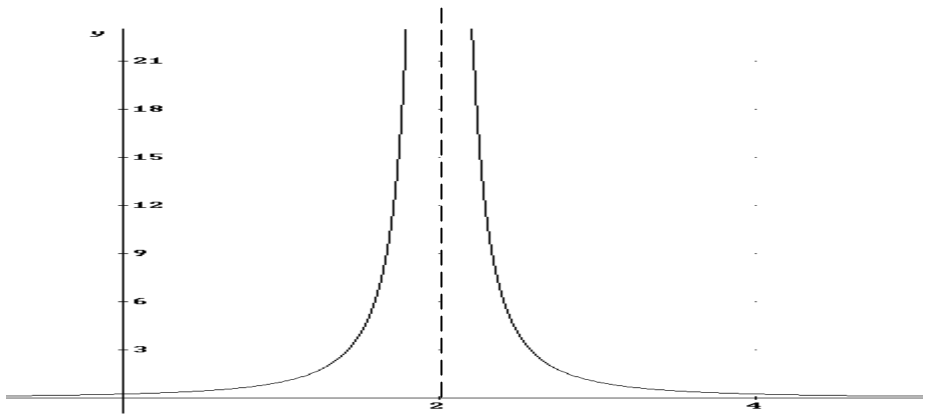
Definición: Una función f(x) tiene limite $+\infty$ al acercarse x a x_0, cuando para todo valor K existe un entorno de x_0 tal que la función en este entorno es mayor que K. Es decir, tiende a $+\infty$ por la izquierda y por la derecha. Matemáticamente

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall K>0\ \exists\delta>0 : \forall x\in(x_0-\delta, x_0+\delta) \to f(x)>K$$

Ejemplo: f(x)=$\dfrac{1}{(x-2)^2}$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{1}{(x-2)^2} = \infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{(x-2)^2} = \infty \end{cases} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{(x-2)^2} = \infty$$

Veamos la gráfica de la función y así podremos interpretar el significado del límite:



De igual forma que hemos estudiado el límite a +∞ , el límite a -∞ es equivalente, sólo hay que cambiar K por –K

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall -K < 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \to f(x) < -K$$

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall -K < 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \to f(x) < -K$$

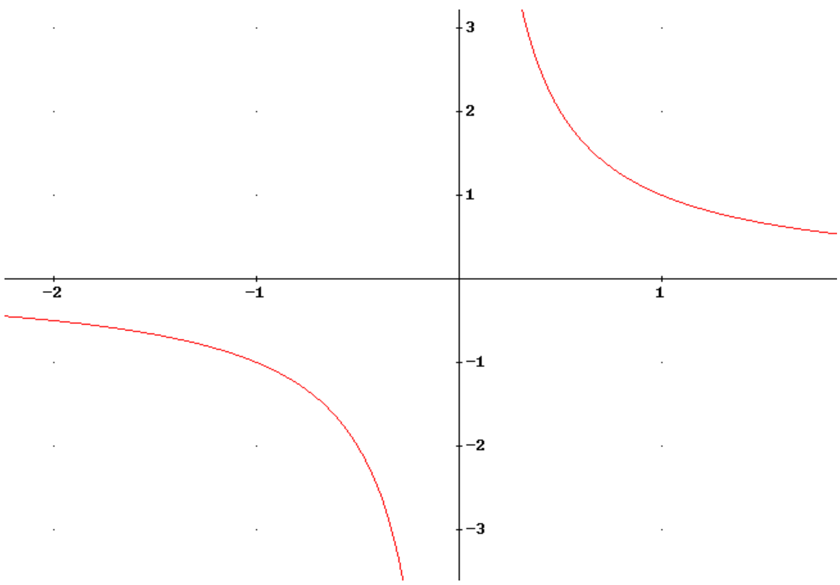
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall -K < 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to f(x) < -K$$

Muchas veces las funciones f(x) tienden a +∞ por un lado de x_0 y a -∞ por el otro lado de x_0; cuando esto ocurre el $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ no existe, ya que para existir debe coincidir los límites laterales.

Ejemplo:

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty,\ \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty \rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = no\, existe$$

Veamos la gráfica:



Definición: La función f(x) tiene asíntota vertical en x_0 cuando alguno de los dos límites laterales o los dos valen ∞ o -∞, es decir ocurre al menos uno de estos 4 límites:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty \ ,\ \lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty \ ,\ \lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$$

5.2 Límites finitos cuando x tiende a infinito (asíntota horizontal)

En este apartado estudiamos el comportamiento de algunas funciones en las que, cuando la x toma valores muy grandes o muy pequeños (es decir “muy negativos”) la función se aproxima cada vez más a un valor L. Si esto ocurre se dice que f(x) tiende a L cuando x tiende a +∞ o a -∞. Veamos la definición:

Definición: Una función f tiene por límite un número real L cuando x tiende a +∞, si se cumple:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \iff \forall\varepsilon > 0, \exists\, K > 0 : \forall x > K \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Interpretación gráfica de la definición: Para cada entorno de y=L encontramos un valor de x=K, tal que para valores de x mayores que K, la función (y) dentro de este entorno en y=L.

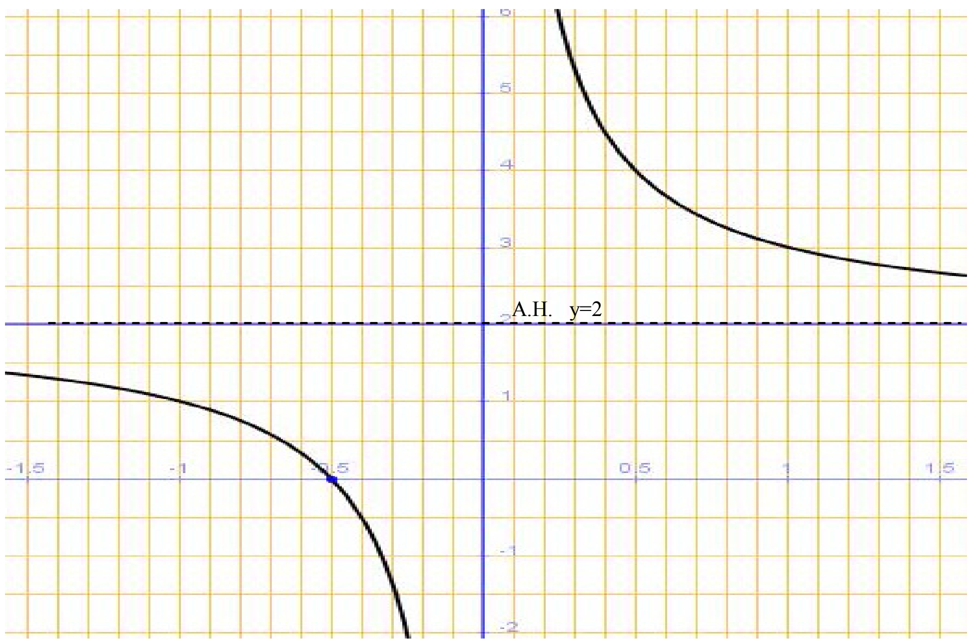
Definición: Una función f tiene por límite un número real L cuando x tiende a -∞, si se cumple:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L \iff \forall\varepsilon > 0, \exists -K < 0 : \forall x < -K \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Interpretación gráfica de la definición: Para cada entorno de y=L encontramos un valor de x=-K, tal que para valores de x menores que -K, la función (y) dentro de este entorno en y=L.

Cuando ocurre una de las dos condiciones, o las dos, la función tiene una asíntota horizontal y=L. Es decir, cuando x se hace infinitamente grande (x→∞) o infinitamente pequeño (x→-∞), la función se acerca a la recta paralela al eje OX y=L

Ejemplo: y=(2x+1)/x



Definición: Una función f(x) tiene una asíntota horizontal en $y=y_0$ si se cumple una de las siguientes condiciones (o las 2):

a) $\lim_{x\to\infty} f(x) = y_0$

b) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = y_0$

5.3 Límites infinitos cuando x tiende a infinito

En este último apartado estudiaremos 4 casos:

a) $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$

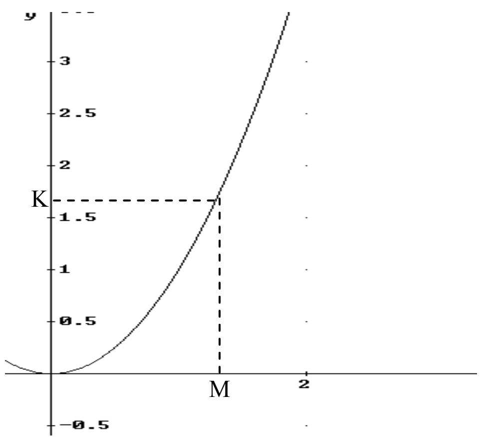
b) $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

c) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

d) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

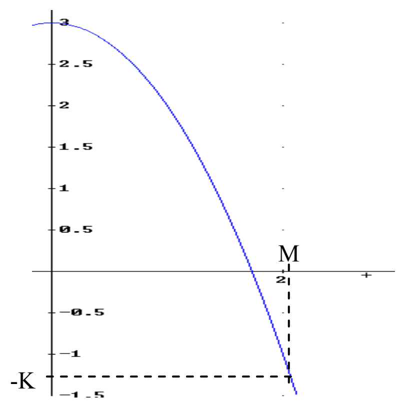
a) $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall K > 0, \exists M \in R : \forall x > M \Rightarrow f(x) > K$

Ejemplo: $\lim_{x\to\infty} x^2 = +\infty$



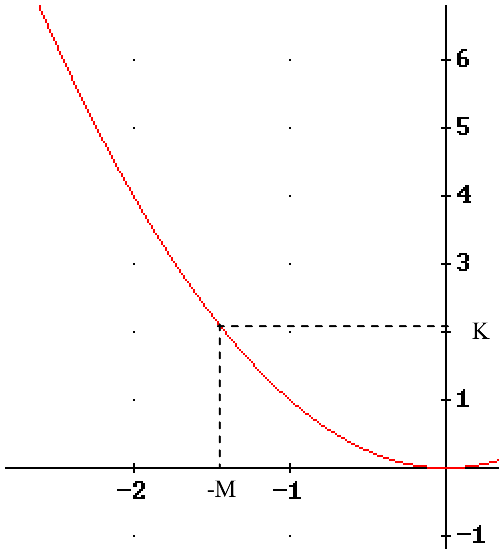
b) $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall -K < 0, \exists M \in R : \forall x > M \Rightarrow f(x) < -K$

Ejemplo: y=3-x^2 $\lim_{x\to\infty} -x^2 = -\infty$



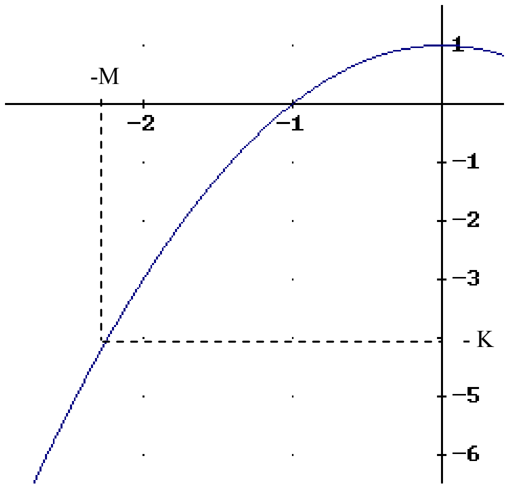
c) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall K > 0, \exists -M \in R : \forall x < -M \Rightarrow f(x) > K$

Ejemplo: y=f(x)=x^2, $\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$



d) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall -K < 0, \exists -M \in R : \forall x < -M \Rightarrow f(x) < -K$

Ejemplo: y=f(x)=-x^2+1 $\lim_{x\to-\infty} -x^2 + 1 = -\infty$



6. Cálculo de límites

6.1 Operaciones con límites. Indeterminaciones

En el apartado 4.2 vimos las propiedades de los límites, y como se relacionan los límites de dos funciones cuando estas funciones se están sumando, multiplicando y dividiendo. Al haber límites cuyo valor es ∞ y -∞, tendremos que ver cómo operan los números con ±∞. Veámoslo:

***Suma y diferencia*:**

1) $\forall k \in R$ $k \pm \infty = \pm\infty$

2) $\infty + \infty = \infty$

3) $-\infty - \infty = -\infty$

Producto:

1) $\forall k\in R^{+}$ (k>0) k·∞=∞ → ejemplo $\lim_{x\to+\infty} 3x = +\infty$

2) $\forall -k\in R^{-}$ (-k<0) -k·∞=-∞ → ejemplo $\lim_{x\to+\infty} -3x = -\infty$

3) $\forall k\in R^{+}$ (k>0) k·(-∞)=-∞ → ejemplo $\lim_{x\to-\infty} 3x = -\infty$

4) $\forall -k\in R^{-}$ (-k<0) -k·(-∞)=∞ → ejemplo $\lim_{x\to-\infty} -3x = +\infty$

Cociente:

1) $\forall k\in R$ $\frac{k}{\pm\infty} = 0$ → ejemplo $\lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x} = 0$

2) $\forall k\in R^{+}$ $\frac{\pm\infty}{k} = \pm\infty$ → ejemplo $\lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{4} = -\infty$

3) $\forall -k\in R^{-}$ $\frac{\pm\infty}{-k} = \mp\infty$ → ejemplo $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{-4} = -\infty$

Exponente:

1) $\forall k\in R$ k>1 $k^{+\infty} = +\infty$ → ejemplo $\lim_{x\to+\infty} 2^{x} = +\infty$

2) $\forall k\in R$ 0<k<1 $k^{+\infty} = 0$ → ejemplo $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{x} = 0$

3) $\forall k\in R$ k>1 $k^{-\infty} = 0$ →ejemplo $\lim_{x\to-\infty} 2^{x} = 0$

4) $\forall k\in R$ 0<k<1 $k^{-\infty} = +\infty$ → ejemplo $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} = +\infty$

Indeterminaciones:

1) ∞-∞ , -∞+∞ → ejemplo $\lim_{x\to\infty} x - x^{2}$

2) 0·(±∞) → ejemplo $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x-2}(x^{2}+3x)$

3) $\frac{k}{0}$ → ejemplo $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$

4) $\frac{\pm\infty}{0}$ → ejemplo $\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x^{2}}}{x}$

5) $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ → ejemplo $\lim_{x\to\infty} \frac{x^{2}+2}{x}$

6) $\frac{0}{0}$ → ejemplo $\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2x}{x}$

7) 1^{∞} → ejemplo: $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

8) 0^{∞} → ejemplo: $\lim_{x\to 0}(x)^{\frac{1}{x}}$

9) ∞^{0} → ejemplo: $\lim_{x\to \infty}(x)^{\frac{1}{x}}$

Nota: a) en el apartado 7, cuando expresamos 1^{∞} el 1 significa tendencia a 1 (de hecho $\lim_{x\to\infty}(1)^x = 1^{\infty} = 1$). b) en el apartado 8, 0^{∞} es tendencia al 0.

6.2 Resolución de indeterminaciones del tipo $\frac{\infty}{\infty}$

Las situaciones más simples en las que aparece es al calcular los límites infinitos de fracciones polinómicas. Estas indeterminaciones se resuelven dividiendo el numerador y el denominador por la máxima potencia de x del denominador

Ejemplos:

a) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2-3x+2}{x^3+3x-5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{5x^2-3x+2}{x^3}}{\frac{x^3+3x-5}{x^3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{1+\frac{3}{x^2}-\frac{5}{x^3}}=\frac{0}{1}=0$$

b) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^3+3x+2}{-x^2+3x-5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-x^3+3x+2}{x^2}}{\frac{-x^2+3x-5}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{-1+\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}}=\frac{-\infty}{-1}=+\infty$$

c) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x^2+3x+2}{-2x^2+3x-5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-3x^2+3x+2}{x^2}}{\frac{-2x^2+3x-5}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{-2+\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}}=\frac{-3}{-2}=\frac{3}{2}$$

Conclusión:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1}\ldots + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1}+\ldots+b_0}$$

a) n>m → $\lim_{x\to+\infty}\frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1}\ldots + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1}+\ldots+b_0}=0$

b) m>n → $\lim_{x\to+\infty}\frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1}\ldots + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1}+\ldots+b_0}=\begin{cases}-\infty & si\ {}^{a_m}\!/_{a_n}<0\\ +\infty & si\ {}^{a_m}\!/_{a_n}>0\end{cases}$

c) *m=n*→ $\lim_{x\to+\infty}\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}\ldots + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1}+\ldots+b_0}=\frac{a_n}{a_n}$

Estos no son los únicos tipos de límites en donde aparece la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$, veamos otros casos diferentes

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1}\ldots + a_0}{k^x} = 0 \quad (k>1)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{k^x}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_0} = +\infty \quad (k>1)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1}\ldots + a_0}{\log_k x} = +\infty \quad (k>1)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_k x}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_0} = 0 \quad (k>1)$$

En estos límites hay que fijarse en la tendencia a ∞ de las funciones del numerador y del denominador. Así si la función del numerador crece más rápido se cumple que el limite será ± ∞ (el signo depende de los signos de la fracción); por el contrario si la función que más rápido crece es la del denominador el límite será 0; por último si ambas crecen de igual forma el limite será el cociente de los coeficientes de mayor grado de cada función. Ordenando las funciones ∞ de menor a mayor crecimiento a ∞ se cumple:

$$\ldots<\log_{10}(\mathbf{x}) <\log_3(x)< \log_2 x \ldots.<\sqrt{x}=x^{1/2}<x<\ldots<x^5\ldots<2^x<3^x<\ldots10^x<\ldots$$

6.3. Resolución de indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$

Aparece este tipo de límites principalmente en 2 casos diferentes:

1) ***Cociente de funciones polinómicas:*** Se resuelven descomponiendo factorialmente numerador y denominador (aplicando Ruffini con raíz la del límite, ya que es el valor donde sea anulan los dos polinomios), simplificando los factores comunes.

Ejemplos:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^3-7x^2+14x-8} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x^2-5x+4)} = \lim_{x\to 2}\frac{(x+3)}{(x^2-5x+4)} = \frac{5}{-2}$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^3-3x-2} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2+2x+1)}{(x+1)(x^2-x-2)} = \lim_{x\to -1}\frac{(x^2+2x+1)}{x^2-x-2} = \frac{0}{0} =$$

$$= \lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x+1)}{(x+1)(x-2)} = \lim_{x\to -1}\frac{(x+1)}{(x-2)} = \frac{0}{-3} = 0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3-3x}{2x^2-x} = \lim_{x\to 0}\frac{x(x^2-3)}{x(2x-1)} = \lim_{x\to 0}\frac{(x^2-3)}{(2x-1)} = \frac{-3}{-1} = 3$$

nota: cuando el límite tiende a 0 en vez de Ruffini sacamos factor común, pues la raíz es cero, y por tanto el factor es x.

2) *Cociente con funciones racionales:* Se resuelven multiplicando numerador y denominado por la expresión conjugada de la que lleva raíz y aplicando Ruffini:

Ejemplos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x}{\sqrt{x+4}-2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{(x^2-x)(\sqrt{x+4}+2)}{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{(x^2-x)(\sqrt{x+4}+2)}{x+4-4}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x^2-x)(\sqrt{x+4}+2)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-1)(\sqrt{x+4}+2)}{1}=-4$$

6.4. Resolución de indeterminaciones del tipo $\frac{k}{0}$

Este límite puede ser +∞, -∞ o no existir por ser los límites laterales diferentes (uno +∞ y otro -∞). Se calcula a partir de los límites laterales:

Ejemplo:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-1}{x-3}=\frac{k}{0}\quad\begin{cases}\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x^2-1}{x-3}=\dfrac{k}{0^+}=+\infty\\[2mm] \lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x^2-1}{x-3}=\dfrac{k}{0^-}=-\infty\end{cases}\quad \textit{no existe el límite}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-1}{(x-3)^2}=\frac{k}{0}\quad\begin{cases}\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x^2-1}{(x-3)^2}=\dfrac{k}{0^+}=+\infty\\[2mm] \lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x^2-1}{(x-3)^2}=\dfrac{k}{0^+}=+\infty\end{cases}\quad \lim_{x\to 3}\frac{x^2-1}{(x-3)^2}=+\infty$$

6.5. Resolución de indeterminaciones del tipo 0·∞

Se resuelven transformándolas en indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$.

***Ejemplo**:* $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3}{\sqrt{x^4-2}}\cdot(2x-3)=0\cdot\infty=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3(2x-3)}{\sqrt{x^4-2}}=\dfrac{-\infty}{\infty}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\frac{6x-9}{x^2}}{\sqrt{\frac{x^4-2}{x^4}}}=0$

6.6. Resolución de indeterminaciones del tipo ∞ - ∞

En estos límites domina la función que crezca tienda a ∞ más rápido (ver el final del apartado 6.2). Las indeterminaciones de este tipo con funciones irracionales que tiendan a +∞ igual de rápido se resuelven multiplicando y dividiendo la función por el conjugado:

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+5x}-(x+3)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+5x}-(x+3)\right)\left(\sqrt{x^2+5x}+(x+3)\right)}{\sqrt{x^2+5x}+(x+3)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+5x-(x^2+6x+9)}{\sqrt{x^2+5x}+(x+3)}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x-9}{\sqrt{x^2+5x}+(x+3)}=\lim_{x\to\infty}\frac{-1-\frac{9}{x}}{\sqrt{1+\frac{5}{x}}+1+\frac{3}{x}}=-\frac{1}{2}$$

6.7. Resolución de indeterminaciones del tipo 1^{∞}

Estas indeterminaciones están relacionadas con el número e. Se calculan de la siguiente forma:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=1\\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty\end{array}\right\} \lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{g(x)\cdot(f(x)-1)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\cdot(f(x)-1)}$$

Ejemplo: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-3x}{x^2+4}\right)^{x^2} = 1^{\infty} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{x^2\left(\frac{x^2-3x}{x^2+4}-1\right)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} x^2\frac{-3x-4}{x^2+4}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-3x^3-4x^2}{x^2+4}} = e^{-\infty} = 0$

6.8. Resolución de indeterminaciones del tipo 0^{∞} y ∞^0

Estas indeterminaciones se resuelven aplicando logaritmos y transformándolas de este forma (aplicando la regla del logaritmo $\log(a^b)=b\cdot\log(a)$) en los anteriores límites:

Veamos un ejemplo de cada tipo:

Ejemplo 1:

$$L=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^{x^2+2} = 0^{\infty} \longrightarrow \ln(L) = \lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{1}{x}\right)^{x^2+2} = \lim_{x\to\infty}(x^2+2)\cdot\ln\left(\frac{1}{x}\right) = \infty\cdot\ln(0^+) = \infty\cdot(-\infty) = -\infty$$

Como $\ln(L)=-\infty \rightarrow L=e^{-\infty}=0$

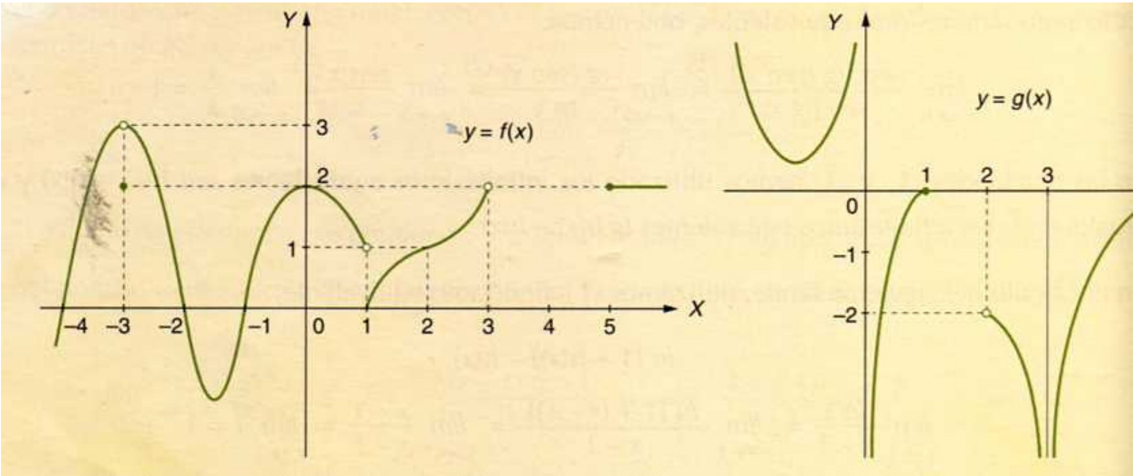
Ejemplo 2:

$$L=\lim_{x\to\infty}(x+1)^{\frac{1}{x}} = \infty^0 \longrightarrow \ln(L) = \lim_{x\to\infty}\ln(x+1)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x+1)}{x} = \frac{\infty}{\infty} = 0$$

Como $\ln(L)=0 \rightarrow L=e^0=1$

Ejercicios

Ejercicio 5. Calcula, en las siguientes funciones representadas, las siguientes cuestiones:



a) f(-3)=2, f(-2)=0, f(0)=2, f(4) no existe $4\notin Dom(f(x))$

b) $\lim\limits_{x\to -3} f(x)=3$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=no\ existe$, $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=no\ existe$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=no\ \ existe$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=1$

c) g(1)=0, g(2) no existe $2\notin Dom(f(x))$

d) $\lim\limits_{x\to 3} g(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)=-2$, $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)=0$, $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=+\infty$,

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)=no\ \ existe$, $\lim\limits_{x\to 2} g(x)=no\ \ existe$

Ejercicio 6: Calcular el límite:

$$\lim_{x\to 2} e^{\frac{1}{x-2}} = e^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{x-2}} = \begin{cases} e^{\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{1}{x-2}} = e^{-\infty} = 0 \\ e^{\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{1}{x-2}} = e^{\infty} = \infty \end{cases} \rightarrow \lim_{x\to 2} e^{\frac{1}{x-2}} = no\ existe$$

Ejercicio 7: Calcula cuánto debe valer "a" para que la siguiente función, f(x), sea convergente en x=1: $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x\leq 1 \\ 3\text{-}a\cdot x^2 & \text{si } x>1 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 3-a$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 2$. El límite $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ existe siempre que a=1.

Ejercicio 8: Siendo f(x)=$\sqrt{2x+3}$ calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+3}-3}{x-3} = \frac{\sqrt{11}-3}{1} = \sqrt{11}-3$$

Ejercicio 9: Calcular los siguientes límites

a) $\lim_{x\to+\infty} x^{-4}=0$, **b)** $\lim_{x\to-\infty} 4x^4=\infty$, **c)** $\lim_{x\to 0}\frac{3}{x^3}=\frac{3}{0}(ind)\begin{cases}\lim_{x\to 0^+}\frac{3}{x^3}=+\infty\\ \lim_{x\to 0^-}\frac{3}{x^3}=-\infty\end{cases}$ *no existe*

d) $\lim_{x\to 0}\frac{x^{-2}}{5}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{5x^2}=\frac{1}{0}(ind)\begin{cases}\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{5x^2}=+\infty\\ \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{5x^2}=+\infty\end{cases}=\infty$ **e)** $\lim_{x\to 0}\frac{x^5}{3}=0$, **f)** $\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x^5}=0$

g) $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{x^2+1}+\frac{3}{x+2}\right]=0+0=0$, **h)** $\lim_{x\to+\infty}3^{-x}=3^{-\infty}=0$ **i)** $\lim_{x\to-\infty}3^{-x}=3^{\infty}=\infty$

j) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x=\left(\frac{2}{3}\right)^{\infty}=0$ **k)** $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{\sqrt{x^2-2}}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^3}{x}}{\frac{\sqrt{x^2-2}}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}}=\frac{\infty}{1}=\infty$

l) $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^4-3x-1}{x^3+3}=-\infty$ **m)** $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-1}{x^3-1}=0$ **n)** $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-x+6}{x^2+3x+2}=-\infty$

o) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^3-1}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{2}{3}$ **p)** $\lim_{x\to -2}\frac{x^2-x-6}{x^3+3x^2+2x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-3)}{x(x+1)(x+2)}=\frac{-5}{2}$

q) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-4x+4}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-3)(x-2)}{(x-2)(x-2)}=\frac{-1}{0}\begin{cases}\lim_{x\to 2^-}\frac{x-3}{x-2}=\frac{-1}{0^-}=\infty\\ \lim_{x\to 2^+}\frac{x-3}{x-2}=\frac{-1}{0^+}=-\infty\end{cases}$ no existe

r) $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}+1)}{1}=2$

s) $\lim_{x\to 0}\frac{2-\sqrt{4-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(2-\sqrt{4-x}\right)\left(2+\sqrt{4-x}\right)}{x\cdot(2+\sqrt{4-x})}=\lim_{x\to 0}\frac{4-4+x}{x\cdot(2+\sqrt{4-x})}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2+\sqrt{4-x}}=\frac{1}{4}$

t) $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{1+x-(1-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{2}=1$

u) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2+6x-9}{x-3}=\frac{18}{0}=\begin{cases}\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2+6x-9}{x-3}=\frac{18}{0^+}=+\infty\\ \lim_{x\to 3^-}\frac{x^2+6x-9}{x-3}=\frac{18}{0^-}=-\infty\end{cases}$ no existe

v) $\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+6x-3}{2x^2-5x}=\frac{-3}{0}\begin{cases}\lim_{x\to 0^+}\frac{2x^2+6x-3}{2x^2-5x}=\frac{-3}{(0^+)^2-0^+}=\frac{-3}{(0^+)^2+0^-}=\frac{-3}{0^-}=\infty\\ \lim_{x\to 0^-}\frac{2x^2+6x-3}{2x^2-5x}=\frac{-3}{0^+}=-\infty\end{cases}$ no existe

w) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2})=\lim_{x\to\infty}\frac{x+2-(x-2)}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2})}=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2})}=\frac{4}{\infty}=0$

x) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x+1}{5x-1}\right)^{3x+2}=1^{\infty}=e^{\lim_{x\to\infty}(3x+2)\left(\frac{5x+1}{5x-1}-1\right)}=e^{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{6x+4}{5x-1}\right)}=e^{\frac{6}{5}}$

y) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^3+1}{x^2+1}\right)^{\frac{3}{x-1}}=1^{\infty}=e^{\lim_{x\to 1}\left(\frac{3}{x-1}\right)\left(\frac{x^3+1}{x^2+1}-1\right)}=e^{\lim_{x\to 1}\left(\frac{3}{x-1}\right)\left(\frac{x^2(x-1)}{x^2+1}\right)}=e^{\lim_{x\to 1}\frac{3x^2}{x^2+1}}=e^{\frac{3}{2}}$

z) $\lim_{x\to 2}(x-1)^{\frac{3}{x-2}}=1^{\infty}=e^{\lim_{x\to 2}\frac{3}{x-2}(x-2)}=e^{3}$

aa) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}+1}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}}{\sqrt{1}+\frac{1}{\sqrt{x}}}=1$

ab) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2-5}-(2x-3)\right)=\infty-\infty=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-5-(4x^2-12x+9)}{\left(\sqrt{4x^2-5}+(2x-3)\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{12x-14}{\left(\sqrt{4x^2-5}+(2x-3)\right)}=\frac{\infty}{\infty}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{12-\frac{14}{x}}{\sqrt{4-\frac{5}{x^2}}+(2-\frac{3}{x})}=\frac{12}{4}=3$

ac) $\lim_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{2x-4}}{x-2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{2}\sqrt{x-2}}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x-2}}=\frac{\sqrt{2}}{0^+}=+\infty$

Ejercicios PAU

Septiembre 2004. Prueba B. C-4. Determínese el valor del parámetro *a* para que se verifique $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+ax+1}-x)=2$ **.(1 punto)**

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+ax+1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+ax+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+ax+1}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+ax+1}+x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2+ax+1-x^2\right)}{\left(\sqrt{x^2+ax+1}+x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(ax+1)}{\left(\sqrt{x^2+ax+1}+x\right)}=\frac{a}{\sqrt{1}+1}=\frac{a}{2}=2\ \rightarrow\ a=4$$

TEMA 2 FUNCIONES. CONTINUIDAD.

1. Definición de Continuidad
2. Tipos de discontinuidades
3. Continuidad de las funciones elementales. Operaciones con funciones continuas
4. Teoremas de continuidad
   4.1. Teorema de conservación del signo
   4.2. Teorema de Bolzano
   4.3. Teorema de Darboux

Contexto con la P.A.U.

Los problemas que aparecen en el examen de la PAU relativos a este tema son de dos tipos:

1. Aplicaciones del teorema de Bolzano
2. Estudiar la continuidad de funciones

1) En muchos de los exámenes de la PAU aparecen cuestiones donde tenemos que aplicar el teorema de Bolzano. La forma de plantearnos el problema en el examen varía:

- Nos dan una ecuación y nos piden demostrar que existe al menos una solución (pueden darnos o no un intervalo) para tal ecuación
- Nos dan una función y nos piden demostrar que esa función toma un valor determinado (pueden darnos o no un intervalo)
- Nos dan dos funciones f(x) y g(x), nos piden demostrar que estas funciones se cortan (pueden darnos o no un intervalo), es decir f(x)=g(x).

Todos estos problemas se resuelven operando con las igualdades de forma que obtengamos una expresión de la forma F(x)=0, a dicha función, F(x), tendremos que aplicar Bolzano, bien en el intervalo que nos dan o buscar nosotros el intervalo.

En alguna de estas cuestiones se nos pide demostrar que la solución es única, para lo cual debemos probar que en ese intervalo la función es sólo creciente o decreciente, para lo cual necesitamos la derivada de la función y aplicar su relación con el crecimiento que veremos en el tema 4.

2) Otro problema típico de selectividad es el estudio de la continuidad y derivabilidad de una función (generalmente definida a trozos o un valor absoluto), o bien determinar el valor de unos parámetros para que la función sea continua o derivable. En este tema veremos cómo estudiar la continuidad de tales funciones, la derivabilidad se verá en el tema siguiente.

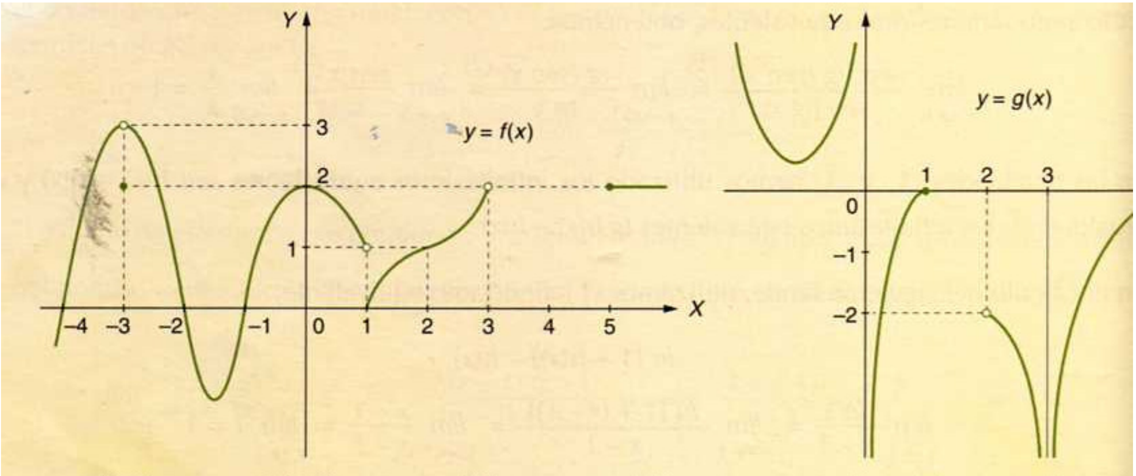
1. Definición de Continuidad

Veamos la definición de la continuidad:

Definición: Una función f(x) es continua en un punto x_0 si en dicho punto se cumplen las siguientes tres condiciones:

1. Existe $\lim_{x\to x_0} f(x)$
2. La función definida en x_0, es decir $x_0 \in$ Dom(f(x))
3. Los dos valores anteriores coinciden: $\lim_{x\to x_0} f(x)$=f(x_0).

Ejemplo:



1) Dom(f(x))=(-∞,3)∪[5,∞)

Continua en todos los puntos del dominio menos en

a) x=-3 → $\lim_{x\to -3} f(x)$ =3≠f(3)=2

b) x=1 → $\lim_{x\to 1} f(x)$ no existe pues los límites laterales son distintos

c) x=5 → $\lim_{x\to 5} f(x)$ no existe pues no existe el límite por la izquierda

2) Dom(g(x))=(-∞,0)∪(0,1]∪(2,3)∪(3,∞)

Continua en todos los puntos del dominio menos en

a) x=0 → $\lim_{x\to 0} g(x)$ no existe pues los límites laterales son distintos

b) x=1 → $\lim_{x\to 1} g(x)$ no existe pues no existe el límite por la derecha

c) x=3 → $\lim_{x\to 3} g(x) = -\infty$ pero 3∉ Dom(g(x))

Definición: Una función f(x) es continua en un intervalo (a,b) si en todos los puntos del intervalo es continua. Esto ocurre cuando al dibujar la gráfica "no levantamos el boli de la hoja para dibujarla"

En el ejemplo anterior f(x) continua en $(-\infty,-3)\cup(-3,1)\cup(1,3)\cup(5,\infty)$. La función g(x) en $(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(2,3)\cup(3,\infty)$.

2. Tipos de discontinuidades

***Definición**:* Una función f(x) es discontinua en un punto x_0 si no es continua en dicho punto.

Existen dos tipos de discontinuidades:

a) Discontinuidad evitable

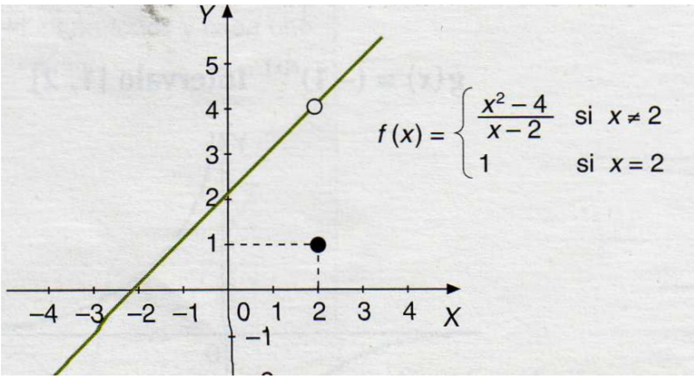
b) Discontinuidad no evitable

***<u>Discontinuidad evitable</u>*:** Una función f(x) presenta una discontinuidad evitable en el punto x_0 si se cumple las siguientes condiciones:

1. El límite de la función en x_0 existe,
2. El límite no coincide con $f(x_0)$ o bien la función no está definida en x_0 (es decir $x_0 \notin Dom(f(x))$

Ejemplos:

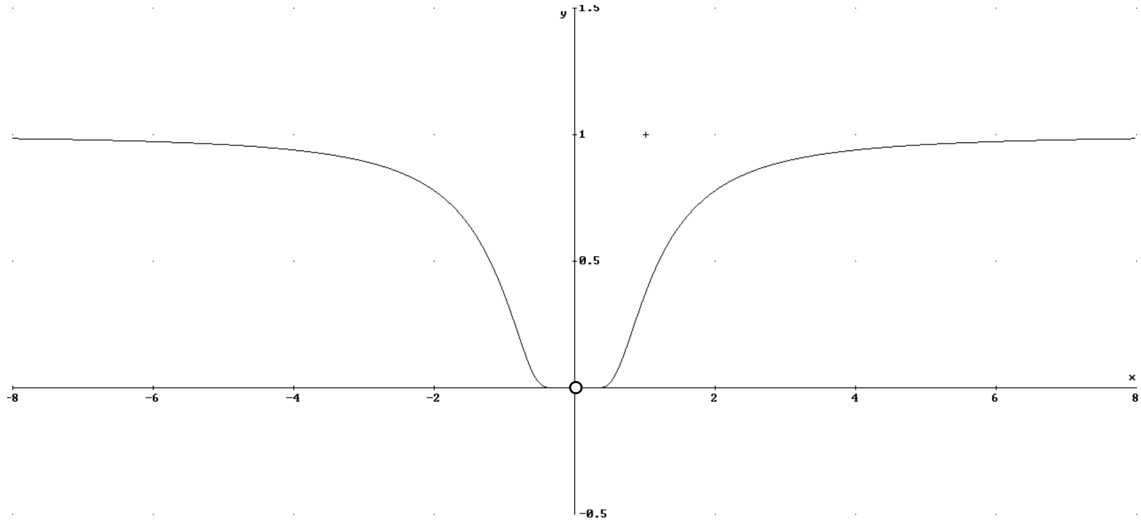
1)



$\lim_{x\to 2} f(x) = 4 \neq f(2) = 1$. Esta discontinuidad se evita redefiniendo la función en x=2, haciendo que en este punto la función tome el mismo valor que el límite es decir f(2)=4

Así la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & si \ \ x \neq 2 \\ 4 & si \ \ x = 2 \end{cases}$ = x+2 si es continua pues $\lim_{x\to 2} f(x) = 4 = f(2)$

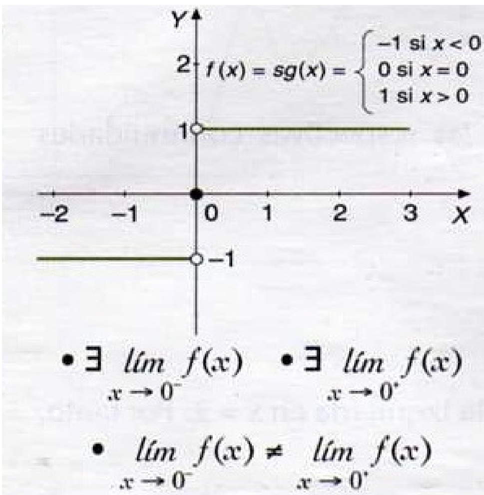
2) g(x)=$e^{-\frac{1}{x^2}}$



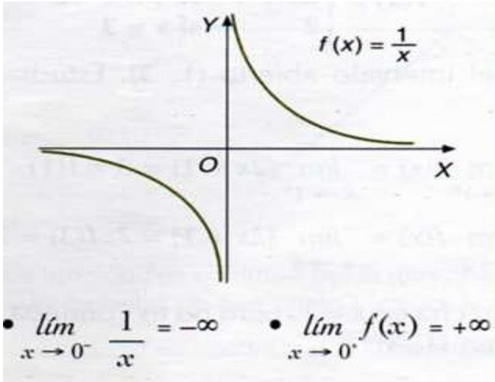
$\lim_{x\to 0} g(x)=0$ pero 0$\notin$Don(g(x)). Esta discontinuidad se evitaría si redefinimos la función tal que en x=0 esta valga lo mismo que el límite: g(x)=$\begin{cases} e^{-1/x^2} & si \;\; x\neq 0 \\ 0 & si \;\; x=0 \end{cases}$

<u>Discontinuidad no evitable</u>: Es aquella en la que el límite en el punto o no existe o es infinito. Pueden ser a su vez de 2 tipos:

1) *Salto finito en x_0*: los límites laterales no coinciden $\lim_{x\to x_0^+} f(x)\neq \lim_{x\to x_0^-} f(x)$



2) *Salto infinito en x_0:* cuando los dos límites laterales en x_0 o al menos uno de ellos es $+\infty$ o $-\infty$.



3. Continuidad de las funciones elementales. Operaciones con funciones continuas.

Las funciones elementales, por lo general, son continuas en todos los puntos del dominio. Las discontinuidades más importantes aparecen en funciones definidas a trozos (discontinuidades evitables o de salto finito), y en funciones con denominador en el valor donde se anula éste (discontinuidad de salto infinito).

Operaciones de funciones continuas: Sean f(x) y g(x) funciones continuas en x_0

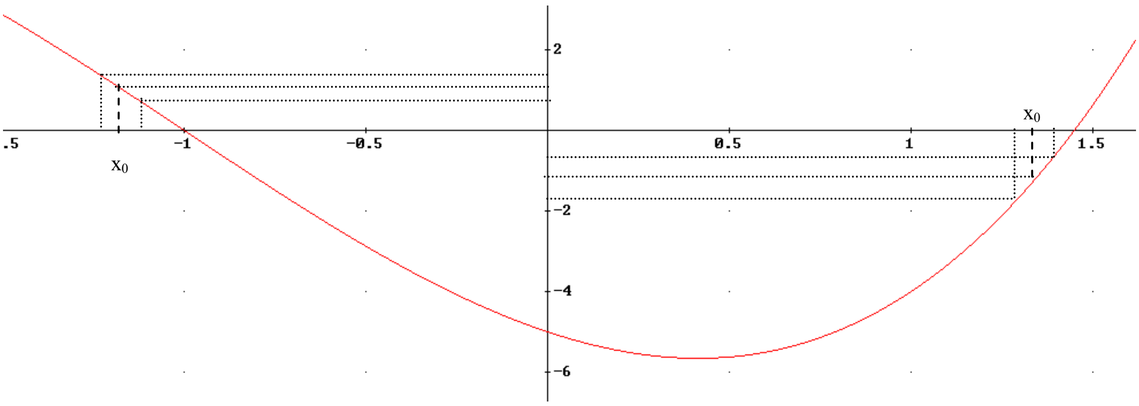
1) Las funciones suma y resta $(f \pm g)(x)$ son continua en x_0
2) La función producto $(f\cdot g)(x)$ es continua en x_0
3) La función división $(f/g)(x)$ es continua en x_0 si $g(x_0)\neq 0$
4) Si g(x) es continua en x_0 y f(x) es continua en $g(x_0)$ entonces la función compuesta $(f\circ g)(x)$ es continua en x_0.

4. Teoremas de Continuidad

4.1. Teorema de conservación del signo

Teorema de conservación del signo: si una función f(x) es continua en el punto x_0 de manera que $f(x_0)\neq 0$, se cumple que en un entorno del punto la función conserva el signo, Esto es si $f(x_0)>0$ se cumple que en un entorno de x_0 la función positiva, y si $f(x_0)<0$ entonces en un entorno de x_0 la función es negativa.

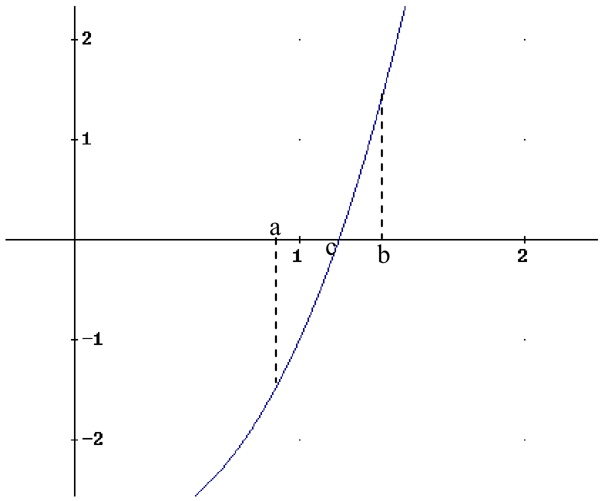
Veamos un ejemplo gráfico:

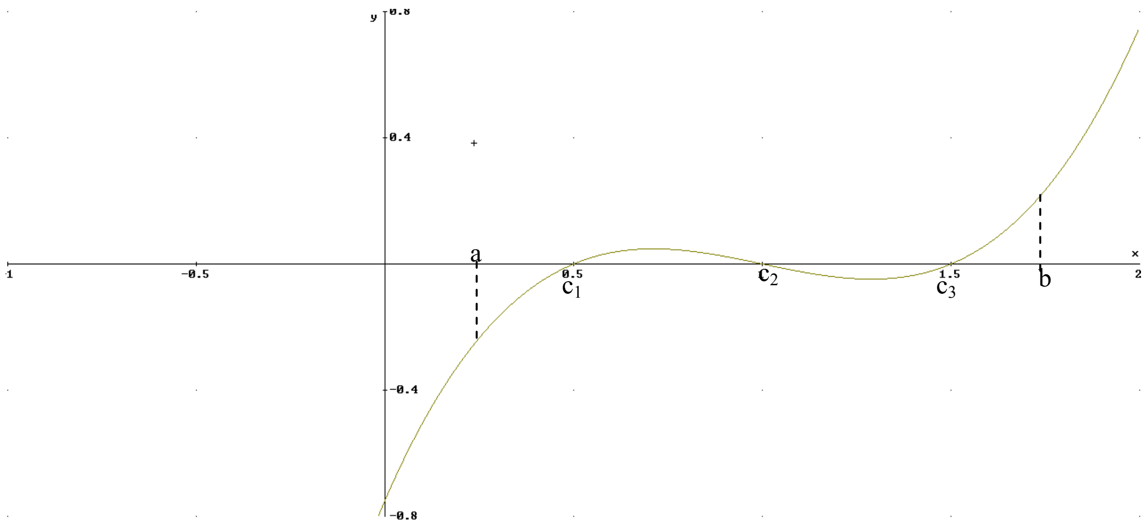


4.2 Teorema de Bolzano

Teorema de Bolzano: Si una función f(x) es continua en un intervalo [a,b] tal que f(a) y f(b) tienen distinto signo (f(a)·f(b)<0), entonces existe al menos un punto c∈(a,b) tal que f(c)=0.

Veámoslo gráficamente:





Vemos que el teorema de Bolzano nos asegura al menos una valor c tal que f(c)=0, pero como vemos puede ocurrir que este valor de x no sea único. Para asegurar que sólo es único debemos además de aplicar Bolzano ver que la función en el intervalo (a,b) es siempre creciente o decreciente

Ejercicio1: encontrar un intervalo donde la función f(x)=$\frac{x^5+x^4-1}{x-3}$ corte al eje x, es decir f(x_0)=0

Tenemos que la función es continua en R-{3}. Busquemos un intervalo, que no contenga x=3, tal que el signo de sus extremos sea diferente.

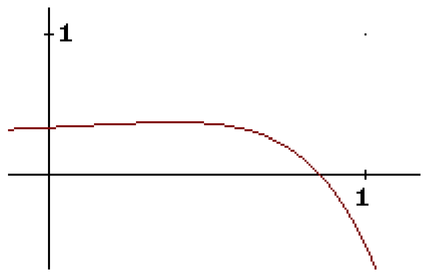
f(0)= 1/3>0 f(1)=-1/2<0

Así la función f(x) cumple Bolzano en [0,1]:

- es continua en este intervalo
- f(0)·f(1)<0

Luego ∃ c∈(0,1) : f(c)=0.

Veamos la gráfica de la función:

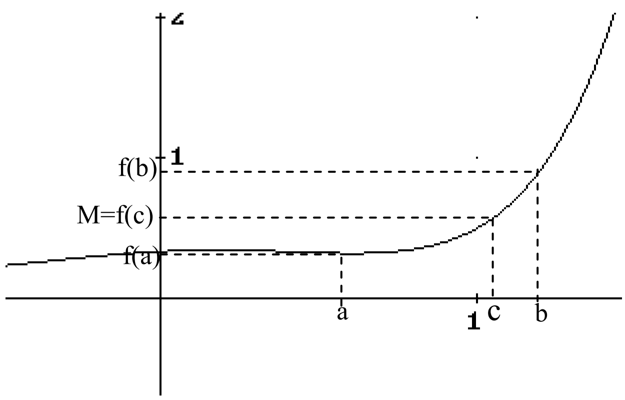


4.3 Teorema de Darboux

El teorema de Darboux es un corolario del teorema de Bolzano:

Teorema de Darboux: Si f(x) es una función continua en un intervalo [a,b], se cumple que para todo valor M∈[f(a), f(b)] existe c∈(a,b) tal que f(c)=M.

Demostración: sea g(x)=f(x)-M, esta función cumple Bolzano en [a,b]: 1) es continua en [a,b] al serlo f(x) y 2) g(a)·g(b)<0, y por lo tanto, existe al menos un valor c: g(c)=f(c)-M=0→ f(c)=M.



Ejercicio 2: Decir un intervalo de x donde la función $f(x)=x^2-x+3$ valga 5.

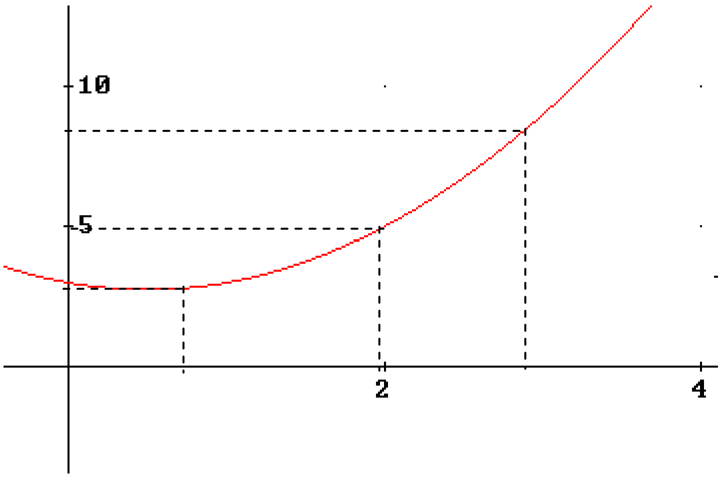
Esta función es continua en R, luego podemos aplicar el teorema de Darboux. Tenemos que buscar un intervalo [a,b] tal que 5 esté comprendido entre f(a) y f(b). Sea [1,3] se cumple $f(1)=3$ y $f(3)=9$ luego como $5\in(f(1),f(3)) \rightarrow$ existe $c\in(1,3)$ tal que $f(c)=5$.

También podemos hacer este problema aplicando Bolzano:

Si $f(x)=5$ entonces $x^2-x+3=5 \rightarrow x^2-x-2=0$. Llamando $g(x)=x^2-x-2$, veamos que cumple Bolzano en [1,3]:

- Es continua en este intervalo
- $g(1)=-2$, $g(3)=4$, luego $g(1)\cdot g(3)<0$

Existe $c\in(1,3)$ donde $g(c)=0$, y por tanto $f(c)-5=0$, y por tanto $f(c)=5$



Ejercicios

Ejercicio 3: Estudia la continuidad de las siguientes funciones

a) f(x)=$\begin{cases} 5-\dfrac{|x|}{x} & si \ \ x\neq 0 \\ 5 & si \ \ x=0 \end{cases}$

El valor absoluto puede dividirse en dos partes: cuando lo que está dentro del valor es negativo este cambia de signo, y si es positivo no se cambia.

f(x)= $=\begin{cases} 5-\dfrac{-x}{x} & si \ x<0 \\ 5 & si \ \ x=0 \\ 5-\dfrac{x}{x} & si \ \ x>0 \end{cases} = \begin{cases} 6 & si \ \ x<0 \\ 5 & si \ \ x=0 \\ 4 & si \ \ x>0 \end{cases}$

$\lim_{x\to o} f(x)=\begin{cases} \lim_{x\to o^+} f(x)=4 \\ \lim_{x\to o^-} f(x)=6 \end{cases}$ *no existe* , discontinuidad de salto finito

f(x) es por tanto continua en R-{0}

b) g(x)= $\begin{cases} x^2-1 & si \ \ x\leq 2 \\ x+1 & si \ \ x>2 \end{cases}$

Es una función definida a trozos, donde cada uno de ellos es un polinomio, que son continuos en R; El único punto que tenemos que estudiar la continuidad es en x=2, donde g(x) cambia de expresión analítica:

$\lim_{x\to 2} g(x)=\begin{cases} \lim_{x\to 2^+} x+1=3 \\ \lim_{x\to 2^-} x^2-1=3 \end{cases}=3$ =g(2).

Luego g(x) continua en R.

c) h(x)= $\begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & si \ \ x\neq 3 \\ 6 & si \ \ x=3 \end{cases}$

Es una función definida a trozos, uno de ellos es una fracción algebraica, así que en los puntos donde se anule el denominador puede no ser continua. Como coincide el punto donde se anula el denominador con el cambio de expresión analítica (x=3) sólo hay que estudiar la continuidad en este punto.

$\lim_{x\to 3} h(x)=\lim_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=\dfrac{0}{0}=\lim_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x+3)}{(x-3)}=\lim_{x\to 3}(x+3)=6$=f(3)=6

La función h(x) es continua en R

d) l(x)= $\begin{cases} 2x-1 & si \;\; x>-1 \\ 3 & si \;\; x\leq -1 \end{cases}$

Es una función definida a trozos, en cada uno de ello la función es un polinomio, así que el único punto donde hay que estudiar la continuidad es en x=-1, allí donde cambia de expresión analítica:

$\lim\limits_{x\to -1} l(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} l(x) = 3 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} l(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} 2x-1 = -3 \end{cases} \to No\, existe$, luego no es continua en x=-1, de salto finito.

De esta forma l(x) continua en R-{-1}.

Ejercicio 4: Calcula el valor de k para que las siguientes funciones sean continuas en todo R

a) f(x)= $\begin{cases} sen(3x) & si \;\; x\leq \pi/2 \\ 2k+\cos(2x) & si \;\; x>\pi/2 \end{cases}$

Es una función definida a trozos; en cada uno de ellos las funciones son expresiones trigonométricas, continuas en R. Luego el único punto donde puede existir discontinuidad es en x=π/2, allí donde la función cambia de expresión analítica. Veamos si f(x) es continua en π/2

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} f(x) = \lim\limits_{x\to \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} 2k+\cos(2x) = 2k-1 \\ \lim\limits_{x\to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x) = \lim\limits_{x\to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} sen(3x) = -1 \end{cases}$$

El límite existe si los límites laterales son iguales, esto ocurre si k=0. Además cuando k=0 se cumple f(π/2)=-1,y por tanto la función es continua en x=π/2

De esta forma la función es continua en R si k=0

b) g(x)= $\begin{cases} \dfrac{x+2}{x-2} & si \;\; x\neq 2 \\ k & si \;\; x=2 \end{cases}$

Es una función definida a trozos, en uno de ellos la función es una fracción algebraica que puede no ser continua en los puntos donde se anual el denominador (x=2). Como este punto coincide con el punto donde la función cambia de expresión analítica, es el único punto donde tenemos que estudiar la continuidad de g(x).

$\lim\limits_{x\to 2} g(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+2}{x-2} = \dfrac{4}{0} \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x+2}{x-2} = \dfrac{4}{0^-} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x+2}{x-2} = \dfrac{4}{0^+} = \infty \end{cases}$ el límite no existe, así que independientemente del valor de k la función g(x) no es continua en x=2

c) k(x)= $\begin{cases} 1+|x| & si\ x<0 \\ k & si\ \ x=0 \\ \frac{3}{2}x+1 & si\ \ x>0 \end{cases}$

Como |x| está definido para valores negativos (x<0), es equivalente a sustituir |x| por –x:

k(x)= $\begin{cases} 1-x & si\ x<0 \\ k & si\ \ x=0 \\ \frac{3}{2}x+1 & si\ \ x>0 \end{cases}$

Es una función definida a trozos; en cada uno de ellos las funciones son polinomios, y estos son continuos en R. El único punto donde puede presentar discontinuidad es en x=0, allí donde la función cambia de expresión analítica.

$$\lim_{x\to 0} k(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 0^-} 1+|x|=1 \\ \lim_{x\to 0^+} \frac{3}{2}x+1=1 \end{cases} =1$$

Para que sea continua ha de cumplir que k(0)= $\lim_{x\to 0} k(x)$. Por tanto k(x) será continua si k(0)=k=1 → k=1

e) $m(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+2}{x-2} & si\ x>3 \\ \dfrac{x+3}{x-4}+k\, si\, x\le 3 \end{cases}$

Es una función definida a trozos, en cada uno de ellos las funciones son fracciones algebraicas, que no son continuas en los puntos donde se anulan el denominador. En la primera de ellas ocurre en x=2, pero como esa expresión analítica sólo existe para x>3, nuca tomará ese valor. La segunda se anula para x=4, pero como la expresión definida para x≤3 nunca tomará ese valor. Así que sólo hay que estudiar la continuidad en x=3, donde la función cambia de expresión analítica:

$$\lim_{x\to 3} m(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 3^-} \dfrac{x+3}{x-4}+k=-6+k \\ \lim_{x\to 3^+} \dfrac{x^2+2}{x-2}=\dfrac{11}{1}=11 \end{cases}$$

El límite existe si k=17. Además si k=17 m(3)=11 y por tanto continua en 3 y en todo R.

Ejercicio 5: Hallar el dominio y la continuidad de las siguientes funciones:

a) f(x)=$|x^2$-6x+5|

El dominio de la función f(x)=$|x^2$-6x+5| y su continuidad es todo R, ya que el valor absoluto de f(x) es continuo en los mismos puntos en los que sea continua la función x^2-6x+5, que es un polinomio.

b) $g(x)=\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}-2\sqrt{2}$.

El dominio de una raíz cuadrada son todos los puntos donde el radicando es positivo o cero. Como g(x) está definida a partir de suma la de tres funciones, el dominio será la intersección de los tres dominios. Veamos uno a uno por separado:

$\sqrt{4+x}$ Dom=[-4,∞)

$\sqrt{4-x}$ Dom=(-∞,4]

$2\sqrt{2}$ Dom=R

Dom(g(x))= [-4,∞)∩(-∞,4]∩R=[-4,4]

En los puntos del dominio la función es continua menos en -4 y 4 De esta manera g(x) continua en (-4,4)

En -4 no es continua pues $\lim_{x\to -4^-} g(x) = no\ existe$

En 4 no es continua pues $\lim_{x\to 4^+} g(x) = no\ existe$

Ejercicio 6: Determinar los parámetros a y b para que la siguiente función sea continua en todo R

$$f(x)=\begin{cases} xe^{x^2} & si\ x\le 0 \\ ax+b & si\ 0<x\le 1 \\ 1+x\ln(x) & si\ x\ge 1 \end{cases}$$

Es una función definida a trozos, y en cada trozo la función es continua en su dominio de definición, ya que el único que no es continua en todo R es $1+x\ln(x)$, pero como está definida para x≥1 en este intervalo es continua.

Tendremos que ver la continuidad en x=0 y x=1 para asegurar que la función f(x) continua en todo R.

· Continuidad en x=0

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\begin{cases} \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} xe^{x^2}=0\cdot 1=0 \\ \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} ax+b=b \end{cases}$$

El límite existe si b=0, además para este valor de b f(0)=0 y por tanto la función será continua

· Continuidad en x=1

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\begin{cases} \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(1+x\ln(x))=1+1\cdot 0=1 \\ \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} ax=a \end{cases}$$

El límite existe si a=1, además para este valor f(a)=1 y por tanto la función será continua

Si a=1 y b=0 la función será continua en R

Ejercicio 7: Sean las funciones $f(x)=\begin{cases}1 & si\ \ x\in[0,1)\\ x & si\ x\in[1,\infty)\end{cases}$ **y** $g(x)=\begin{cases}x+1 & si\ x\in[0,2)\\ x & si\ \ x\in[\ 2,\infty)\end{cases}$ **estudiar la continuidad de f+g, f·g, f/g**

Estudiemos la continuidad de las funciones f(x) y g(x)

Fácilmente se puede comprobar que f(x) es continua en todo el dominio de definición $[0,\infty)$, y g(x) continua en todos los puntos de definición menos en x=2, donde los límites laterales no coinciden, es decir en $[0,2)\cup(2,\infty)$.

a) (f+g)(x) por las propiedades de continuidad será continua en $[0,\infty)\cap(\ [0,2)\cup(2,\infty))=$

$=[0,2)\cup(2,\infty)$

b) (f·g)(x) por las propiedades de continuidad será continua en $[0,\infty)\cap(\ [0,2)\cup(2,\infty))=$

$=[0,2)\cup(2,\infty)$

c) (f/g)(x) por las propiedades de continuidad será continua en $[0,\infty)\cap(\ [0,2)\cup(2,\infty))=$

$=[0,2)\cup(2,\infty)$, ya que g(x) no se anula para ningún valor de x

Ejercicio 8: Hallar y clasificar las discontinuidades de las siguientes funciones

a) $\mathbf{f(x)}=\dfrac{x^2-4}{x^2-2x}$

Será continua en R menos en los puntos donde se anula el denominador es decir x=0 y x=2, por tanto $0,2\notin$ Dom(f(x)). Veamos el límite en estos puntos para discernir el tipo de discontinuidad.

· En x=0

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-4}{x^2-2x}=\frac{-4}{0}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2-4}{x(x-2)}=\dfrac{-4}{-2\cdot 0^+}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2-4}{x(x-2)}=\dfrac{-4}{-2\cdot 0^-}=-\infty\end{cases}\rightarrow salto\ \inf inito\ en\ x=0$$

· En x=2

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-2x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{x(x-2)}=\frac{4}{2}=2\rightarrow evitable$$

b) $g(x)=\begin{cases}2-x & si\ x\le 0\\ e^{-x} & si\ \ x>0\end{cases}$

Tanto 2-x como e^{-x} son continuas para todo R, luego la única posible discontinuidad puede ocurrir en x=0.

$$\lim_{x\to 0}g(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{-x}=1\\ \lim\limits_{x\to 0^-}g(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}2-x=2\end{cases}$$ Discontinuidad de salto finito.

c) $f(x)=\begin{cases} 2 \ \ si \ x=0 \\ e^{-x} \quad si \ \ x\neq 0 \end{cases}$

$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} e^{-x}=1\neq f(0)=2$ → Salto finito

Ejercicio9: Estudiar la continuidad de f(x)

$$f(x)=\begin{cases} \ln(-x) & si \quad x<-2 \\ sen(\pi x) & si \quad -2\leq x\leq 2 \\ 0 & si \quad 2<x<4 \\ x^2-12 & si \quad x\geq 4 \end{cases}$$

Función definida a trozos y en cada uno de ellos la función es continua en su dominio de definición, (ln(-x) es continua si x<0). Veamos la continuidad en los puntos donde cambia la expresión analítica:

En x=-2 → $\lim_{x\to -2} f(x)=\begin{cases} \lim_{x\to -2^+} f(x)=sen(-2\pi)=0 \\ \lim_{x\to -2^-} f(x)=\ln(2) \end{cases}$ Discontinua de salto finito

En x=2→ $\lim_{x\to 2} f(x)=\begin{cases} \lim_{x\to 2^+} f(x)=0 \\ \lim_{x\to 2^-} f(x)=sen(2\pi)=0 \end{cases}$ Continua en x=2

En x=4→ $\lim_{x\to 4} f(x)=\begin{cases} \lim_{x\to 4^+} f(x)=16-12=4 \\ \lim_{x\to 4^-} f(x)=0 \end{cases}$ Discontinua de salto finito

Ejercicio 10: Demuestra:

a) x=xs·en(x)+cos(x) tiene solución en [-π,π]:

Definimos f(x)= x·sen(x)+cos(x)-x tal que

1. Es continua en R y por tanto en [-π,π].
2. f(-π)=-1+π>0, f(π)=0-1-π<0.

De esta forma cumple Bolzano → ∃c∈(-π,π): f(c)=0, es decir, la ecuación tiene solución en este entorno.

b) 3·sen(x)=e^{-x}cos(x) en algún valor de x.

Definimos f(x)=e^{-x}cos(x)-3sen(x) tal que

1. es continua en R.
2. Tomamos el intervalo [0,π/2] → f(0)=1>0 f(π/2)=0-3<0.

Cumple Bolzano→ ∃c∈(0,π/2): f(c)=0, es decir la ecuación solución en este entorno.

Ejercicio 11: La función cotg(x) tiene distintos signos en los extremos del intervalo [3π/4, 5π/4] y sin embargo no corta el eje x. ¿Entonces contradice esto Bolzano?

No contradice Bolzano pues cotag(x) no es continua en π∈[3π/4, 5π/4]

Ejercicio 12: Demostrar $f(x)=x^3-8x+2$ corta al eje OX en (0,2). ¿se puede decir lo mismo de $\frac{2x-3}{x-1}$?

f(x) cumple:

1. Continua en (0,2)
2. f(0)=2>0, f(2)=-6<0

Luego cumple Bolzano → $\exists c\in(0,2)$: f(c)=0

No podemos decir lo mismo de $\dfrac{2x-3}{x-1}$, pues en $x=1\in(0,2)$ no es continua.

Ejercicio 13: Sea f(x) una función que cumple f(-2)<0 y f(0)>0 ¿Es siempre cierto que existe un valor c en (-2,0) tal que f(c)=0

Si f(x) es continua en el intervalo [-2,0] podemos asegurar que se cumple dicha afirmación (por el teorema de Bolzano). Sino no es así no podemos asegurar tal afirmación. Lo cual no contradice que alguna función discontinua en donde $f(a)\cdot f(b)<0$ esta corte al eje x en (a,b)

Ejercicio 14: Estudiar el dominio y discontinuidad de $f(x)=\ln((x+2)/x^2)$

Pasos:

1) Dominio de $(x+2)/x^2$ → R-{0}

2) Al ser un logaritmo→ $(x+2)/x^2>0$: Como x^2 siempre positivo tenemos que ver cuándo (x+2)>0, esto ocurre en el intervalo $(-2,\infty)$

De esta forma el dominio será $(-2,\infty)$ menos el punto x=0→$Dom(f(x))=(-2,0)\cup(0,\infty)$.

En todos los puntos del dominio la función es continua pues, el límite existe y coincide con el valor de la función en el punto.

Ejercicio 15: Hallar a y b para que f(x) cumpla Bolzano en $[-\pi,\pi]$. Hallar c que cumple Bolzano

$$f(x)=\begin{cases}\cos(x) & si\ \ -\pi\leq x\leq 0\\ a+x^2 & si\ \ 0<x<1\\ \dfrac{b}{x} & si\ 1\leq x\leq\pi\end{cases}$$

Para que cumpla Bolzano tenemos que obligar a la función a que sea continua en $[-\pi,\pi]$, y por tanto en x=0 y x=1

En x=0 : $\lim_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 0^-} f(x) = \cos(0) = 1 \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = a + 0 = a \end{cases}$ → a=1

En x=1: $\lim_{x\to 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 1^-} f(x) = 1^2 + 1 = 2 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = \frac{b}{1} = b \end{cases}$ → b=2

Si a=1 y b=2 la función es continua en [-π,π], veamos ahora que cumple la segunda condición:

f(-π)=-1<0

f(π)=2/π>0

Luego cumple Bolzano ∃c∈(-π,π): f(c)=0

Busquemos el valor c:

a) Veamos si c∈[-π,0]→ cos(c)=0 → c=-π/2

b) Veamos si c∈(0,1)→1+x^2=0 no solución

c) Veamos si c∈[1,π]→2/x=0 no solución

Ejercicio 16: Demuestra que la ecuación π^x =e tiene solución en (0,1), ¿lo cumple también ϕ^x=e?

a) π^x=e solución en (0,1)→ definimos f(x)=π^x-e, se cumple:

a) Continua en [0,1]

b) Además f(0)=1-e<0 y f(1)=π-e>0

Al cumplir Bolzano ∃c: (0,1): f(c)=0, y por tanto la ecuación tiene solución en (0,1)

b) ϕ^x=e solución en (0,1) → definimos f(x)= ϕ^x-e, se cumple:

a) continua en [0,1]

b) pero f(0)=1-e<0 y f(1)= ϕ-e<0

Luego no cumple Bolzano y no podemos asegurar que la ecuación tenga solución.

Ejercicios de la P.A.U.

Junio de 2004.Prueba A

C-2: Demuéstrese que las gráficas de las funciones $f(x)=e^x$ y $g(x)=\frac{1}{x}$ se cortan en un punto si $x>0$

Si se cortan las dos funciones cumplen entonces que f(x)=g(x).

Definimos $h(x)=f(x)-g(x)=e^x-1/x$. Si h(x)=0 entonces f(x)=g(x) y las funciones se cortarán.

Veamos que h(x) cumple Bolzano, y por tanto h(x)=0:

a) Es continua para x>0 (no se anula el denominador).
b) Busquemos un intervalo donde cumpla Bolzano, por ejemplo [0.1,1]: $h(0.1)=e^{0.1}-1<0$; $h(1)=e-1>0$

Luego cumple Bolzano $\exists c\in(0.1,1)$: h(c)=0, y por tanto f(c)=g(c), cortándose en c estas dos funciones

Junio de 2005. Prueba B

C-3.- Estúdiese, según los valores de los números reales α y β, la continuidad de la función *f* definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+\alpha}{1+e^{1/x}} & \text{si } x\neq 0\\ \beta & \text{si } x=0\end{cases}.$$

La función $\dfrac{x+\alpha}{1+e^{1/x}}$ es continua en R-{0}, pues $1+e^{1/x}$ nunca se anula. El único problema está en x=0, al anularse el denominador del exponente. Por otro lado en x=0 la función cambia de expresión analítica, luego es el único punto donde tenemos que estudiar la continuidad:

Continua en x=0 si $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=\beta$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x+\alpha}{1+e^{1/x}}=\frac{\alpha}{1+e^{1/0}}=(ind)=\begin{cases}\lim_{x\to 0^+}\dfrac{x+\alpha}{1+e^{1/x}}=\dfrac{\alpha}{1+e^{1/0^+}}=\dfrac{\alpha}{\infty}=0\\ \lim_{x\to 0^-}\dfrac{x+\alpha}{1+e^{1/x}}=\dfrac{\alpha}{1+e^{1/0^-}}=\dfrac{\alpha}{1}\end{cases}$$

Para que exista el límite $\alpha=0$. Si $\alpha=0$ $\lim_{x\to 0} f(x)=0$.

Por otro lado para ser continua $f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)$ → $\beta=0$

Luego si $\beta=0$ y $\alpha=0$ la función será continua en x=0, y por lo tanto en todo R.

Septiembre de 2006. Prueba A

PR2. b) Pruébese que la ecuación $3x = e^x$ tiene alguna solución en $(-\infty,1]$

Definamos la función $f(x)=3x-e^x$; si demostramos que $f(x)=0$ en $(-\infty,1]$, entonces se cumplirá la ecuación. Para esto apliquemos Bolzano:

a) f(x) es continua en R y por tanto continua en todo el intervalo
b) busquemos el intervalo [a,b] comprendido en $(-\infty,1]$ y tal que $f(a)\cdot f(b)<0$. Por ejemplo [0.5, 1]: $f(1)=3-e<0$, $f(0.5)=1.5-e^{0.5}>0$.

Así f(x) cumplirá Bolzano en [0.5, 1], y por lo tanto, existe al menos un valor $c\in(0.5,1)$, luego $c\in(-\infty,1]$ tal que $f(c)=0$, y por tanto se cumple la ecuación.

Junio de 2007.Prueba A

C-4. Demostrar que las curva f(x)=sen(x) y g(x)=1/x se cortan en algún punto del intervalo $(2\pi, 5\pi/2)$

Si f(x) y g(x) se cortan en algún punto se cumple que f(x)=g(x), es decir sen(x)=1/x . Para poder aplicar Bolzano pasamos 1/x al otro miembro → $\underbrace{sen(x)-\frac{1}{x}}_{h(x)}=0$. De esta forma resolver la ecuación es lo mismo que ver que h(x)=0.

Apliquemos Bolzano a h(x) en el intervalo marcado $(2\pi,5\pi/2)$:

a) Continua en $[2\pi,5\pi/2]$, ya que h(x) es continua en todos los reales menos en el 0, y $0\notin[2\pi,5\pi/2]$.

b) $h(2\pi)=sen(2\pi)-1/(2\pi)=-1/(2\pi)<0$, $h(5\pi/2)=sen(5\pi/2)-1/(5\pi/2)=1-2/(5\pi)>0$

Luego cumple Bolzano, y por lo tanto, existe un punto $c\in(2\pi,5\pi/2)$ tal que h(c)=0, y por ello en este punto se cumple la igualdad f(c)=g(c), cortándose las dos curvas

Junio de 2007.Prueba B

PR-2 (b) Demostrar que existe algún número real c tal que $c+e^{-c} = 4$.

Si modificamos la igualdad → $\underbrace{x+e^{-x}-4}_{f(x)}=0$ tendremos que la ecuación solución si existe un punto c tal que f(x)=0,es decir si podemos aplica Bolzano:

a) Continua en R, luego podemos tomar cualquier intervalo para aplicar Bolzano

b) Busquemos el intervalo $f(0)=1-4<0$. Si tomamos x=4, como e^{-x} siempre es positivo entonces $f(4)=4+e^{-4}-4>0$.

Luego cumple Bolzano en [0.4], y por lo tanto, existe $c\in(0,4)$ tal que f(c)=0, y entonces $c+e^{-c}=4$ solución en (0,4).

C1. Hallar a y b para que f(x) continua en todo R

$$f(x)=\begin{cases} a+x\ln(x) & si\ \ x>0 \\ b & si\ \ x=0 \\ \dfrac{sen(\pi x)}{x} & si\ \ x<0 \end{cases}$$

La función x·ln(x) es continua si x>0 y $\frac{sen(\pi x)}{x}$ es continua en x<0, pues no toma el valor x=0. De esta forma, en cada trozo las funciones son continuas en los dominios de definición. Por esta razón sólo hay que estudiar la continuidad en x=0

Continuidad en x=0. Será continua si $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$

$\lim_{x\to 0} f(x)=\begin{cases} \lim_{x\to 0^-} f(x)=(*)=\pi \\ \lim_{x\to 0^+} f(x)=(*)=a \end{cases}$ → el límite existe si a=π y valdrá $\lim_{x\to 0} f(x)$=π

(*) Calcularemos estos límites en el tema 4 (Teorema de L'Hopital)

f(0)=b, como $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$ →b=π

De esta forma si a=π y b=π la función es continua en x=0, y por lo tanto en todo R.

TEMA 3 FUNCIONES.DERIVABILIDAD.

1. Tasa de variación media. Derivada en un punto. Interpretación
   1.1. Tasa de variación media
   1.2. Definición de derivada en un punto
   1.3. Interpretación geométrica de la derivada
2. Continuidad y derivabilidad.
3. Función derivada. Derivadas de orden superior.
   3.1. Función derivada
   3.2. Derivadas de orden superior
4. Derivabilidad de las funciones elementales. Operaciones con derivadas
   4.1. Derivadas de la función elementales
   4.2. Operaciones con derivadas
   4.3. Derivación logarítmica

Contexto con la P.A.U.

El saber derivar es básico a la hora de realizar el examen de la PAU. En este tema se recuerda como se deriva y se realizan diferentes ejercicios, pero en caso de resultar insuficientes se recomienda que se repase la derivada en cualquier libro de 1º de Bachiller.

En el examen de selectividad no suele haber ningún ejercicio concreto de derivar una función, si bien la derivada aparece en multitud de ocasiones. Algunos ejemplos de ejercicios en los que hay que saber derivar son en los problemas de representación y estudio de funciones, los de estudiar la continuidad y derivabilidad de una función, los límites que se calculan con L'Hopital…

Problemas más concretos en el examen de la PAU relacionados con el tema son los siguientes:

- Estudio de la continuidad y derivabilidad de una función, o cálculo de algún parámetro para que la función sea continua o derivable.
- Estudiar la derivabilidad de una función en un punto por la definición de derivada.
- Cálculo de rectas tangentes y/o normales a una función en un punto.

En este tema abordaremos estos problemas para que el alumno se encuentre familiarizado con ellos el día del examen.

1. Tasa de Variación media. Derivada en un punto. Interpretación

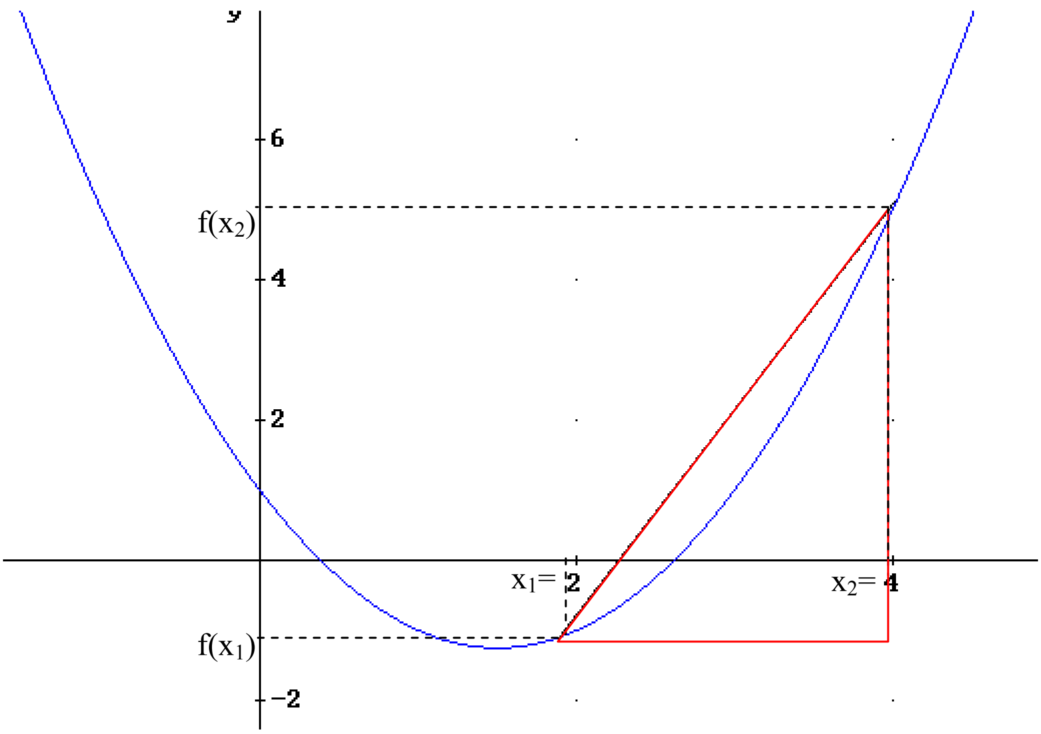
1.1 Tasa de variación Media

Definición: se llama tasa de variación media de una función f(x) entre los valores x_1 y x_2 al cociente entre el incremento que experimenta la variable dependiente "y", y la variable independiente "x":

$$T_{vm}(x_1,x_2,f(x))=\left[\frac{\Delta f}{\Delta x}\right]_{x_1,x_2}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

Interpretemos gráficamente su significado:

Ejemplo*:* $f(x)=x^2-3x+1$



Veamos la tasa de variación media entre 2y 4: $\left[\frac{\Delta f}{\Delta x}\right]_{2,4}=\frac{f(4)-f(2)}{4-2}=\frac{5-(-1)}{4-2}=3$

Para interpretar $\left[\frac{\Delta f}{\Delta x}\right]_{x_1,x_2}$ fijémonos en el triángulo rectángulo rojo de la imagen, donde los catetos son $(f(x_2)-f(x_1))$ y (x_2-x_1). De esta forma $\left[\frac{\Delta f}{\Delta x}\right]_{x_1,x_2}$ es el cociente de los dos catetos, y así $\left[\frac{\Delta f}{\Delta x}\right]_{x_1,x_2}$ es la tangente del ángulo que forma la recta que une los puntos $(x_1,f(x_1))$ y $(x_2,f(x_2))$ con el eje x, y por tanto $\left[\frac{\Delta f}{\Delta x}\right]_{x_1,x_2}$ es la pendiente de dicha recta

1.2 Definición de derivada de una función en un punto

Definición: la derivada de una función f(x) en el punto x_0, se denota como $f'(x_0)$, es la tasa de variación instantánea, es decir:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Generalmente suele ser más fácil calcular esta derivada a partir de la segunda igualdad de la definición.

Una *función es derivable en un punto* cuando el límite existe, aunque este sea ∞ o -∞.

Ejemplos:

a) $f(x)=x^2+1$ en x=2

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left((2+h)^2+1\right)-5}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+4h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h+4}{1}=4$$

La función f(x) es derivable en x=2 y f'(2)=4

b) $f(x)=|x-1|=\begin{cases} x-1 & si\ x>1 \\ -x+1 & si\ x\leq 1\end{cases}$ en x=1

$$f'(1^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{(1+h-1)-0}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}=1$$

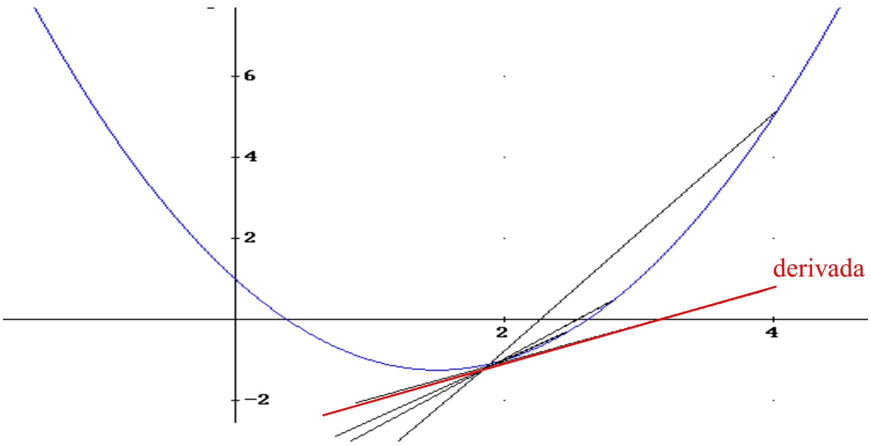
$$f'(1^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-(1+h)+1-0}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}=-1$$

No existe el límite por tanto la función f(x) no es derivable en x=1.

Nota: las funciones *valor absoluto* no son derivables en los puntos de x donde se anulan. En estos puntos las derivadas laterales son de distinto signo.

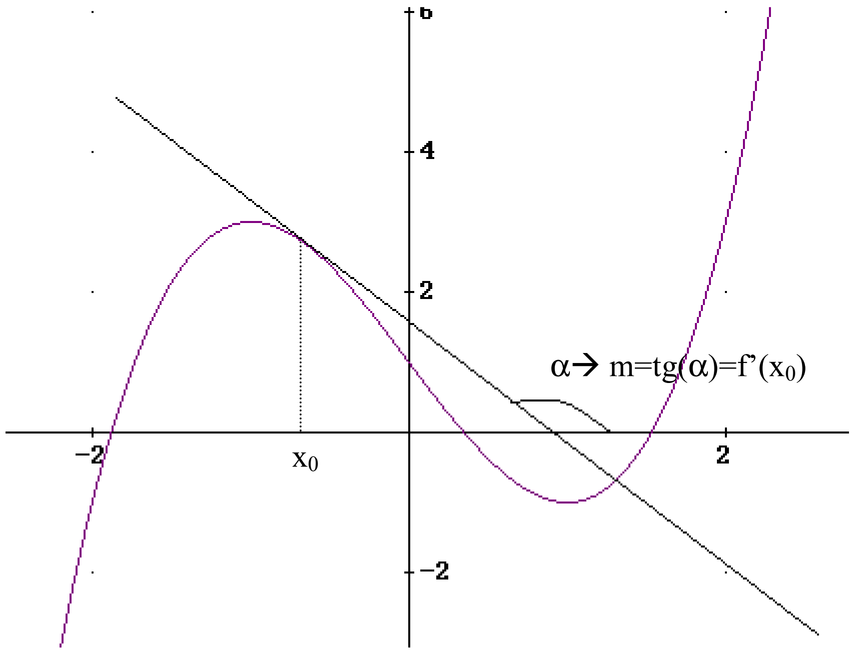
1.3 Interpretación geométrica de la derivada

En el apartado 1.1 vimos que la tasa de variación media se interpretaba como la pendiente de la recta que unía los dos puntos. La derivada es el límite de la variación media cuando los puntos se acercan infinitamente, veamos esto de forma gráfica en x=2



Como vemos en la gráfica anterior si nos acercamos infinitamente al punto la recta que une los dos puntos tiende a ser la recta tangente a la función.

Por tanto ***la derivada en x_0 de $f(x)$, es decir $f'(x_0)$ es la pendiente de la recta tangente a la función en el punto $(x_0, f(x_0))$.***



Conclusión: *$f'(x_0)=tg(\alpha)=m_{recta\ tangente\ en\ xo}$*

Conociendo la pendiente de la recta y el punto por el que pasa (x_0,f(x_0)) es fácil calcular la ecuación de la recta tangente y normal (la pendiente es -1/m=-1/f'(x_0) aplicando la ecuación punto pendiente $y=y_0+m\cdot(x-x_0)$:

· ***Ecuación de la recta tangente a la función f(x) en x_0:***

$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

· ***Ecuación de la recta normal a la función f(x) en x_0:***

$$y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$$

Ejemplo: calcular la recta tangente y normal a la curva $y=f(x)=x^2+3x$ en el punto de abscisa $x_0=1$

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2+3(1+h)-4}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+5h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h+5}{1}=5$$

$m_{recta\ tang}$=f'(1)=5 y el punto es P (1,f(1)) → P(1,4)

recta tangente → y-f(1)=f'(1)(x-1)   y-4=5(x-1)   y=5x-1

recta normal → $y-f(1)=-\frac{1}{f'(1)}(x-1)$ $y-4=-\frac{1}{5}(x-1)$ $y=-\frac{1}{5}x+\frac{21}{5}$

2. Continuidad y derivabilidad

Teorema: toda función f(x) derivable en un punto, es continua en este punto. El contrario no siempre es cierto para toda función.

Ejemplo: como vimos la función $f(x)=x^2+1$ era derivable en x=2 (existe el límite $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$) luego es continua en x=2

Nota: Todas las funciones polinómicas, son continuas y derivables en todos los puntos.

Veamos otros dos ejemplos donde el recíproco al teorema no es cierto, son continuas y no derivables:

a) $f(x)=|x-1|=\begin{cases} x-1 & si\ x>1 \\ -x+1 & si\ x\le 1 \end{cases}$ en x=1 es continua → $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = 0$

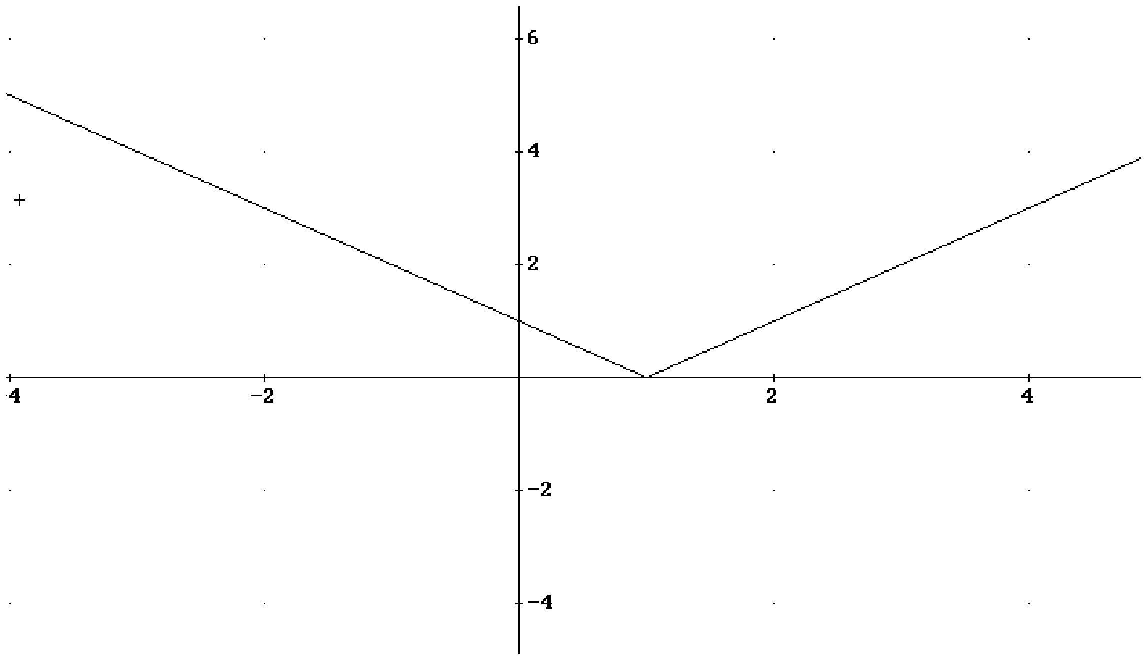
en x=1 no es derivable (ver página 52)

b) $g(x)=\sqrt[3]{x^2}$ en x=0 es continua pero no es derivable :

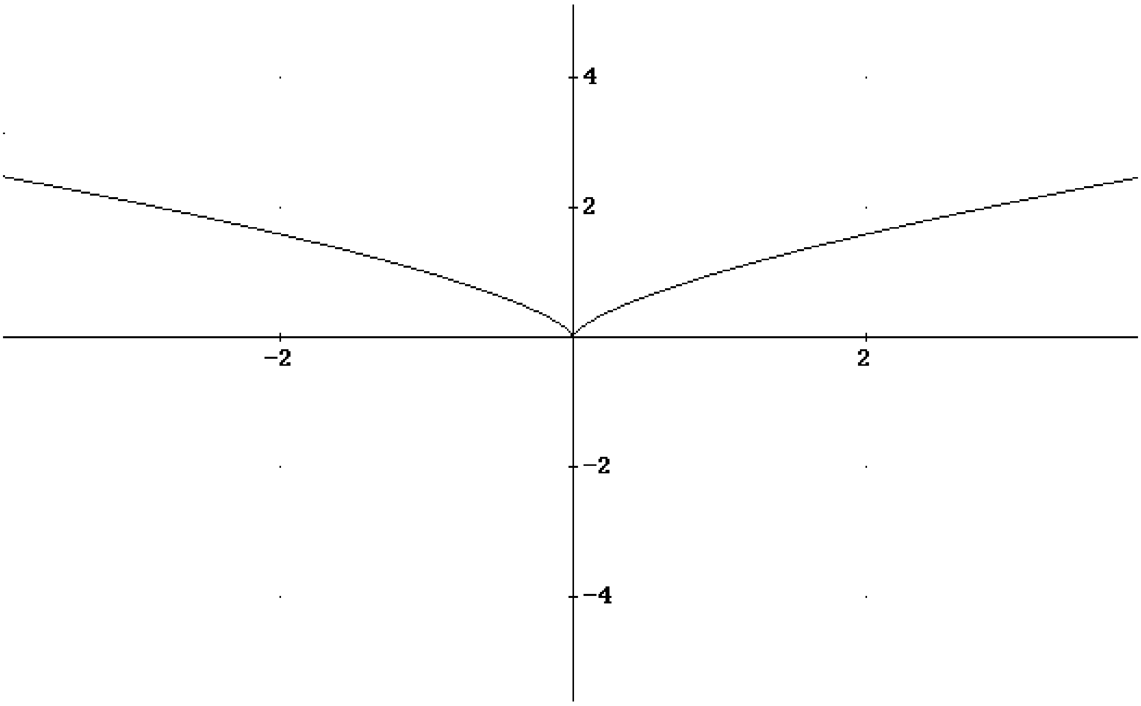
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{h^2}-0}{h}=\begin{cases} \lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt[3]{h^2}}{h}=\lim_{h\to 0^+}h^{-1/3}=\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{\sqrt[3]{h}}=+\infty \\ \lim_{h\to 0^-}\frac{\sqrt[3]{h^2}}{h}=\lim_{h\to 0^-}h^{-1/3}=\lim_{h\to 0^-}\frac{1}{\sqrt[3]{h}}=-\infty \end{cases}$$

Veamos la representación gráfica de estas dos funciones no derivables, y entandamos su interpretación gráfica:

a) f(x)=|x-1|



b) g(x)= $\sqrt[3]{x^2}$



Gráficamente vemos que en los puntos donde la función no es derivable existe un "pico" o punto anguloso que nos indica el cambio de pendiente de la recta tangente en dichos puntos (límites laterales son diferentes).

Ejercicio 1: Sea la función f(x)=$\begin{cases} \sin x & si\ x \leq 0 \\ x^2 + ax + b & si\ x > 0 \end{cases}$ calcular a y b para que f(x) sea continua y derivable.

La función está definida a trozos pero tanto sen(x) como $-x^2+ax+b$ son continuas y derivables en todos los puntos, luego punto donde hay que estudiar la continuidad y derivabilidad es x=0 donde la función cambia de expresión algebraica

a) Continuidad:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^+} f(x) = b \\ \lim_{x\to 0^-} f(x) = sen(0) = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{continua\ si} b = 0$$

Luego si b=0 independientemente del valor de a la función es continua

b) Derivabilidad

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{h\to 0^+} \dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \dfrac{h^2+ah-0}{h} = a \\ \lim_{h\to 0^-} \dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \dfrac{sen(h)-0}{h} = (L'Hopital) = 1 \end{array}\right\} \xrightarrow{derivable\ si} a = 1$$

Otro método más sencillo: cuando la función es continua podemos derivarla, (veremos cómo se deriva en el apartado 4). :

$$f'(x)=\begin{cases}\cos(x) & si \;\; x<0\\ -2x+a & si \;\; x>0\end{cases}$$

Nota: el valor para x=0 de f'(x) no se incluye hasta que se compruebe que la función es derivable.

La función será derivable en el punto x=0 si existe el límite $\lim_{x\to 0} f'(x)$, aunque este sea infinito.

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 0^+} f'(x)=a\\ \lim_{x\to 0^-} f'(x)=\cos(0)=1\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{derivable si}} a=1$$

3. Función derivada. Derivadas sucesivas

3.1 Función derivada

Cuando la función f(x) es continua podemos obtener su función derivada f'(x). La función derivada, f´(x), para cada valor de x nos da el valor de la derivada en ese punto, es decir la pendiente de la recta tangente en dicho punto.

$$\begin{array}{ll} f: R \longrightarrow R & \qquad f': R \longrightarrow R \\ \quad x \longrightarrow f(x) & \qquad \quad x \longrightarrow f'(x)\end{array}$$

A la función f'(x) se le llama ***función derivada*** de f(x), tal que si somos capaces de calcular esta función la derivada de f(x) en un punto x_0 es f´(x_0), es decir la imagen de f´(x) en el punto x=x_0.

A partir de definición de derivada la función f(x) se obtiene aplicando la definición de derivada para una x genérica:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Calculo de alguna función derivada:

1) f(x)=x^2-3x →

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-3(x+h)-x^2+3x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+2hx-3xh}{h}=2x-3$$

2) f(x)=K (cte)

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{k-k}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0$$

Si bien para el cálculo de la función derivada veremos en el siguiente apartado la tabla de derivadas y las reglas necesarias para realizar cualquier tipo de derivada.

3.2 Derivadas de orden superior

En todos los puntos del dominio de f'(x) (donde f(x) es derivable) podemos considerar otra función f ''(x), que asigna a cada punto de x el valor de la derivada de f'(x) en este punto.

$$f'': R \longrightarrow R \qquad x \longrightarrow f''(x) \qquad\qquad f''(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

La función así definida recibe el nombre de ***segunda derivada*** de f(x), f´´(x). De forma análoga podemos definir la tercera derivada f´´´(x), cuarta $f^{(IV}(x)$, etc.

4. Derivada de funciones elementales. Operaciones con derivadas

4.1 Derivadas de las funciones elementales

Se puede calcular a partir de la definición vista en el apartado anterior la función derivada de las funciones elementales. Veamos en la siguiente tabla la derivada de algunas funciones elementales.

Derivada elementales		
Función	**Función derivada**	**Ejemplo**
f(x)=K	f´(x)=0	f(x)=-e → f´(x)=0
$f(x)=x^n$	$f´(x)=n\cdot x^{n-1}$	$f(x)=\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}} \rightarrow f´(x)= \frac{2}{3} x^{\frac{-1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$
$f(x)=e^x$	$f´(x)=e^x$	
$f(x)=a^x$	$f´(x)=a^x\cdot \ln(a)$	$f(x)=5^x \rightarrow f´(x)=5^x\cdot \ln(5)$
f(x)=ln(x)	f´(x)=1/x	
$f(x)=\log_a(x)$	$f´(x)= \frac{1}{x\ln(a)}$	$f(x)=\log_3(x) \rightarrow f´(x)= \frac{1}{x\ln(3)}$
f(x)=sen(x)	f´(x)=cos(x)	
f(x)=cos(x)	f´(x)=-sen(x)	
f(x)=tg(x)	$f´(x)=1+tg^2(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}$	
f(x)=arc sen(x)	$f´(x)= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
f(x)=arc cos(x)	$f´(x)= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	
f(x)=arc tg(x)	$f´(x)= \frac{1}{1+x^2}$	

4.2 Operaciones con derivadas

Aplicamos la definición de la derivada y las propiedades de los límites se obtienen las reglas que permiten derivar funciones que son resultado de operar con otras funciones derivables.

Para ver las propiedades de las derivadas veamos otra tabla:

Propiedades de las derivadas	
Propiedad	**Ejemplo**
Suma: $(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)$	$(x^2-x+\cos(x)+e^x)'=2x-1-\text{sen}(x)+e^x$
Constante por una función: $(kf)'(x)=kf'(x)$	$(5\text{arc sen}(x))'=\frac{5}{\sqrt{1-x^2}}$
Producto: $(f\cdot g)'(x)=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$	$(5x\cdot\text{sen}(x))'=5\text{sen}(x)+5x\cdot\cos(x)$
Cociente: $\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$	$\left(\frac{7x}{\ln(x)}\right)'=\frac{7\ln(x)-7x\cdot\frac{1}{x}}{\ln^2(x)}=\frac{7\ln(x)-7}{\ln^2(x)}$
Función compuesta (regla de la cadena): $(g\circ f)'(x)=(g(f(x))'=g'(f(x)\cdot f'(x)$	$\left(e^{\cos^2(x^3)}\right)'=e^{\cos^2(x^3)}\cdot 2\cdot\cos(x^3)\cdot(-sen(x^3))\cdot 3x^2$

A partir de las derivadas elementales y de las propiedades de las derivadas es sencillo calcular la derivada de toda función, sólo hay que aplicar las propiedades con orden.

Ejercicio 2: calcular las derivadas siguientes

a) $D[(x^2-3)^5]=5(x^2-3)^4\cdot 2x=10x\cdot(x^2-3)^4$

b) $D[(3x)^{1/3}]=\frac{1}{3}(3x)^{-2/3}\cdot 3=\frac{1}{\sqrt[3]{(3x)^2}}$

c) $D[x\cdot 4^x]=4^x+x\cdot 4^x\cdot\ln(4)$

d) $D[(e^{2x}+3)^4]=4\cdot(e^{2x}+3)^3\cdot(2\cdot e^{2x})=8\cdot(e^{2x}+3)^3\cdot(e^{2x})$

e) $D[\ln(2-3x^2)^4]=\frac{1}{(2-3x^2)^4}\cdot 4(2-3x^2)^3(-6x)=\frac{-24x}{2-3x^2}$

f) $D\left[\frac{2}{(x^3-3x^2)^6}\right]=\left[\frac{-2\cdot 6\cdot(x^3-3x^2)^5(3x^2-6x)}{(x^3-3x^2)^{12}}\right]=\frac{-12\cdot(3x^2-6x)}{(x^3-3x^2)^7}$

g) $D\left[\frac{1}{\sqrt{4-5x^2}}\right]=\frac{-\frac{1}{2}(4-5x^2)^{-1/2}\cdot(-10x)}{4-5x^2}=\frac{5x}{(4-5x^2)\cdot\sqrt{4-5x^2}}=\frac{5x}{\sqrt{(4-5x^2)^3}}$

h) $D\left[(4x+2)\sqrt{4x-2}\right]=4\cdot\sqrt{4x-2}+(4x+2)\cdot\frac{4}{2\sqrt{4x-2}}=4\cdot\sqrt{4x-2}+(4x+2)\cdot\frac{2}{\sqrt{4x-2}}=\frac{24x-4}{\sqrt{4x-2}}$

i) $D[sen^4(x)]=4\cdot sen^3(x)\cdot\cos(x)$

j) $D[sen(x^4)]=\cos(x^4)\cdot 4x^3$

k) $D\left[\left(x-\sqrt{1-x^2}\right)^3\right]=3\cdot\left(x-\sqrt{1-x^2}\right)^2\cdot\left(1-\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right)=3\cdot\left(x-\sqrt{1-x^2}\right)^2\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

l) $D[sen^2(x^2)]=2sen(x^2)\cdot\cos(x^2)\cdot 2x= 4x\cdot sen(x^2)\cdot\cos(x^2)$

m) $D\left[arc\,sen\left(\sqrt{x-1}\right)\right]=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{x-1}\right)^2}}\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{x-1}}=\frac{1}{\sqrt{2-x}}\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{x-1}}=\frac{1}{2\sqrt{-x^2+3x-2}}$

n) $D\left[\sqrt{\frac{1+7x}{1-7x}}\right]=\frac{1}{2\sqrt{\frac{1+7x}{1-7x}}}\cdot\frac{7\cdot(1-7x)-(-7)\cdot(1+7x)}{(1-7x)^2}=\frac{14}{2\cdot(1-7x)^2}\sqrt{\frac{1-7x}{1+7x}}=\frac{7}{\sqrt{(1+7x)(1-7x)^3}}$

o) $D\left[arc\,tg(\sqrt{x})\right]=\frac{1}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2\cdot(1+x)\sqrt{x}}$

p) $D\left[\ln\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right)\right]=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\cdot\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x}+1)-\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)^2}=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\cdot\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+1)^2}=\frac{1}{\left(x-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$

$=\frac{1}{x\sqrt{x}-x+x-\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}(x-1)}$

q) $D\left[sen^3(2x)\cdot\cos^2(3x)\right]=3\cdot sen^2(2x)\cdot\cos(2x)\cdot 2\cdot\cos^2(3x)-sen^3(2x)\cdot 2\cos(3x)\cdot sen(3x)\cdot 3=$

$=6\cdot sen^2(2x)\cdot\cos(2x)\cdot\cos^2(3x)-6\cdot sen^3(2x)\cdot\cos(3x)\cdot sen(3x)$

r) $D\left[arc\,sen(tg(x))\right]=\frac{1+tg^2(x)}{\sqrt{1-tg^2(x)}}$

4.3 Derivación logarítmica

Cuando las funciones en forma de exponente, donde tanto la base como el exponente son funciones, $f(x)=(g(x))^{h(x)}$. El cálculo de la derivada debe de hacerse siguiendo el siguiente procedimiento (usaremos el ejemplo $f(x)=(7x^2)^{\cos(x)}$)

1. Tomamos logaritmos en ambos lados: $\ln(f(x))=h(x)\cdot\ln(g(x))$

   Ejemplo: $\ln(f(x))=\cos(x)\cdot\ln(7x^2)$

2. Derivamos a ambos lados de la igualdad: $\frac{f'(x)}{f(x)}=h'(x)\ln(g(x))+\frac{h(x)\cdot g'(x)}{g(x)}$

   Ejemplo: $\frac{f'(x)}{f(x)}=-sen(x)\ln(7x^2)+\frac{\cos(x)\cdot 14x}{7x^2}=-sen(x)\ln(7x^2)+\frac{2\cdot\cos(x)}{x}$

3. Despejamos f'(x): $f'(x) = f(x)\left[h'(x)\ln(g(x)) + \frac{h(x)\cdot g'(x)}{g(x)}\right]$

   Ejemplo: f'(x)= $\left[-sen(x)\ln(7x^2) + \frac{2\cdot\cos(x)}{7x}\right]\cdot(7x^2)^{\cos(x)}$

Ejercicio 3: calcular la derivada:

a) D[x^x] → f(x)=x^x

1. ln(f(x))=x·ln(x)
2. $\frac{f('x)}{f(x)} = \ln(x) + 1$
3. f'(x)=x^x(ln(x)+1)

b) D[$x^{\ln(x)}$] → f(x)=$x^{\ln(x)}$

1. ln(f(x))=ln(x)·ln(x)=$\ln^2$(x)
2. $\frac{f'(x)}{f(x)} = 2\cdot\ln(x)\cdot\frac{1}{x}$
3. f'(x)= $\frac{2\cdot\ln(x)}{x}x^{\ln x}$

Ejercicios del tema

Ejercicio 4: Estudiar la derivabilidad de $y = f(x) = \sqrt[3]{3x^2 - x^3}$.

La función es continua en R, pues es una raíz cúbica que existe para números negativos. Veamos la derivabilidad:

$$f'(x)=\frac{1}{3}(3x^2-x^3)^{-2/3}(6x-3x^2)=\frac{2x-x^2}{\sqrt[3]{9x^4+x^6-6x^5}}=\frac{2-x}{\sqrt[3]{x(x-3)^2}}=$$

Se anula el denominador en x=0 y x=3, estudiemos la derivabilidad en estos puntos

x=0

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{2-x}{\sqrt[3]{9x+x^3-6x^2}}=\begin{cases} f'(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2-x}{\sqrt[3]{x(x-3)^2}}=\dfrac{2}{0^+}=\infty \\ f'(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2-x}{\sqrt[3]{x(x-3)^2}}=\dfrac{2}{0^-}=-\infty \end{cases}$$ No derivable

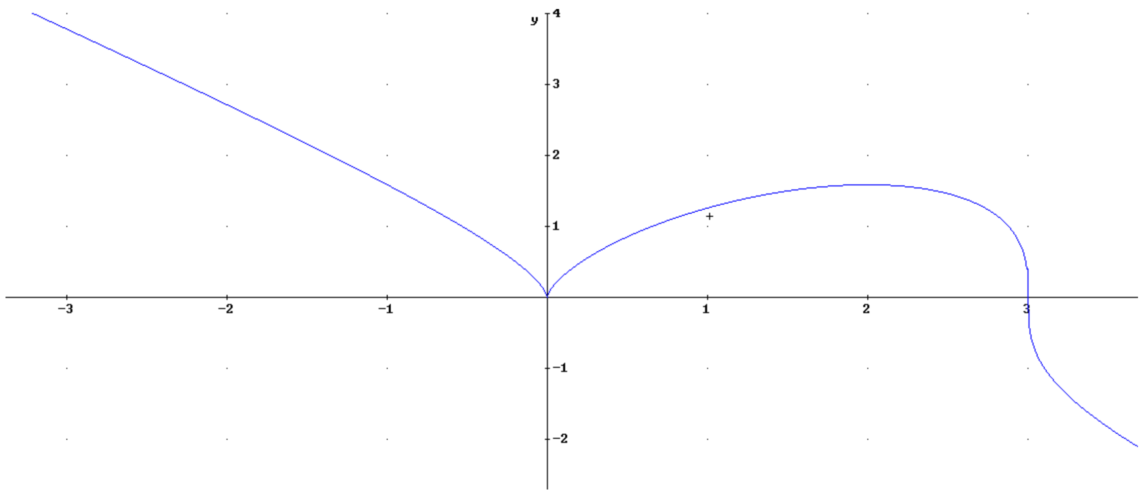
x=3

$$f'(3)=\lim_{x\to 3}\frac{2-x}{\sqrt[3]{9x+x^3-6x^2}}=\begin{cases} f'(3^+)=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{2-x}{\sqrt[3]{x(x-3)^2}}=\dfrac{-1}{0^+}=-\infty \\ f'(3^-)=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{2-x}{\sqrt[3]{x(x-3)^2}}=-\dfrac{1}{0^+}=-\infty \end{cases}$$ derivable m=-∞,

es decir la tangente es una recta paralela al eje OY.

Nota: una función derivable en un punto si existe la derivada, aunque esta sea infinito.

Veamos la gráfica para interpretar los resultados en x=0 y x=3



Ejercicio 5: estudiar la derivabilidad de $y = g(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{1/x}} & si \ \ x \neq 0 \\ 0 & si \ \ x = 0 \end{cases}$ en x=0.

Veamos primero la continuidad:

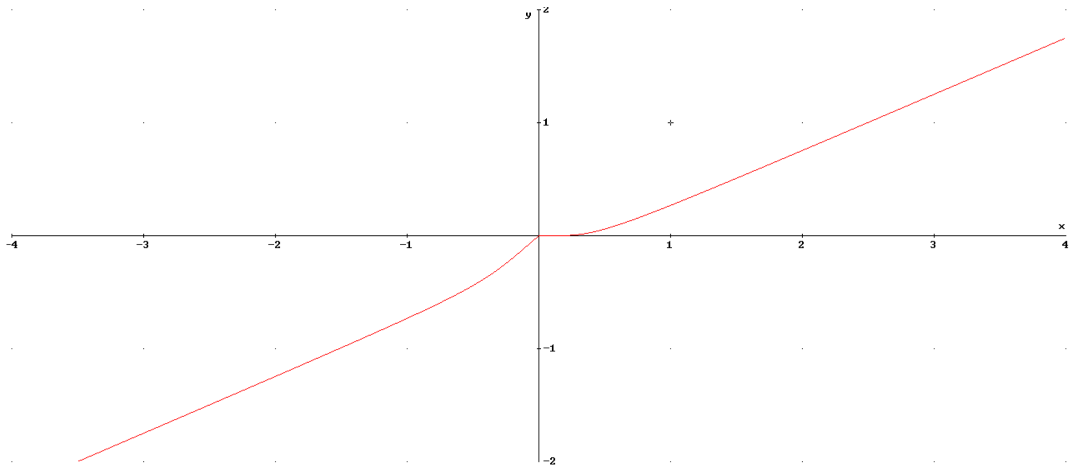
$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0}\frac{x}{1+e^{1/x}} = \begin{cases} \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{1+e^{1/x}} = \frac{0}{1+\infty} = 0 \\ \lim_{x\to 0^-}\frac{x}{1+e^{1/x}} = \frac{0}{1+0} = 0 \end{cases} \quad \text{Continua}$$

Veamos ahora la derivabilidad por la definición:

$$g'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{g(0+h)-g(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{h}{1+e^{1/h}}-0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{(1+e^{1/h})} = \begin{cases} \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{(1+e^{1/h})} = \frac{1}{1+\infty} = 0 \\ \lim_{h\to 0^-}\frac{1}{(1+e^{1/h})} = \frac{1}{1+0} = 1 \end{cases}$$

No es derivable en x=0

Veamos la gráfica:



Ejercicio 6: Deriva la función f(x)= ln(cos(x))+x·e^{2x}

$$f'(x) = -\frac{sen(x)}{\cos(x)} + e^{2x} + 2x\cdot e^{2x} = -tg(x) + e^{2x}(1+2x)$$

Ejercicio 7: Calcula un punto de la función f(x)=x^2+x+5 en la que la recta tangente sea paralela a la recta y=3x-2

Si la rectas son paralelas misma pendiente, luego la recta tangente tiene pendiente m=3, por tanto buscamos el punto donde f'(x)=3 → f'(x)=2x+1=3 → x=1→ P(1,f(1))=(1,7)

Ejercicio 8: Hallar b y c para que f(x) sea continua y derivable en (0,2)

$$f(x)=\begin{cases} x^3-12x+1 & si\ 0\leq x\leq 1 \\ 20x^2+bx+c & si\ 1<x\leq 2 \end{cases}$$

1. Continuidad: las funciones definidas en los dos trozos son polinomios y por tanto el único punto hay que estudiar la continuidad es en x=1.

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-10 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=20+b+c \end{cases} \qquad (1)\ -10=20+b+c$$

2. Derivabilidad: si b y c cumplen la anterior ecuación f(x) continua y podemos calcular la derivada en todos los puntos del dominio

$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2-12 & si\ 0<x\leq 1 \\ 40x+b & si\ 1<x<2 \end{cases}$$

Volvemos a tener dos polinomios, así que el único punto donde tenemos que estudiar la continuidad es en x=1:

$$\lim_{x\to 1} f'(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)=-9 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=40+b \end{cases} \qquad (2)-9=40+b$$

Resolviendo el sistema b=-49 y c=19

Ejercicio 9: Dada la función f(x) a) hallar a, b para que f(x) sea continua. b) Calcular los puntos donde es derivable)

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2 & si\ x\leq 0 \\ \sqrt{ax+b} & si\ 0<x\leq 2 \\ \frac{-x}{2\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{2}} & si\ x>2 \end{cases}$$

a) Las funciones x^2+2 y $\frac{-x}{2\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{2}}$ son continuas en R. La función $\sqrt{ax+b}$ será continua en (0,2] dependiendo de a y b. Veamos los valores de a y b para que sea continua en 0 y 2

<u>x=0</u> → $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\sqrt{b} \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=2 \end{cases} \to b=4$

<u>x=2</u> → $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2} \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\sqrt{2a+4} \end{cases} \quad \to\ a=-1$

Para estos valores de a y b $\sqrt{-x+4}$ es continua en (0,2] ya que –x+4 en este intervalo es mayor de cero.

Luego si a=-1 b=4 la función f(x) continua en R, y podemos calcular f'(x)

b) f'(x)= $\begin{cases} 2x & si\ x<0 \\ \dfrac{-1}{2\sqrt{-x+4}} & si\ \ 0<x<2 \\ \dfrac{-1}{2\sqrt{2}} & si\ x>2 \end{cases}$

Derivabilidad en x=0 → $f'(0)=\begin{cases} f'(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=0 \\ f'(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=-\dfrac{1}{4} \end{cases}$ → No derivable

Derivabilidad en x=2 → $f'(2)=\begin{cases} f'(2^-)=\lim\limits_{x\to 2^-} f'(x)=\dfrac{-1}{2\sqrt{2}} \\ f'(2^+)=\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\dfrac{-1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$ → derivable en x=2

Luego f(x) derivable en R-{0}

Ejercicio 10: Calcular los puntos donde la recta tangente a $y=2x^3+3x^2-30x-6$ paralela a la recta y=6x-5

Si es paralela tienen misma pendiente, es decir m=6. Como la pendiente de la recta tangente es f'(x) se tiene que cumplir que f'(x)=6

$f'(x)=6x^2+6x-30=6$ → $x_1=2$, $x_2=-3$.

$P_1(2,f(2))=(2,-38)$

$P_2(-3,f(-3))=(-3,57)$

Ejercicio 11: Dada la función $f(x)=x^2-4x+3$ encontrar los puntos donde la recta tangente a esta función sea paralela a la recta que corta la curva en x=1, x=4

Si son paralelas tienen la misma pendiente, calculemos las dos pendientes

Pendiente recta secante en x=1, x=4→ m=$\dfrac{f(4)-f(1)}{4-1}=\dfrac{3-0}{3}=1$

Pendiente rectas tangentes f'(x)=2x-4

Luego 2x-4=1 → x=5/2 P(5/2,-3/4)

Ejercicio 12: Hallar los valores de b y c para que la recta tangente a la curva con función $y=x^2+bx+c$ en el punto P(3,0) sea perpendicular a y=-0.5x+3

Primera condición la curva pasa por P, es decir f(3)=0 → 9+3b+c=0

Segunda condición al ser perpendicular la pendiente de la recta tangente será la inversa con signo menos m=-1/(-0.5)=2 para la recta tangente en x=3→ f'(3)=2 → 6+b=2

b=-4,c=3

Ejercicio 13: Estudiar la derivabilidad de f(x)=x/(1+|x|), y calcular f''(x)

a) f(x) es continua en todo R pues el denominador no se anula y la función valor absoluta es continua en R. Calculemos la derivada, para esto primero ponemos la función definida a trozos conforme a los valores del x que cambian el signo de |x|:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{1-x} & si\ \ x\leq 0 \\ \dfrac{x}{1+x} & si\ \ x>0 \end{cases} \rightarrow f'(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{(1-x)^2} & si\ \ x<0 \\ \dfrac{1}{(1+x)^2} & si\ \ x>0 \end{cases}$$

El único punto donde hay que estudiar la derivabilidad es en x=0, donde cambia de expresión analítica, ya que los denominadores no se anulan en ningún punto donde estén definidas.

$$\lim_{x\to o} f'(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to o^+} f'(x)=1 \\ \lim\limits_{x\to o^-} f'(x)=1 \end{cases} \lim_{x\to o} f'(x)=1.$$

Función derivable en R, pues $\dfrac{1}{(1-x)^2}$ continua si x<0, $\dfrac{1}{(1+x)^2}$ continua si x>0 y f'(0)=1.

Como es derivable en R podemos definir la segunda derivada:

b) $f''(x)=\begin{cases} \dfrac{+2}{(1-x)^3} & si\ \ x<0 \\ \dfrac{-2}{(1+x)^3} & si\ \ x>0 \end{cases}$ en x=0 la función f(x) no es dos veces derivable pues $\lim\limits_{x\to o^+} f''(x)=-2\neq \lim\limits_{x\to o^-} f''(x)=2$

Ejercicio 14. Sea f(x) a) estudiar los valores de a que hacen continua f(x), b) ver para estos valores si la función es derivable:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & si\ \ x\leq a \\ 2ax-2a+1 & si\, x>a \end{cases}$$

a) Los dos trozos de definición de f(x) son polinomios luego continuos en todo R y en por tanto en su dominio de definición. Sólo nos falta por estudiar la continuidad en a:

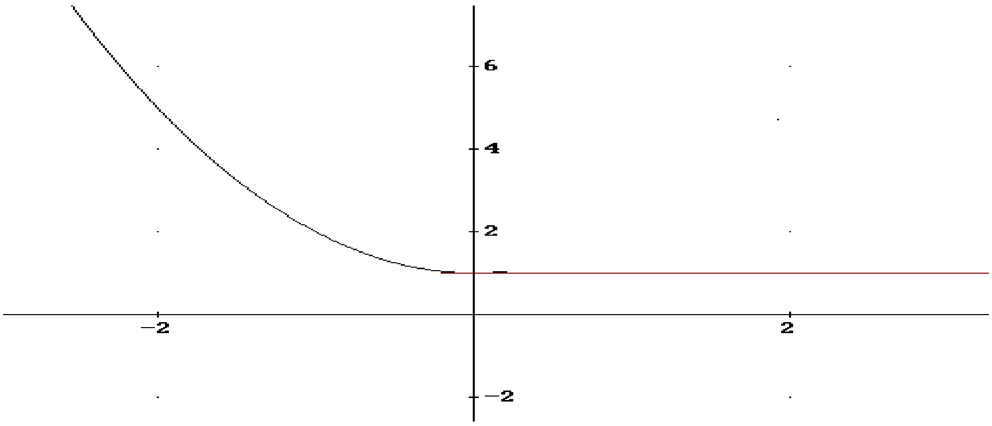
$$\lim_{x\to a} f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to a^-} f(x)=a^2+1 \\ \lim\limits_{x\to a^+} f(x)=2a^2-2a+1 \end{cases} \rightarrow a^2+1=2a^2-2a+1 \rightarrow a^2-2a=0 \rightarrow a=0, a=2$$

b) a=0 → $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & si\ \ x\leq 0 \\ 1 & si\, x>0 \end{cases}$ → $f'(x)=\begin{cases} 2x & si\ \ x<0 \\ 0 & si\, x>0 \end{cases}$

$f'(0^+)=f'(0^-)=0$

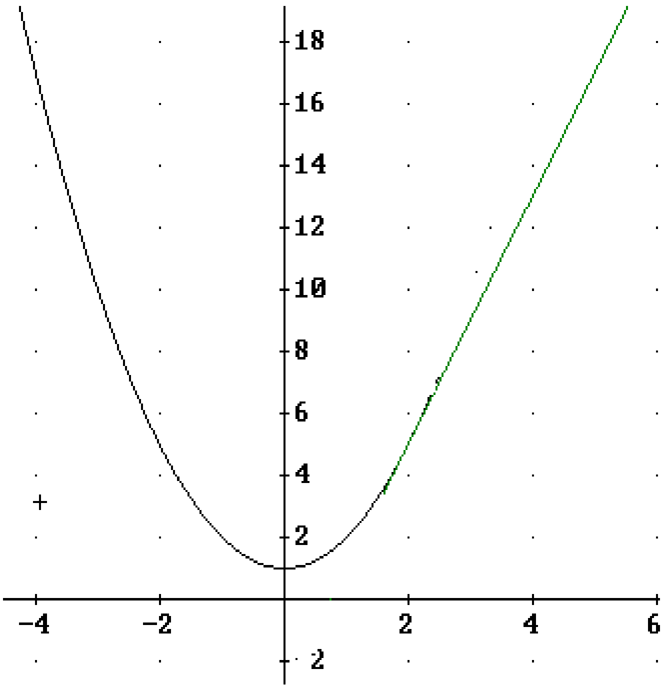
Luego es derivable en x=0.

Veamos la gráfica



a=2 → f(x)= $\begin{cases} x^2+1 & si \;\; x \le 2 \\ 4x-3 & si\, x>2 \end{cases}$ → f'(x)= $\begin{cases} 2x & si \;\; x<2 \\ 4 & si\, x>2 \end{cases}$

f'(2^-)=f'(2^+)=4, luego es derivable en x=2. Veamos la gráfica:



Ejercicios de la P.A.U.

Septiembre 2004. Prueba A.

PR-2 a) Sea *f* la función dada por *f(x)=x²-3|x|+2, e*stúdiese la derivabilidad de *f* en *x* = 0 mediante la definición de derivada

a) $f(x)=x^2-3|x|+2=\begin{cases} x^2-3x+2 & si\ x\geq 0 \\ x^2+3x+2 & si\ x<0 \end{cases},\quad x\in R.$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\begin{cases} \lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h^2-3h+2-2}{h}=-3 \\ \lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{h^2+3h+2-2}{h}=3 \end{cases}$$ No derivable x=0.

Septiembre 2005. Prueba A

PR-2. a) Estúdiese la derivabilidad de $f(x)=\begin{cases} \ln(1+x^2) & x>0 \\ x^2 & x\leq 0 \end{cases}$

Primero tenemos que estudiar la continuidad de f(x): los dos trozos de la función son continuos, pues el argumento del logaritmo es siempre positivo. De esta forma sólo tenemos que ver la continuidad en x=0

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\begin{cases} \lim_{x\to 0^+}f(x)=\ln(1)=0 \\ \lim_{x\to 0^-}f(x)=0 \end{cases}$$ f(0)=0,

luego es continua en R y podemos calcular la función derivada en todos los puntos:

$$f'(x)=\begin{cases} \frac{2x}{1+x^2}, & x>0 \\ 2x, & x<0 \end{cases}$$

Los dos trozos son continuos pues uno es un polinomio y el otro es un denominador que nunca se anula. Sólo tenemos que calcular la derivabilidad en x=0:

$f'(0^+)=f'(0^-)=0$ luego es derivable en x=0 y por tanto en R

Junio 2006. Prueba B.

C-3. Sea f(x)=ax³+bx²+cx+d. Determínense *a*, *b*, *c* y *d* para que la recta y+1=0 sea tangente a la gráfica de *f* en el punto (0,-1), y la recta x-y-2=0 sea tangente a la gráfica de *f* en el punto (1,-1).

Condiciones:

1.- Recta y=-1 → m=0 y Pasa por (0,-1)

  1.1 f(0)=d=-1

  1.2. f'(0)=c=0

2.- Recta y=x-2 → m=1 y Pasa por (1,-1)

2.1 f(1)=a+b-1=-1

2,2 f'(1)=3a+2b=1. Resolviendo el sistema: a=1, b=-1

Septiembre 2006. Prueba B.

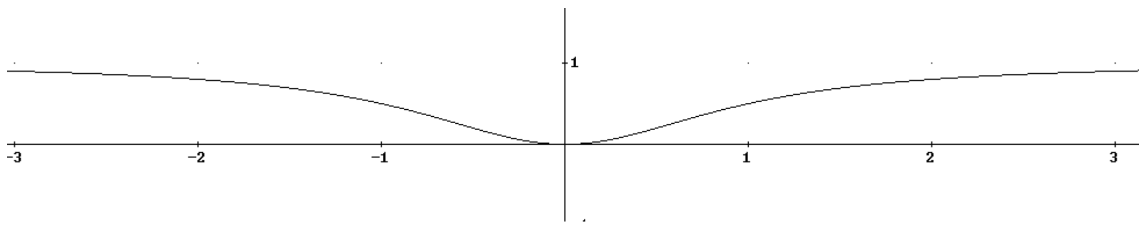
C-3 Calcúlense las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de la función f(x)=$\frac{x^2}{x^2+1}$ en el punto *x*=0 .

f'(x)=$\frac{2x\cdot(x^2+1)-2x\cdot x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{2x}{(x^2+1)^2}$ la pendiente de la recta paralela es m=f'(0)=0, es decir paralela al eje OX, y la de la recta normal es m=∞, paralela al eje OY. Las dos pasan por el punto P(0,f(0)) →P(0,0)

a) Tangente en x=0 (y-0)= 0x+0 → y=0 (eje OX)

b) Normal x=0 (eje OY)

Veamos la gráfica de f(x):



Septiembre 2007. Prueba A

C-3.- Determinar en qué puntos de la gráfica de la función y=x^3-3x^2+x+1, la recta tangente a la misma es paralela a la recta y=x+7.

Si las rectas son tangentes misma pendiente. La pendiente de la recta y=x+7 es m=1. La pendiente de la recta tangente es igual a f'(x)=3x^2-6x+1. Obliguemos a que la pendiente sea 1 y calculemos el valor de la coordenada x de los puntos buscados:

3x^2-6x+1=1 →x(3x-6)=0 →x_1=0, x_2=2

P_1(0,f(0))→ P_1(0,1)

P_2(2,f(2))→ P_1(2,-1)

Junio 2008. Prueba A

C-2.- Determinar el valor de a para que la recta tangente a la función f(x)=x^3+ax en el punto x = 0 sea perpendicular a la recta y + x = −3.

Si la recta tangente es perpendicular a y=-x-3, entonces la pendiente es m=-1/-1=1. La pendiente de las rectas tangente en x=0 es f'(0)=3·0^2+a=a. Igualando la derivada al valor de m obtenemos que a=1.

Prueba B

PR-2 Dada la función f(x)= $\begin{cases} \dfrac{sen(x^2)}{x} & si \quad x > 0 \\ x^2 - 2x & si \quad x \leq 0 \end{cases}$ **, se pide a) Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función f(x)**

<u>Continuidad</u>: sólo hay que estudiar la continuidad en x=0 que es donde la función cambia de expresión analítica y donde se anula en denominador de la primera.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{sen(x^2)}{x} = 0 \ (L'Hopital \ tema\, 4) \\ \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0 \end{cases}$$

f(x) es por tanto continua en R

<u>Derivabilidad:</u> como es continua en R podemos definir la función derivada :

f'(x)= $\begin{cases} 2\cos(x^2) - \dfrac{sen(x^2)}{x^2} & si \quad x > 0 \\ 2x - 2 & si \quad x < 0 \end{cases}$

Sólo hay que estudiar la derivabilidad en x=0

f'(0^+)= $\lim_{x\to 0^+} 2\cos(x^2) - \dfrac{sen(x^2)}{x^2} = 2 - \lim_{x\to 0^+} \dfrac{sen(x^2)}{x^2} = 2 - 1 = 1 \ (L'Hopital \ tema\, 4)$

f'(0^-)=-2

Luego no es derivable en x=0

La función f(x) es derivable en R-{0}

TEMA 4. APLICACIONES DE LA DERIVADA.

Contexto con la P.A.U.

En los exámenes de selectividad suele haber un problema en cada opción en donde se pide calcular el crecimiento y/o la curvatura de una función. Por lo general las funciones que aparecen son, en una opción, una fracción polinómica, y en la otra, o un exponente o un logaritmo. Aunque de primeras puede parecer que las funciones exponenciales o logarítmicas son más complicadas, por lo general suelen ser más sencillas, ya que las derivadas, en especial la segunda, son más fáciles de igualar a cero, y así estudiar la curvatura o el crecimiento.

Otros problemas que aparecen son los de optimización. Por lo general estos problemas son relativos a la maximización o minimización de funciones (áreas máximas o mínimas, pendiente mínima o máxima…).

Una cuestión muy común en los exámenes de selectividad son los límites, que se calculan a partir de L'Hopital. También se utiliza L'Hopital en el estudio de asíntotas de las funciones, la continuidad y la derivabilidad de funciones (ver tema anterior).

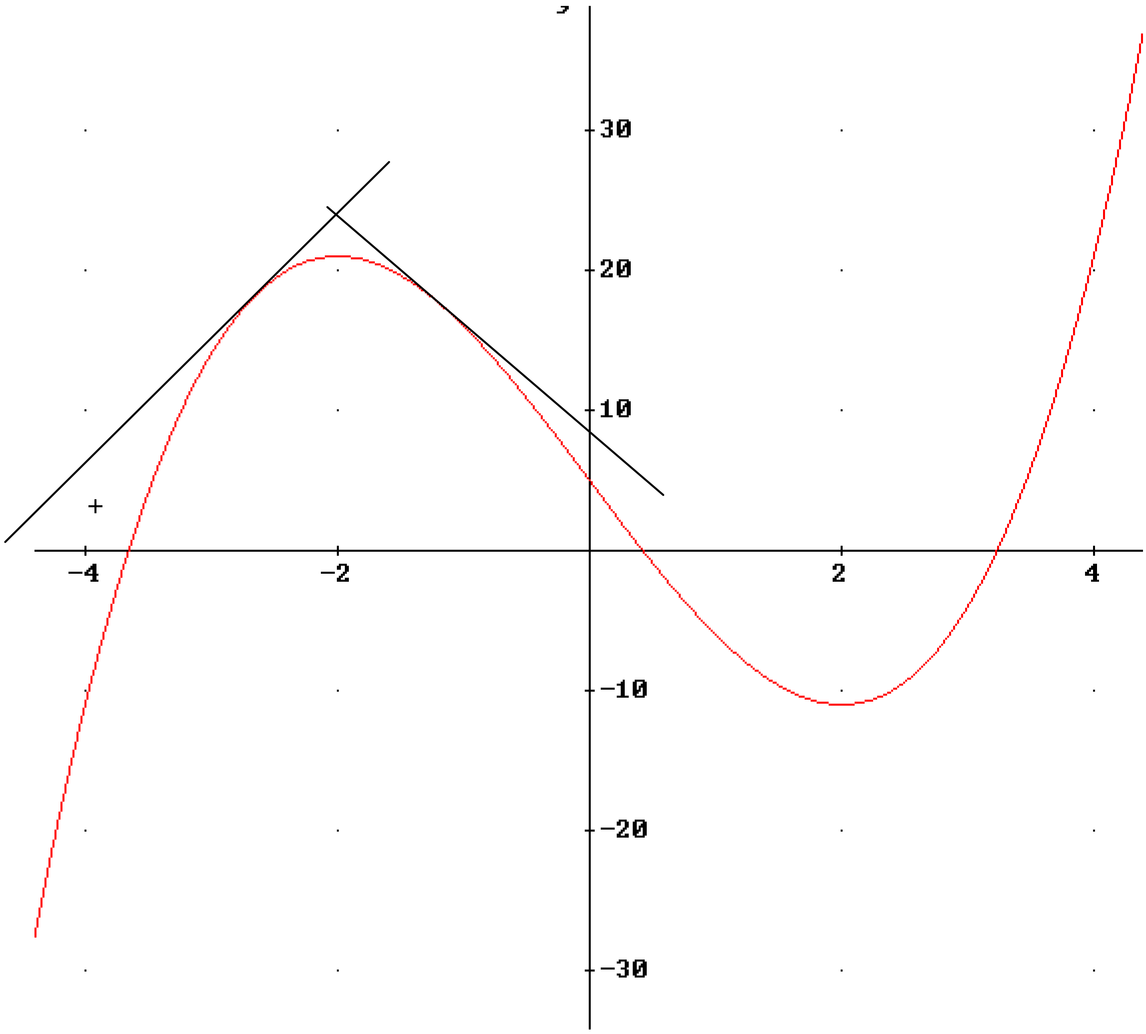
1. Monotonía. Crecimiento y decrecimiento de una función

En el tema anterior relacionamos las derivadas con la pendiente de las rectas tangentes a la gráfica descrita por la función, es decir, f '(x_0) es la pendiente de la recta tangente a la gráfica f(x) en $x=x_0$.

Vamos a relacionar el signo de $m=f'(x_0)$ con el crecimiento o decrecimiento de la función; para esto nos valemos del siguiente ejemplo:

$y=f(x)=x^3-12x+5$

$f'(x)=3x^2-12=3\cdot(x-2)\cdot(x+2)$



	(-∞,-2)	-2	(-2,2)	2	(2,∞)
Signo f'(x)	+	0	-	0	+
Crecimiento	↗		↘		↗

Claramente vemos que cuando $f'(x_0)>0$ la recta tangente es creciente, pues la pendiente es positiva, y por lo tanto f(x) es creciente en x_0. De igual forma si $f'(x_0)<0$ la recta tangente es decreciente, pues su pendiente es negativa, y por lo tanto f(x) es decreciente en x_0

Conclusión:

a) Si $f'(x_0)>0$ la función f(x) es estrictamente creciente en x_0

b) Si $f'(x_0)<0$ la función f(x) es estrictamente decreciente en x_0

2. Extremos relativos

Antes de relacionar los extremos relativos con la derivada definámoslos.

Definición: Extremo relativo de una función f(x) es todo punto x_0 tal que, para todo entorno del punto $E(x_0,r)$, se cumple que la función en este intervalo crece y decrece. Según crezca antes o después de x_0, distinguimos dos tipos de extremos relativos:

a) Máximo relativo en x_0: la función crece hasta x_0 y decrece a partir de x_0.

b) Mínimo relativo en x_0: la función decrece hasta x_0 y crece a partir de x_0.

Está claro que si x_0 es un extremo relativo de f(x), en este punto la gráfica ni crece ni decrece, luego una condición necesaria es que $f'(x_0)=0$, así la pendiente de la recta tangente es m=0, siendo por tanto paralelo al eje x. Pero está no es la única condición. Es necesario, que además, se cumpla una segunda condición que además nos permite discernir si es máximo o mínimo relativo:

- Sea x_0 un punto de una función en el que se cumple
  a) $f'(x_0)=0$
  b) $f''(x_0)<0$

  entonces $(x_0,f(x_0))$ es ***máximo relativo***
- Sea x_0 un punto de una función en el que se cumple
  a) $f'(x_0)=0$
  b) $f''(x_0)>0$

  entonces $(x_0,f(x_0))$ es ***mínimo relativo***

En la práctica, si se cumple que $f'(x_0)=0$ y viendo el crecimiento de la función antes y después del punto podemos ver si es punto relativo y si es máximo o mínimo.

En el caso de que $f'(x_0)=0$ pero también $f''(x_0)=0$ (esto ocurre cuando x_0 es raíz doble o de mayor multiplicidad de f'(x)), no podemos asegurar que este punto sea extremo relativo y hay que estudiar las derivadas de orden superior. Tendremos que calcular las derivadas en x_0, hasta la primera derivada no nula. Para ver si la función tiene extremo relativo o no vemos el siguiente esquema:

$$f'(x_0)=f''(x_0)=f^{(n-1}(x_0)=0 \rightarrow \begin{cases} f^{(n}(x_0)\neq 0 \text{ con n impar} \rightarrow x_0 \text{ Punto de Inflexión} \\ f^{(n}(x_0)\neq 0 \text{ n par} \rightarrow \begin{cases} f^{(n}(x_0)>0 \rightarrow x_0 \text{ mínimo} \\ f^{(n}(x_0)<0 \rightarrow x_0 \text{ máximo} \end{cases} \end{cases}$$

Ejemplo: Estudiar si en las siguientes funciones hay máximo, mínimo o punto de inflexión en x=0

a) y=f(x)=x^3 → f'(x)=$3x^2$ en x=0 → f'(0)=0

→ f''(x)=6x en x=0 → f''(0)=0

→ f'''(x)=6 en x=0 → f'''(0)=6

Como la primera derivada no nula es la tercera (impar), tenemos un Punto de Inflexión en P. I (0,f(0))=(0,0)

b) y=f(x)=x^4 → f'(x)=$4x^3$ en x=0 → f'(0)=0

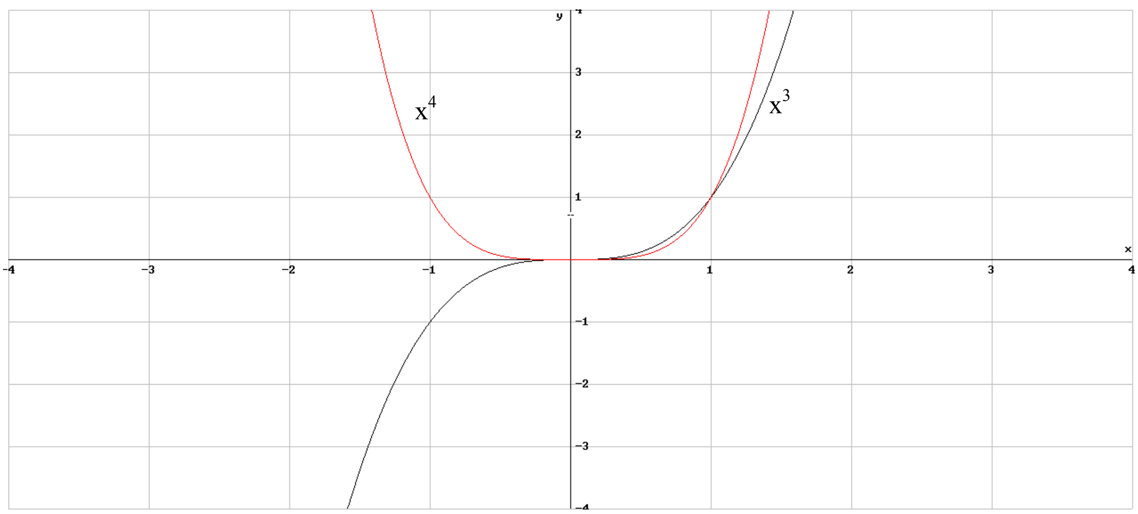
→ f''(x)=$12x^2$ en x=0 → f''(0)=0

→ f'''(x)=24x en x=0 → f'''(0)=0

→ $f^{IV}(x)$=24 en x=0 → $f^{IV}(0)=24$

Como la primera derivada no nula es la cuarta (par), tenemos un Punto relativo en x=0. Además como $f^{IV}(0)=24>0$ será mínimo m(0,f(0))=(0,0)

Veamos las gráficas de y=x^3 e y=x^4:



Ejercicio 1: Estudiar la monotonía, y los extremos relativos de las siguientes funciones:

a) $y=f(x)=2x^3-15x^2+36x-12$

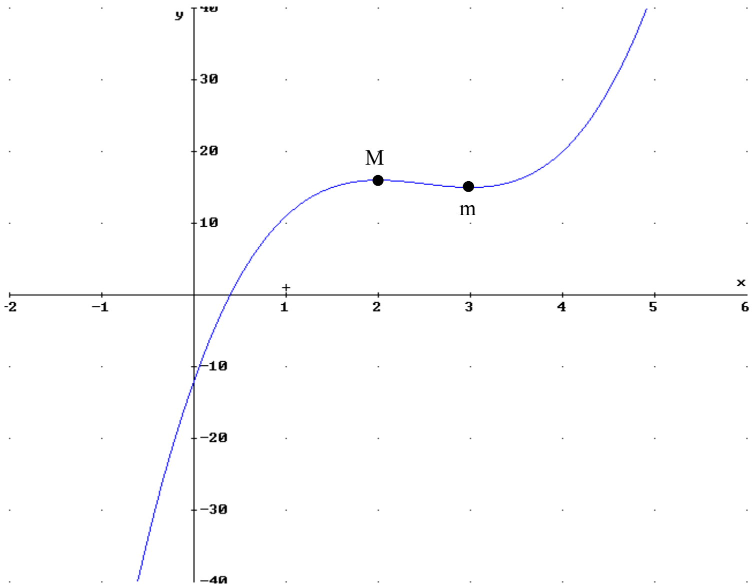
Veamos el signo de la derivada: $f'(x)=6x^2-30x+36$

$f'(x)=0 \rightarrow x^2-5x+6=(x-2)\cdot(x-3)=0 \rightarrow x=2, x=3$

$f''(x)=12x-30$

	(-∞,2)	2	(2,3)	3	(3,∞)
Signo f'(x)	+	0	-	0	+
Crecimiento	↗	(2,f(2))=(2,16)	↘	(3,f(3))=(3,15)	↗
		f''(2)<0 Máximo		f''(3)>0 Mínimo	

Máximo M(2,f(2))=(2,16)   Mínimo m(3,f(3))=(3,15)



b) y=x/ln(x)

Primero estudiemos el dominio. Veamos los puntos que no pertenecen al dominio

a) x>0 (por el logaritmo neperiano)

b) Denominador es cero: $\ln(x)=0 \rightarrow x=e^0=1$, asíntota vertical

Dom(f(x))=(0,∞)-{1}

$$f'(x)=\frac{\ln(x)-x\frac{1}{x}}{\ln^2(x)}=\frac{\ln(x)-1}{\ln^2(x)}=0 \rightarrow \ln(x)-1=0 \rightarrow x=e^1$$

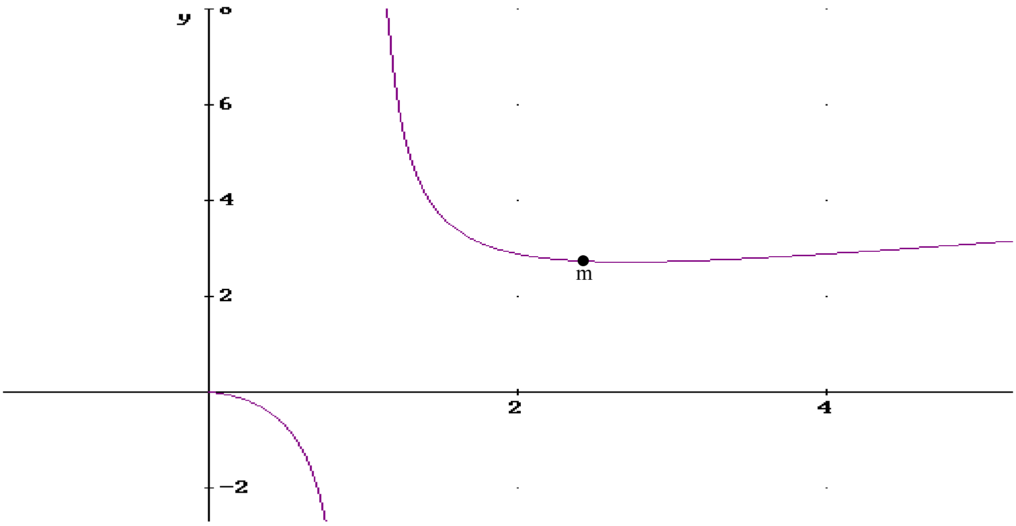
$$f''(x)=\frac{\frac{\ln^2(x)}{x}-2\ln(x)\frac{\ln(x)-1}{x}}{\ln^4(x)}=\frac{2\ln(x)-\ln^2(x)}{x\cdot\ln^4(x)}=\frac{2-\ln(x)}{x\ln^3(x)}$$

Además de los puntos donde se anula la primera derivada hay que añadir los puntos que no pertenecen al dominio, ya que en ellos puede cambiar el crecimiento. En este caso añadimos x=1.

Nota: las asíntotas verticales no suelen cambiar la monotonía aunque si la curvatura.

	(0,1)	1	(1,e)	e	(e,∞)
Signo f'(x)	-		-	0	+
Crecimiento	↘	$\notin Dom(f(x))$	↘	(e,f(e))=(e,e)	↗
				f''(e)=1/e>0 Mínimo	

Mínimo m(e,f(e))=(e,e)



c) $y = f(x) = \dfrac{x^2 - 8x + 12}{x - 4}$

Dominio=R-{4}

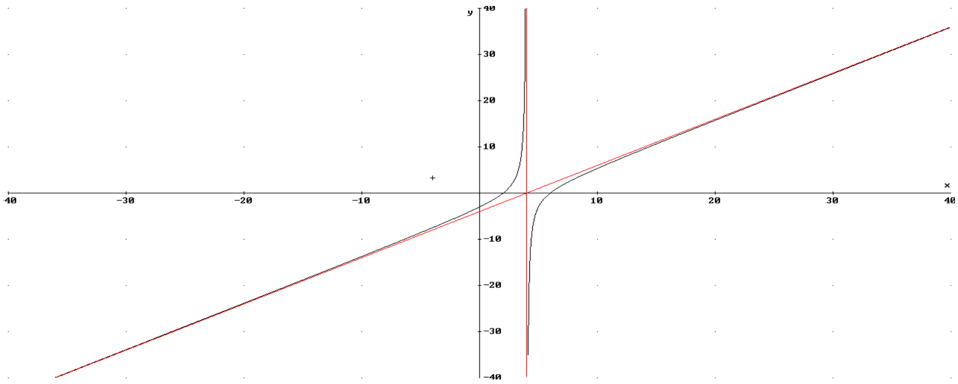
f´(x)=$\dfrac{x^2 - 8x + 20}{(x-4)^2}$,

f''(x)=$\dfrac{8x - 32}{(x-4)^4}$

Signo de f'(x): $x^2 - 8x + 20$ =0 No solución→ no extremos relativos (f'(x)>0)

Sólo tenemos que ver el crecimiento antes y después de x=4, que no pertenece al dominio:

	(-∞,4)	4	(4,∞)
Signo f'(x)	+	$\notin$ *Dominio*	+
Crecimiento	↗		↗



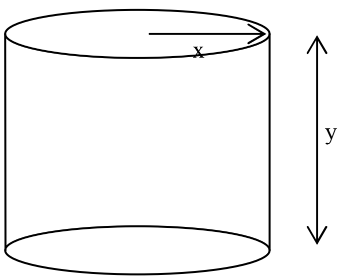
3. Optimización

En muchas situaciones se plantean problemas de optimización, es decir hacer que una función sea máxima o mínima para unas premisas impuestas.

Los casos de optimización que trabajaremos es cuando la función depende de una sola variable. Pasos a seguir para optimizar:

1. Expresar la función que deseamos optimizar en función todas variables.
2. Si la función tiene más de una variable relacionar las variables con los datos del problema y obtener una función de una sola variable (mediante la función ligadura).
3. Derivar la función, igualarla a cero y así obtener los puntos relativos
4. Comprobar, mediante la segunda derivada, si estos puntos son máximos o mínimos.

Ejemplo: Se quiere construir botes de enlatar de forma cilíndrica de 10 litros de capacidad. Calcular las dimensiones para que el gasto sea mínimo



$V=10=\pi x^2\cdot y$ (función ligadura) $\rightarrow y=10/(\pi x^2)$

El gasto es proporcional a la superficie (función a optimizar): Gasto(x,y)=K·Superficie=$K(2\cdot\pi x^2+2\pi x\cdot y)\rightarrow$

$G(x)=K\cdot[2\pi x^2+2\pi x\cdot(10/\pi x^2)]=K[2\pi x^2+20/x]$

$G'(x)=K[4\pi x-20/x^2]=0 \rightarrow 4\pi x-20/x^2=0 \rightarrow 4\pi x^3-20=0$

r=x=$\sqrt[3]{5/\pi}$ **dm** $\rightarrow$ **h=y=**$\dfrac{10}{\pi\sqrt[3]{25/\pi^2}}$ **dm** $G''(x)=4\pi+40/x^3 \rightarrow G''(\sqrt[3]{5/\pi})>0$ **Mínimo**

Ejercicio 2: Descomponer el número 48 en dos sumandos tal que el quíntuplo del cuadrado del primero más el séxtuplo del cuadrado del segundo sea mínimo.

$48=x+y$ (ligadura)→ $y=48-x$

$f(x,y)=5y^2+6x^2$ (función a optimizar)

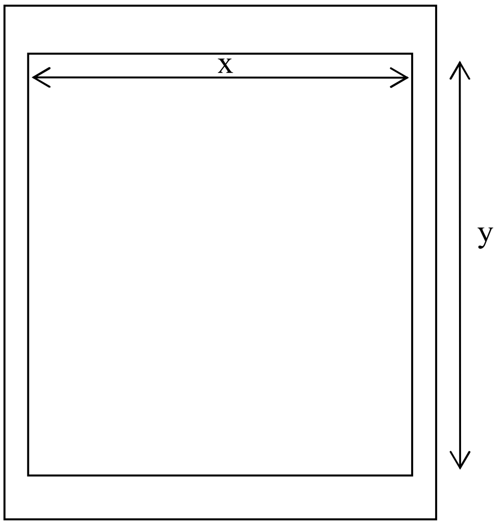
$f(x)=5\cdot(48-x)^2+6\cdot x^2=11520-480x+11x^2$

$f'(x)=-480+22x=0$

$x=240/11$, $y= 288/11$

$f''(x)=22$ $f''(240/11)>0$ **Mínimo**

Ejercicio 3: Una hoja de papel debe contener 18 cm² de texto impreso, márgenes superior e inferior de 2 cm y laterales de 1 cm. Obtener las dimensiones que minimizan la superficie del papel



$x\cdot y=18$ (ligadura)→ $y=18/x$

$Area(x,y)=(x+2)\cdot(y+4)$ (función a optimizar)
$A(x)=(x+2)\cdot(18/x+4)=18+4x+36/x+8=26+4x+36/x$

$A'(x)=4-36/x^2 =0$ → **$x=3cm$ $y=6cm$**

$A''(x)=72/x^3$ $A''(3)>0$ **mínimo** → Dimensiones: 5cm x 10cm

4. Curvatura

Veamos las definiciones de los dos tipos de curvaturas posibles en una función:

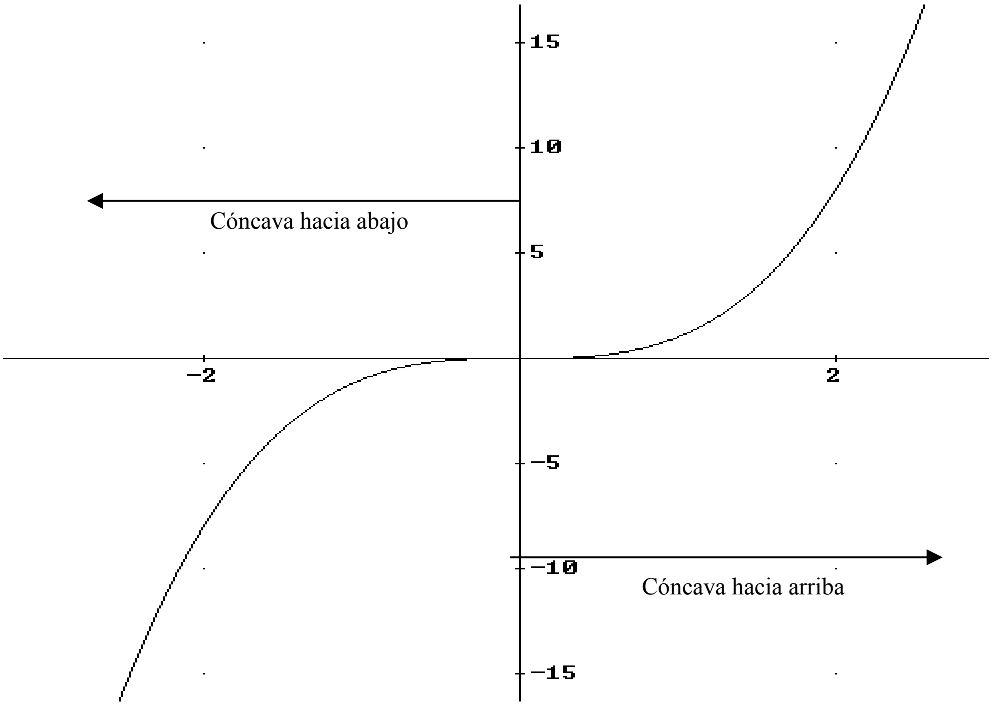
Definición 1: Una función es **cóncava hacia las y positivas o cóncava hacia arriba** en un punto $P(x_0,y_0)$, si la recta tangente en este punto está por debajo de los puntos próximos a P. Gráficamente tiene forma de ∪

Definición 2: Una función es **cóncava hacia las y negativas o cóncava hacia abajo** en un punto $P(x_0,y_0)$, si la recta tangente en este punto está por encima de los puntos próximos a P. Gráficamente tiene forma de ∩.

Podemos saber si una función es cóncava hacia arriba o hacia abajo a partir de la segunda derivada:

- Si **f''(x_0)>0**, entonces f(x) es **cóncava hacia arriba** en el punto (x_0,f(x_0)). (Recordar la curvatura de $y=f(x)=x^2$ y como f''(x)=2>0)
- Si **f''(x_0)<0**, entonces f(x) es **cóncava hacia abajo** en el punto (x_0,f(x_0)). (Recordar la curvatura de $y=f(x)=-x^2$ y como f''(x)=-2<0)

Ejemplo: $y=f(x)=x^3$ f''(x)=6x, si x>0 cóncava hacia arriba y si x<0 hacia abajo



5. Puntos de Inflexión

Uno de los puntos más importantes a la hora de representar una función son los puntos de inflexión; veamos que es un punto de inflexión:

Definición: Se dice que f(x) tiene **punto de inflexión** en **(x_0,f(x_0))** si en ese punto cambia la curvatura de la función, es decir pasa de ser cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo o al revés. En este punto la recta tangente a la función corta a la función.

Vamos a ver la relación entre los puntos de inflexión y las derivadas de la función, en el siguiente teorema:

Si f(x) cumple en x_0 que la segunda derivada es nula (**f''(x_0)=0**) y además la tercera derivada es distinta de cero (**f'''(x_0)≠0**), entonces la función f(x) tiene un **punto de inflexión en (x_0,f(x_0)).**

En el caso de que tanto f''(x_0)=0 como f'''(x_0)=0, tendremos que recurrir a las derivadas de orden superior, y ver el orden de la primera no nula en x_0. Como vimos en el apartado 2.

$f^{(n}(x_0) \neq 0$ con n impar → x_0 Punto de Inflexión

$f'(x_0) = f''(x_0) = f^{(n-1}(x_0) = 0$

$f^{(n}(x_0) \neq 0$ n par

$f^{(n}(x_0) > 0$ → x_0 mínimo

$f^{(n}(x_0) < 0$ → x_0 máximo

Ejemplo: Estudia el crecimiento, puntos relativos, la curvatura y los puntos de inflexión de la función f(x)=$\frac{x-1}{x+1}$

Primero estudiemos el dominio Dom(f)=R-{-1}

f'(x)=$\frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$

Vemos que siempre es positiva para todo valor de x que pertenezca al dominio:

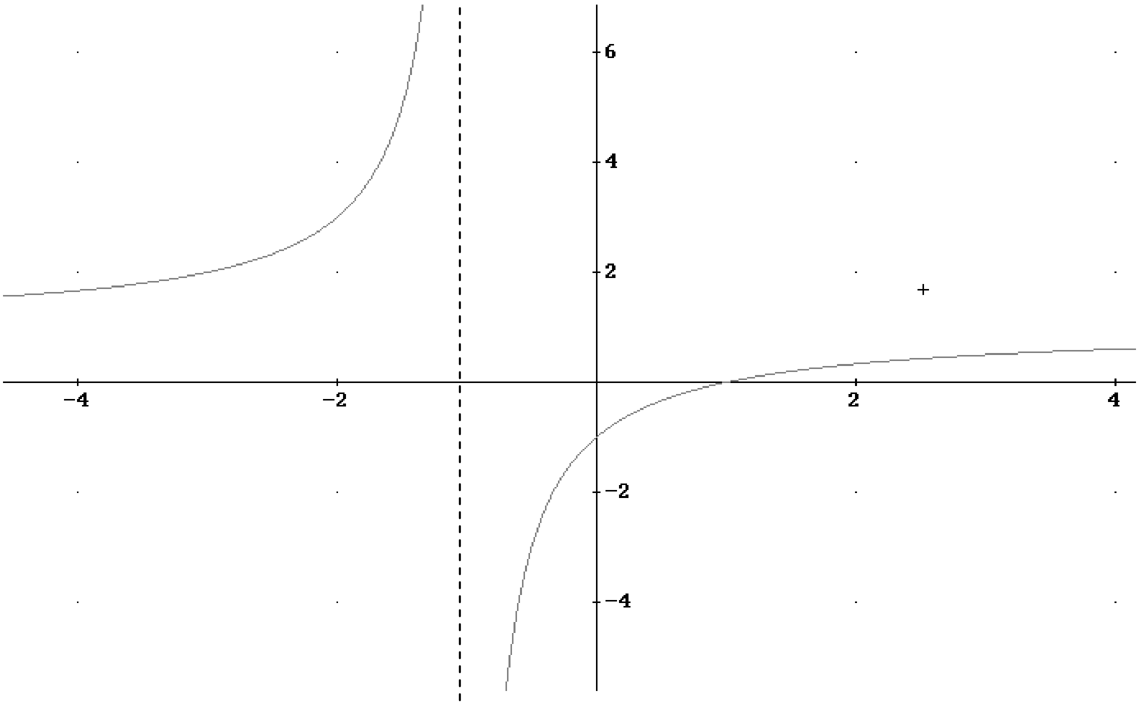
	(-∞,-1)	-1	(-1,∞)
Signo f'(x)	+	No existe -1$\notin$Dom(f)	+
Crecimiento	$\nearrow$		$\nearrow$
		No Punto relativo	

Calculemos ahora la curvatura y los puntos de inflexión

f ''(x)=$\frac{-4}{(x+1)^3}$

El signo de la segunda derivada es:

	(-∞,-1)	-1	(-1,∞)
Signo f''(x)	+	No existe -1$\notin$Dom(f)	-
Cocavidad	$\cup$		$\cap$
		No P.I.	



Ejercicio 4: Estudiar monotonía y curvatura de f(x)=$\frac{x^2}{x^2-2x+1}$

Primero vemos el dominio de f(x), como x^2-2x+1=$(x-1)^2$, entonces →Dom(f)=R-{1}

$$f'(x)=\frac{2x\cdot(x^2-2x+1)-(2x-2)\cdot x^2}{(x^2-2x+1)^2}=\frac{2x-2x^2}{(x^2-2x+1)^2}=\frac{-2x\cdot(x-1)}{(x^2-2x+1)^2}=\frac{-2x}{(x-1)^3}$$

f'(x)=0→ x=0

	(-∞,0)	0	(0,1)	1	(1,∞)
Signo f'(x)	-	0	+	No existe	-
Crecimiento	↘	m(0,f(0))=(0,0)	↗	1∉Dom(f)	↘
		f ''(0)>0 Mínimo			

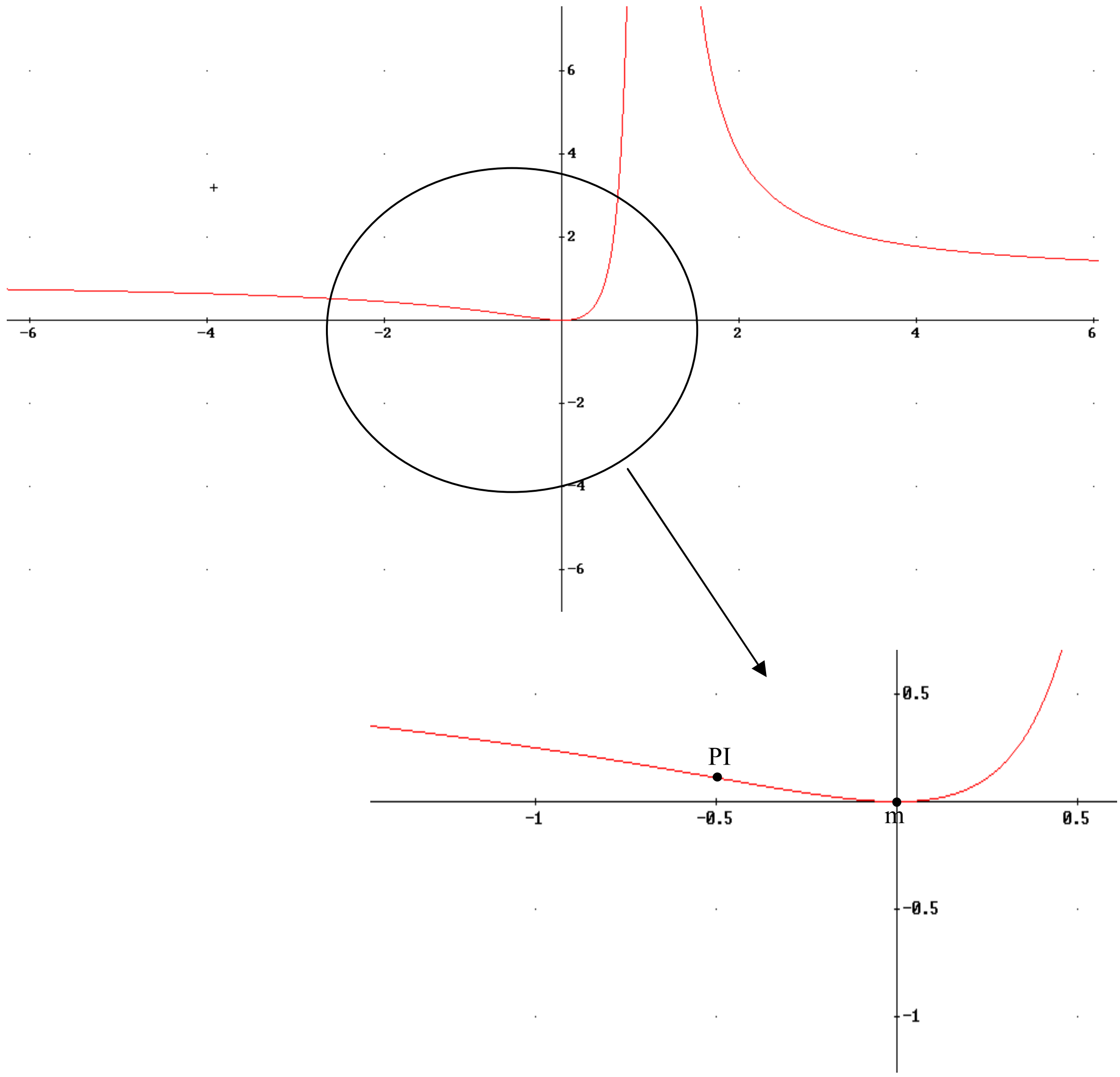
$$f''(x)=\frac{(2-4x)\cdot(x^2-2x+1)^2-2\cdot(x^2-2x+1)\cdot(2x-2)\cdot(2\cdot x-2x^2)}{(x^2-2x+1)^4}=$$

$$=\frac{(x^2-2x+1)\cdot\left[(2-4x)(x^2-2x+1)+8x^3-16x^2+8x\right]}{(x^2-2x+1)^4}=\frac{(x^2-2x+1)(-4x^3+6x^2-2)}{(x^2-2x+1)^4}=$$

$$=\frac{-2\cdot(x^2-2x+1)^2\cdot(2x+1)}{(x^2-2x+1)^4}=\frac{-4\cdot(x+1/2)}{(x^2-2x+1)^2}$$

Se anula en x=-1/2

	(-∞,-1/2)	-1/2	(-1/2,1)	1	(1,∞)
Signo f''(x)	-	0	+	No existe	+
Concavidad	∩	PI(-01/2,f(-1/2))= =(-0.5,1/9)	∪	$1\notin$Dom(f)	∪
		f '''(-1/2)≠0			



Nota: darse cuenta que en este ejemplo en la asíntota vertical x=1 si cambia la curvatura, pasando de creciente a decreciente, esto es porque x=1 es una raíz doble del denominador. Cuando esto ocurre cambia la monotonía pero no la curvatura.

Ejercicio 5: **sean $f(x)=x^3$, $g(x)=x^4$ y $h(x)=x^5$; determinar si en x=0 hay un P.I. o un punto relativo.**

a) $f'(x)=3x^2 \rightarrow f'(0)=0$

$f''(x)=6x \rightarrow f''(0)=0$

$f'''(x)=6 \rightarrow f'''(0)=6\neq 0$

n=3 P.I.(0,0)

b) $g'(x)=4x^3 \rightarrow g'(0)=0$

$g''(x)=12x^2 \rightarrow g''(0)=0$

$g'''(x)=24x \rightarrow g'''(0)=0$

$g^{(4}=24 \rightarrow g^{(4}=24>0$

n=4 Punto relativo Mínimo $\rightarrow$ m(0,0)

c) $h'(x)=5x^4 \rightarrow h'(0)=0$

$h''(x)=20x^3 \rightarrow h''(0)=0$

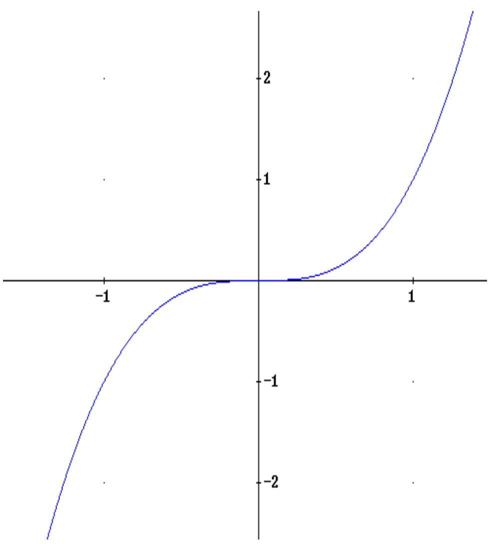
$h'''(x)=60x^2 \rightarrow h'''(0)=0$

$h^{(4}(x)=120x \rightarrow h^{(4}(0)=0$

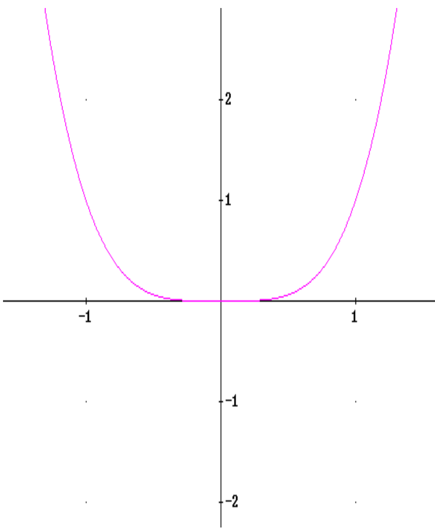
$h^{(5}(x)=120 \rightarrow h^{(5}(0)=120\neq 0$

n=5 P.I. (0,0)

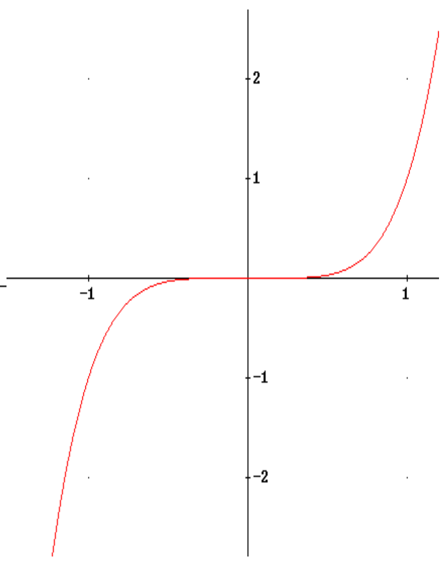
$y=x^3$



$y=x^4$



$y=x^5$



6. Propiedades de las funciones derivables

6.1. Teorema de L'Hopital

Ya hemos visto en el tema anterior que hay límites que, para calcularlos, es necesario utilizar el teorema de L'Hopital, veamos en que consiste:

Teorema: Sean f(x) y g(x) continuas y derivables en x_0 que verifican:

a) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$

b) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\pm\infty$ entonces se cumple:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Esta regla es válida para $x_0 \in R$, $+\infty$ o $-\infty$.

Esta regla se puede aplicar sucesivas veces si el límite sigue siendo ∞/∞ o 0/0

Ejemplos:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}=\frac{0}{0}\underset{L'H}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{1}=1$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^3}{x-sen(x)}=\frac{0}{0}\underset{L'H}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{6x^2}{1-\cos(x)}=\frac{0}{0}\underset{L'H}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{12x}{sen(x)}=\frac{0}{0}\underset{L'H}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{12}{\cos(x)}=12$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x^2+2}\underset{L'H}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{2x^2}=0$

d) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x)=0\cdot\infty=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(x)}{1/x}=\frac{\infty}{\infty}\underset{L'H}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}-x=0$

e)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)tg(x)=0\cdot\infty=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{tg(x)}{\frac{1}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}}=\frac{\infty}{\infty}\underset{L'H}{=}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{\cos^2(x)}}{\frac{-1}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{\cos^2(x)}=\frac{0}{0}\underset{L'H}{=}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{-2sen(x)\cos(x)}=\frac{0}{0}\underset{L'H}{=}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{-sen^2(x)+\cos^2(x)}=-1$$

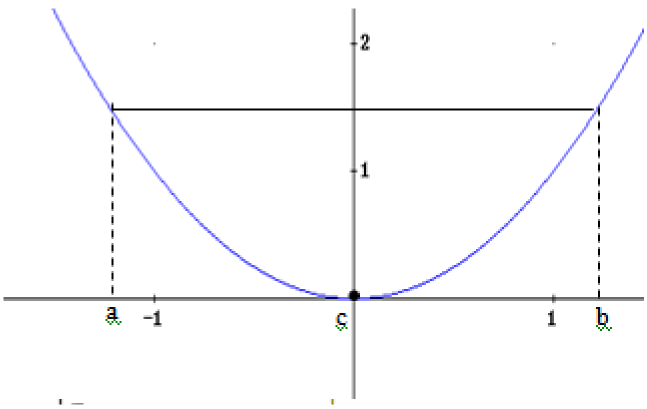
6.2. Teorema de Rolle

Un teorema muy importante es el denominado teorema de Roll que nos demuestra que cuando una función derivable pasa dos veces por la misma altura entonces tiene un punto relativo entre estos dos puntos:

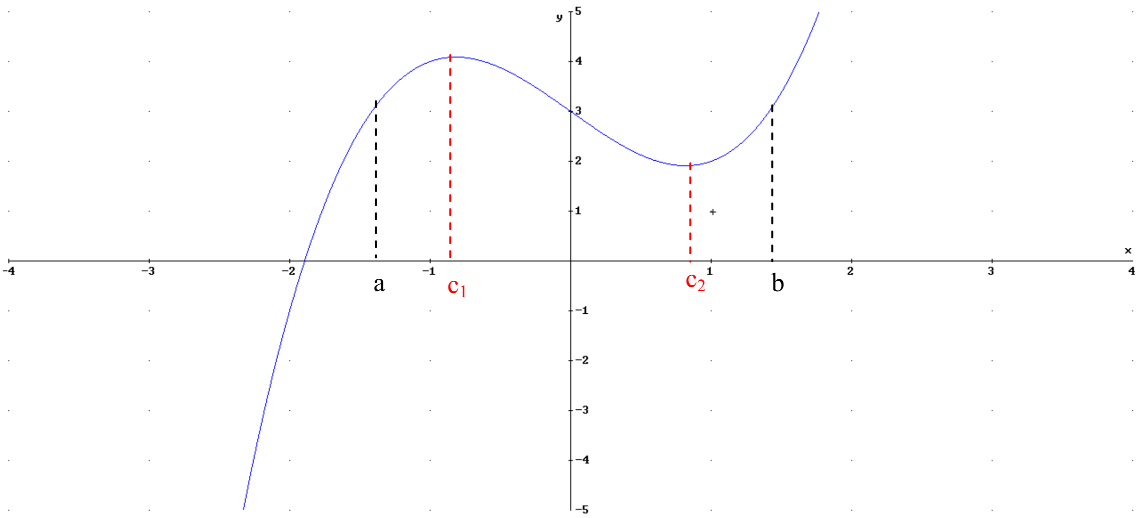
> ***Teorema de Rolle:*** Sea f(x), que cumple las siguientes condiciones:
>
> - continua en [a,b]
> - derivable en (a,b)
> - f(a)=f(b)
>
> entonces existe al menos un punto $c\in(a,b)$, tal que $f'(c)=0$ (es decir tiene al menos un máximo o mínimo relativo)

Veamos cómo es fácil de interpretar este teorema, si lo hacemos de forma gráfica, es semejante al de Bolzano

Interpretación gráfica:



Puede ocurrir que haya dos o más puntos que cumplan el teorema (f ’(c)=0)



Ejercicios PAU:

Sólo veremos los que están relacionados con la optimización y con L'Hopital, los relativos al crecimiento y a la curvatura se verán en el tema siguiente

A) Optimización

Septiembre 2004. Prueba B.

PR2.- a) Dada la función f(x)=1/x+ln(x) definida en [1,e], calcular la recta tangente con mayor pendiente. Escribir ecuación de dicha recta

La pendiente de las rectas tangentes viene dada por la derivada de f(x)→

f '(x)=$-1/x^2+1/x$. Como tenemos que buscar el valor con mayor pendiente, la función a optimizar es f'(x), que llamaremos g(x), g(x)=f'(x). Optimicémosla

g'(x)=$\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x^2}=\frac{2-x}{x^3}$=0 → 2-x=0 →x=2$\in$[1,e]

Veamos si es máxima o mínima: g''(x)=$2/x^3-6/x^4$ g''(2)=1/4-3/8<0 **máximo**

La pendiente máxima es m_{max}=g(2)=f '(2)=-1/4+1/2=1/4; esta es la pendiente de la recta tangente en el punto P(2,f(2))=(2,1/2+ln(2))

La recta tangente es por tanto: y-(1/2+ln(2))=1/4(x-2) → **y=0.25·x+ln(2)**

Junio 2006. Prueba A.

PR-2 Considérense las funciones f(x)=e^x, g(x)=$-e^{-x}$. Para cada recta *r* perpendicular al eje *OX*, sean *A* y *B* los puntos de corte de dicha recta con las gráficas de *f* y *g*, respectivamente. Determínese la recta *r* para la cual el segmento *AB* es de longitud mínima.

Las rectas perpendiculares al eje OX son del tipo x=x_0. Corte con las gráficas

a) f(x)=e^x → A(x_0,e^{x_0})
b) g(x)=$-e^{-x}$→ B(x_0,$-e^{-x_0}$)

Longitud segmento AB → d(A,B)=$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|(0,e^{x_0}+e^{-x_0})\right|=\sqrt{\left(e^{x_0}+e^{-x_0}\right)^2}=e^{x_0}+e^{-x_0}$

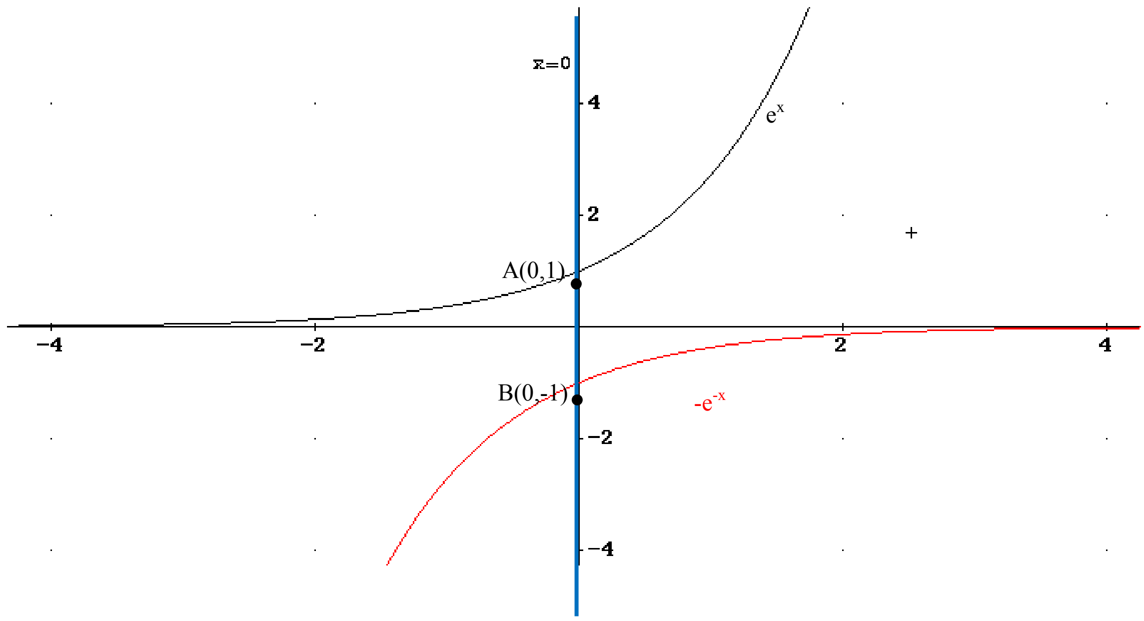
d(x_0)= $e^{x_0}+e^{-x_0}$. Como tiene que ser distancia mínima, calculemos la derivada de d(x_0) e igualemos a cero

d'(x_0)= $e^{x_0}-e^{-x_0}$=0 → $e^{x_0}=e^{-x_0}$ → x_0=-x_0 → **x_0=0.**

Veamos si es mínima o máxima d''(x)= $e^{x_0}+e^{-x_0}$ d''(0)=2>0 **Mínimo**

Por tanto la recta es x=0. Corta con f(x) en (0,e^0)=(0,1) y con g(x) en (0,$-e^{-0}$)=(0,-1)

Así la recta que minimiza la distancia entre las dos funciones es **x=0**



Septiembre 2008. Prueba B

PR-2. Hallar, de entre los puntos de la parábola de ecuación y=x^2-1, los que se encuentran a distancia mínima del punto A(-2,-1/2)

Los puntos de la parábola son P(x, x^2-1). La distancia entre P y A es:

$$d(A,P)=\left|\overrightarrow{AP}\right|=\left(x+2,x^2-\frac{1}{2}\right)=\sqrt{(x+2)^2+(x^2-\frac{1}{2})^2}=\sqrt{x^2+4x+4+x^4-x^2+\frac{1}{4}}$$

$d(x)=\sqrt{x^4+4x+\frac{17}{4}}$ →Nota si buscamos el valor que minimice la distancia se cumplirá también que para ese valor d^2 también será mínima, (siendo la función mucho más sencilla al quitarnos la raíz): f(x)=(d(x))^2=$x^4+4x+\frac{17}{4}$

$f'(x)=4x^3+4$ → x=-1 → **P(-1,0)**

Veamos que es mínimo f´´(x)=12x^2, f´´(-1)=12>0, es **mínimo**

Otros ejercicios optimización:

Ejercicio 6: sean las funciones f(x)=x-2 y g(x)=e^x, de todas las rectas paralelas al eje OX que cortan en A a g(x) y a B a f(x), calcular aquella que minimiza las distancias entre los dos puntos.

Las rectas paralelas al eje OX son de la forma y=t, que será el parámetro libre. Los puntos A y B serán:

$$A=\begin{cases} y=t \\ y=e^x \end{cases} \qquad e^x=t \rightarrow A(\ln(t),t)$$

$$B=\begin{cases} y=x-2 \\ y=t \end{cases} \qquad x=t+2 \rightarrow B(t+2,t)$$

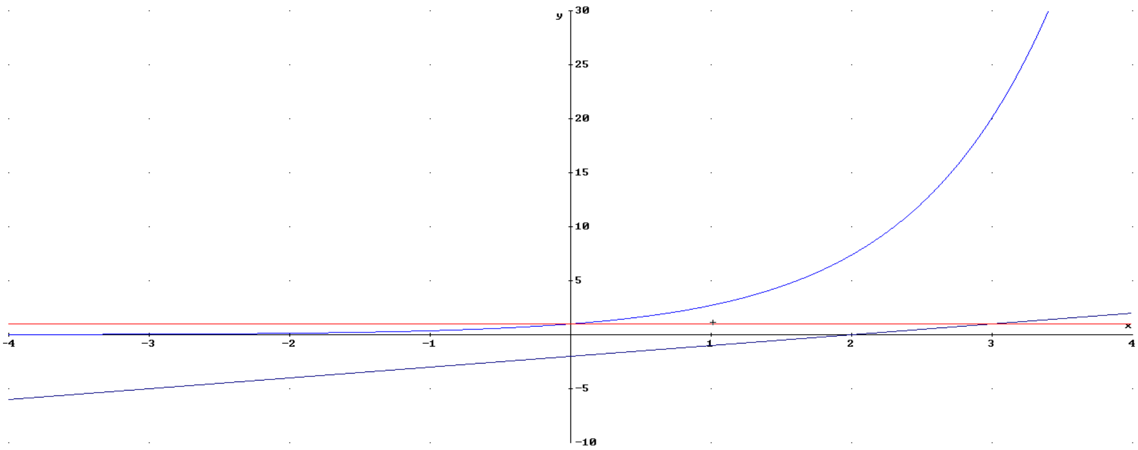
$$d(A,B)=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|t+2-\ln(t),0\right|=\sqrt{(t+2-\ln(t))^2+0^2}=t+2-\ln(t)$$

La función que tenemos que maximizar será d(t)=t-2-ln(t):

$$d'(t)=1-\frac{1}{t}=0 \rightarrow t=1.$$

Comprobemos que es un **mínimo**: $d''(t)=-\frac{1}{t^2} \rightarrow d''(1)<0$

Luego la recta buscada es **y=1.**



Ejercicio 7: sea la función f(x)=e^{-x^2}, calcular el punto P de la gráfica tal que la ordenada en el origen de la recta tangente a dicha función en P sea máxima.

Los puntos de la gráfica serán P(t,f(t))=(t, e^{-t^2}) y las pendientes de las rectas tangentes para estos puntos vienen definidas por m=f′(t)=-2t·e^{-t^2}. De esta forma las rectas tangentes son:

r: $y-y_0=m(x-x_0)$ → r: $(y-e^{-t^2})=-2te^{-t^2}(x-t)$ → r: $y=(-2te^{-t^2})x+(e^{-t^2}+2t^2e^{-t^2})$. Por lo tanto la ordenada en el origen es $n(t)=e^{-t^2}+2t^2e^{-t^2}$.

Calculemos el valor de t que minimiza la función:

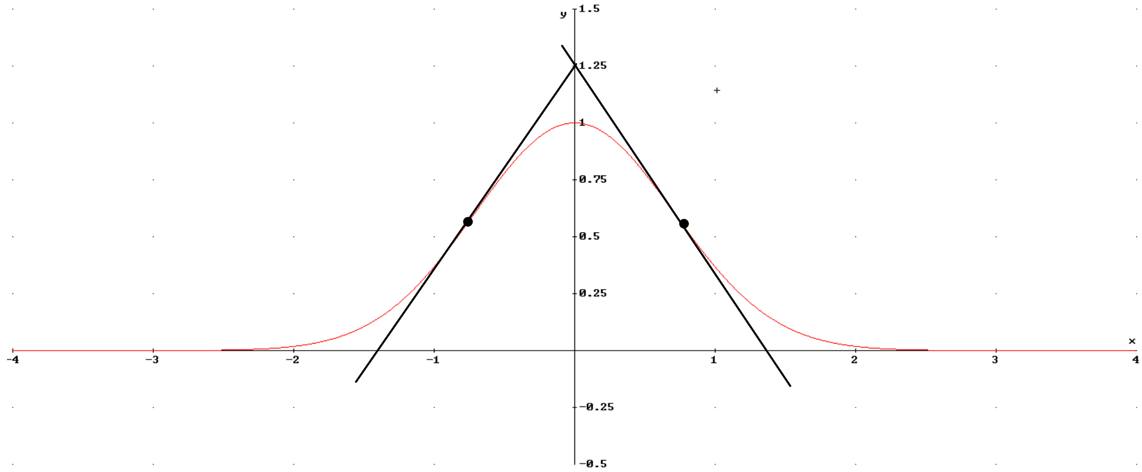
$n'(t)=-2te^{-t^2}+4t\cdot e^{-t^2}-4t^3\cdot e^{-t^2}=(2t-4t^3)\,e^{-t^2}=0 \rightarrow 2t(1-2t^2)=0 \rightarrow t=0,\ t=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$

Veamos cuál de estos valores máximiza la función:

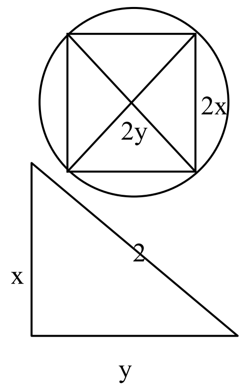
$n''(t)=2e^{-t^2}(4t^4-8t^2+1)$

$n''(0)>0$ Mínimo

$n''(\pm\sqrt{\frac{1}{2}})<0$ Máximo. Luego los punto son $\mathbf{P_1(\sqrt{\frac{1}{2}},\ e^{-1/2}),\ P_2(-\sqrt{\frac{1}{2}},\ e^{-1/2})}$



Ejercicio 8: calcular el rectángulo de área máxima inscrita en una circunferencia de radio 2cm:



Área(x,y)=4·x·y (función a optimizar)

$x^2+y^2=4$ (ligadura) $\rightarrow x=\sqrt{4-y^2}$

$A(y)=4y\cdot\sqrt{4-y^2}$

$A'(y)=4\cdot\sqrt{4-y^2}-\frac{4y^2}{\sqrt{4-y^2}}=0 \rightarrow \frac{16-4y^2-4y^2}{\sqrt{4-y^2}}=0$

$y=\sqrt{2}$ cm $\rightarrow$ $x=\sqrt{2}$ cm (cuadrado)

Veamos que es máxima: $A''(\sqrt{2})<0$. **Máximo**

B) L'Hopital

PAU Septiembre 2006. Prueba A C-3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos(x))-1+\cos(x)}{x^2}=\frac{0}{0}\underset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{sen(x)}{\cos(x)}-sen(x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-tg(x)-sen(x)}{2x}=\frac{0}{0}=$$

$$\underset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-(1+tg^2(x))-\cos(x)}{2}=\frac{-2}{2}=-1$$

PAU Junio 2006 (Prueba A) C-3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos(2x))}{x^2}=\frac{0}{0}\underset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{2\cdot sen(2x)}{\cos(2x)}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-tg(2x)}{x}=\frac{0}{0}\underset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-2(1+tg^2(2x))}{1}=-2$$

PAU Junio 2006 (Prueba B)C-4. Calcular a y b para que el límite sea 1:

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax^2+bx+1-\cos(x)}{sen(x^2)}=\frac{0}{0}\underset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2ax+b+sen(x)}{2x\cdot\cos(x^2)}=\frac{b}{0}(b=0\ \ para\ \lim ite\neq\infty)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2ax+sen(x)}{2x\cdot\cos(x^2)}=\frac{0}{0}\underset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2a+\cos(x)}{2\cos(x^2)-4x^2sen(x^2)}=\frac{2a+1}{2}=1\ \to a=1/2$$

PAU Septiembre 2004 (Prueba A) C-3

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{tg(2x)}{tg(6x)}=\frac{0}{0}\underset{L'H}{=}\lim_{x\to\pi/2}\frac{2\cdot(1+tg^2(2x))}{6\cdot(1+tg^2(6x))}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{(1+tg^2(2x))}{3\cdot(1+tg^2(6x))}=\frac{1}{3}$$

PAU Junio 2004 (Prueba B) C-1

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{sen(x)}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{sen(x)-x}{x\cdot sen(x)}\right)=\frac{0}{0}\underset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{sen(x)+x\cos(x)}=\frac{0}{0}=$$

$$\underset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-sen(x)}{\cos(x)+\cos(x)-xsen(x)}=\frac{0}{2}=0$$

PAU Septiembre 2005 (Prueba A) C-4. Calcular λ para que el límite valga -1:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen(x^2)}{\cos^2(\lambda x)-1}=-1\ \rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen(x^2)}{\cos^2(\lambda x)-1}=\frac{0}{0}\underset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot x\cdot\cos(x^2)}{-2\cdot\lambda\cdot sen(\lambda x)\cdot\cos(\lambda x)}=\frac{0}{0}$$

$$\underset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\cos(x^2)-4x^2sen(x^2)}{2\cdot\lambda^2-4\cdot\lambda^2\cdot\cos^2(\lambda x)}=\frac{2}{-2\lambda^2}=-1$$

$\rightarrow\lambda^2=1\ \ \lambda=\pm 1.$

PAU Septiembre 2005 (Prueba B) C-3

$$\lim_{x\to 0}\ln(x)\cdot sen(x)=\infty\cdot 0=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x)}{\frac{1}{sen(x)}}=\frac{\infty}{\infty}\underset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos(x)}{sen^2(x)}}=\lim_{x\to 0}-\frac{sen^2(x)}{x\cos(x)}=\frac{0}{0}=$$

$$\underset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}-\frac{2sen(x)\cdot\cos(x)}{\cos(x)-xsen(x)}=-\frac{0}{1}=0$$

PAU Junio 2005 (Prueba A) C-3

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\ln(x)}{e^x}=\frac{\infty}{\infty}\underset{L'H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)+1}{e^x}=\frac{\infty}{\infty}\underset{L'H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{e^x}=\frac{0}{\infty}=0$$

PAU Junio 2007 (Prueba A). C-2

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)=\infty-\infty=\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}=\frac{0}{0}\underset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{(1+x)\ln(1+x)+x}=\frac{0}{0}\underset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\ln(1+x)+\frac{1+x}{1+x}+1}=\frac{1}{2}$$

PAU Septiembre 2007 (Prueba B) C-4

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-e^{-x})^2}{x^2}=\frac{0}{0}\underset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot(e^x-e^{-x})(e^x+e^{-x})}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{2(e^{2x}-e^{-2x})}{2x}=\frac{0}{0}\underset{L'H}{=}.$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4\cdot(e^{2x}+e^{-2x})}{2}=4$$

PAU Junio 2008 (Prueba A). C-1:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen^2(2x)}{x^3+x^2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot sen(2x)\cdot\cos(2x)\cdot 2}{3x^2+2x}=\frac{0}{0}\underset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{4\left(2\cdot\cos^2(2x)-2\cdot sen^2(2x)\right)}{6x+2}=\frac{8}{2}=4$$

PAU Septiembre 2008 (Prueba B). C-3: Calcular a para que el límite sea 8

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1-ax}{x^2}=\frac{0}{0}\underset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{a\cdot e^{ax}-a}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{a(e^{ax}-1)}{2x}=\frac{0}{0}\underset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{a^2\cdot e^{ax}}{2}=\frac{a^2}{2}=8$$

a=±4

TEMA 5. REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES

Contexto con la P.A.U.

En este tema aplicaremos lo visto en los temas anteriores para la representación gráfica de las funciones. En el examen de la PAU no se suelen pedir todos los pasos que estudiaremos para la representación de la función, por lo general tendremos que esbozar la gráfica a partir de:

- Monotonía o Crecimiento
- Curvatura
- Asíntotas

Por lo general es suficiente con estas tres pautas el esbozo de la gráfica, si bien se recomienda, aunque no lo pida el examen calcular el dominio.

Las funciones que suelen representarse son:

- Funciones fraccionales, la mayor dificultad es en la segunda derivada, la cual hay que factorizar para calcular los valores que la anulan (puntos de inflexión).
- Funciones exponenciales, la mayor dificultad es resolver las distintas ecuaciones exponenciales que aparecen al igualar las derivadas. Cuando estudiemos las asíntotas horizontales y oblicuas hay que estudiar los límites tanto cuando x tiende a ∞ o a $-\infty$, ya que no siempre dan el mismo resultado, como ocurre en las funciones fraccionales. Nota: recordemos que $e^{f(x)}$ siempre es mayor que cero, con independencia de f(x).
- Funciones logarítmicas, cuyas complicaciones con el cálculo de las asíntotas son las mismas que las exponenciales. También es importante el cálculo del dominio; recordemos que los puntos del dominio son aquellos en los que el argumento del logaritmo es positivo.
- Funciones trigonométricas: donde lo más complicado es resolver las ecuaciones trigonométricas. Se recomienda ver el tema de ecuaciones trigonométricas del curso anterior en cualquier libro de primero. También es importante calcular el periodo de la función, ya que a partir del mismo la función se repite.

ANEXO I: Resolución de ecuaciones logarítmicas y exponenciales

a) ***Exponenciales***: para quitar la incógnita del exponente tomamos logaritmos a ambos lados de la igualdad
b) ***Logaritmos***: agrupamos todos los logaritmos en uno a partir de las propiedades de los logaritmos. Para quitar la incógnita del logaritmo tomamos exponente a ambos lados de la igualdad.

Ejemplos:

$$2e^{x^2+1}=15 \to e^{x^2+1}=\frac{15}{2} \to x^2+1=\ln(15/2) \to x=\pm\sqrt{\ln(15/2)-1}$$

$$\ln(x+1)-\ln(x)=4 \to \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)=4 \to \frac{x+1}{x}=e^4 \to x=\frac{-1}{1-e^4}$$

ANEXO II: Resolución de ecuaciones trigonométricas

Para resolver ecuaciones trigonométricas lo más importante es expresar todas las razones trigonométricas en función de una sola de ellas aplicando las igualdades:

a) $sen^2(x)+cos^2(x)=1$
b) $tg(x)=sen(x)/cos(x)$
c) $1+tg^2(x)=1/cos^2(x)$

Cuando los argumentos de las razones son diferentes (es decir x, 2x…) hay que aplicar las transformaciones de las suma de razones trigonométricas en productos, ángulos dobles, etc. No trataremos al corresponder al curso anterior. Generalmente en los problemas de selectividad estas ecuaciones con distinto argumento no aparecen.

Ejemplo: ***sen(x)+cos(x)=1***

Pongamos sen(x) en función de cos(x) (o al revés)→ $sen(x)=\sqrt{1-cos^2x}$

$\sqrt{1-cos^2x}+\cos(x)=1$→cambio variable cos(x)=y →$\sqrt{1-y^2}+y=1$→
$\sqrt{1-y^2}=1-y$ → (elevando al cuadrado) $1-y^2=1-2y+y^2$ →$2y^2-2y=0$ →$y=\begin{cases}0\\1\end{cases}$,

1) cos(x)=0 → $x=\begin{cases}90+360k\\270+360k\end{cases}$
2) cos(x)=1 → x=0+360k

Tenemos que comprobar que solución es válida (al elevar al cuadrado surgen a veces soluciones no válidad):

- x=90 → sen(90)+cos(90)=1 **válida**
- x=270 → sen(270)+cos(270)=-1, no válida
- x=0 → sen(0)+cos(0)=1, **válida**

ANEXO II: periodo de funciones trigonométricas

1. El periodo de una suma o multiplicación de funciones trigonométricas es el mayor de los periodos
2. El periodo de sen(kx), cos(kx), tg(kx) es $T=2\pi/k$

Ejemplo: y=f(x)=sen(x)·cos(4x)+cos(2x) → $T_1=2\pi$, $T_2=\pi/2$, $T_3=\pi$ → f(x) periodo $T=2\pi$.

1. Representación de funciones

Mediante el ordenador o algunas calculadoras representar una función es sencillo, pero sin estas herramientas debemos estudiar características previas de la función antes de representarla. Los pasos son:

- El dominio
- Puntos de corte con los ejes
- Signo de la función
- Simetría y periodicidad
- Asíntotas
- Monotonía y puntos relativos
- Curvatura y puntos de inflexión

1.1. Dominio

El primer paso es ver donde está definida la función, es decir los posibles valores que puede tomar la variable independiente (x). Recordemos que el domino de los polinomios son todos los reales. Los casos en los que algún punto no pertenece al dominio son: (ver tema 1)

a) Se anulan denominadores → asíntota vertical en el punto

b) No existen logaritmo de números negativos

c) No existe el logaritmo del cero→ asíntota vertical, cuando el logaritmo en el denominador cuando el argumento tiende a 0 por la derecha ($\log(0^+= -\infty$)

d) No existen raíces cuadradas o de orden par para números negativos

1.2. Punto de corte con los ejes

1.2.1. Con el eje OX

Corta al el eje OX cuando y=0. Obtendremos los puntos de corte con este eje igualando la función a cero, viendo los puntos $x_1,x_2,\ldots\in Dom(f(x))$ que anulan la función. Los puntos $(x_1,0)$, $(x_2,0)\ldots$ son los puntos de corte con el eje OX

1.2.2. Con el eje OY

Corta al el eje OY cuando x=0, siempre que $0\in Dom(f(x))$. Sólo puede cortarse una vez con el eje OY. El punto de corte con el eje OY es $(0,f(0))$

Ejemplo: $f(x)=\ln(x^2-3)$

Con eje OX (y=0) → $0=\ln(x^2-3)$ → $x^2-3=e^0=1$ →$x^2=4$ → $x=\pm2$ $P_1(2,0)$ y $P_2(-2,0)$

Con eje OY(x=0)→$0\notin Dom(f(x))$, luego no corta con el eje OY

1.3. Signo de la función

Estudiar el signo de la función es ver los valores de x en los cuales f(x)>0 o f(x)<0. Para obtener estos intervalos basta con estudiar el signo entre los intervalos de los valores de x que anulan la función (corte eje OX) y los puntos que no pertenecen al dominio. En el caso que la función definida a trozos, también se toman los puntos donde cambia de expresión analítica.

1.4. Periodicidad y simetría

1.4.1 Periodicidad:

Las funciones son periódicas cuando se repiten cada cierto intervalo, T, llamado periodo de la función (f(x)=f(x+nT)). Los ejemplos clásicos son las funciones trigonométricas.

Ejemplo:

sen(2x) su periodo es T=π, pues sen(2(x+nπ))=sen(2x+2πn)=sen(2x)

1.4.2 Simetría

La simetría puede ser de dos tipos:

a) *Simetría par o respecto al eje OY*, la función es igual a la izquierda y derecha del eje OY. Es como si este eje hiciera de espejo. Ocurre cuando se cumple:

f(x)=f(-x)

b) *Simetría impar o respecto al origen*, la función a la derecha del eje OY es igual que a la izquierda pero con distinto signo. Ocurre cuando se cumple:

-f(x)=f(-x)

Ejemplo: estudiar simetría de las siguientes funciones: $f(x)=x^4-3x^2+6$, $g(x)=x^5-2x^3-x$, $h(x)=\frac{x^3-x}{x^5+5x}$, $i(x)=\frac{x^2-1}{x^3+x}$, $j(x)=x^3-3x^2+2x+1$

a) $f(-x)=(-x)^4-3(-x)^2+6= x^4-3x^2+6=f(x)$ Par

b) $g(-x)= (-x)^5-2(-x)^3-(-x)= -x^5+2x^3+x=-(x^5-2x^3-x)=-g(x)$ Impar

c) $h(-x)= \frac{(-x)^3-(-x)}{(-x)^5+5(-x)}=\frac{-(x^3-x)}{-(x^5+5x)}=\frac{x^3-x}{x^5+5x}=h(x)$ Par

d) $i(-x)= \frac{(-x)^2-1}{(-x)^3+(-x)}=-\frac{x^2-1}{x^3+x}=-i(x)$ Impar

e) $j(-x)=(-x)^3-3(-x)^2+2(-x)+1=-x^3-3x^2-2x+1\neq j(x)$ y de $-j(x)$ No simetría

Nota: si no hay denominadores será par cuando sólo tenemos expresiones x^n con n par (recordar que $5=5x^0$, luego es par). Será impar cuando sólo tenemos expresiones x^n con n impar; si están mezclados términos impares y pares la función no tendrá simetría.

Si tenemos denominadores, para que sea simétrica tanto el denominador como el numerador han de ser simétricos. Así:

- si numerador y denominador tienen la misma simetría (los dos par o los dos impar)→la función simetría par (ver h(x))

- si numerador y denominador tienen distinta simetría (uno par y otro impar) entonces →la función simetría impar (ver i(x))

1.5 Asíntotas

Vertical

La función f(x) tiene asíntota vertical en x_0 cuando alguno de los límites laterales o los dos son infinitos:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty \ , \ \lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty \ , \ \lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty \ , \ \lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty \ ,$$

La asíntota vertical tiene de expresión analítica $x=x_0$. La función f(x) se aproxima infinitamente a la recta $x=x_0$. En la práctica las asíntotas son los puntos en los que se anula el denominador o se anula un logaritmo (cuando está en el numerador).

Una función puede tener varias asíntotas verticales y nunca se cortan por la gráfica.

Horizontal

Una función f(x) tiene una asíntota horizontal en $y=y_0$ si se cumple una de las siguientes condiciones (o las dos):

a) $\lim_{x\to\infty} f(x) = y_0$ (tiende a la recta $y=y_0$ cuando $x\to\infty$)

b) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = y_0$ (tiende a la recta $y=y_0$ cuando $x\to-\infty$)

Cuando la función tiene una asíntota horizontal se aproxima infinitamente a la recta $y=y_0$ cuando x tiende a $+\infty$, $-\infty$ o los dos.

Una función tiene como máximo 2 asíntotas horizontales, una cuando $x\to\infty$ y otra cuando $x\to-\infty$, aunque por lo general coinciden (funciones de fracciones algebraicas).

Las funciones que son fracciones algebraicas ($\frac{p(x)}{q(x)}$) tienen asíntotas horizontales cuando el grado del numerador es menor al del denominador (asíntota x=0) o igual (asíntota $x=a_n/b_n$,con a_n y b_n coeficientes de mayor grado de p(x) y q(x) respectivamente) .

Oblicua

Una función f(x) tiene una asíntota oblicua cuando se aproxima infinitamente a una recta de la forma y=mx+n (m≠0). Existe si se el límite $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ existe y es distinto de $\pm\infty$ y de 0. Si esto ocurre:

m= $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$

n= $\lim_{x\to\infty} f(x) - mx \rightarrow$ por lo general, si m≠0 y m≠∞ entonces n es un número real. Pero hay algún caso donde n es ∞; si esto ocurre f(x) no tiene asíntota oblicua (PAU Septiembre 2008)

Si una función tiene asíntota horizontal no tiene asíntota oblicua, por lo que no sería necesario su estudio. En la práctica las asíntotas oblicuas en las funciones fraccionarias ocurren cuando el grado del denominador es un grado inferior al del numerador

Nota: las asíntotas horizontales y oblicuas pueden ser cortadas por la gráfica de la función

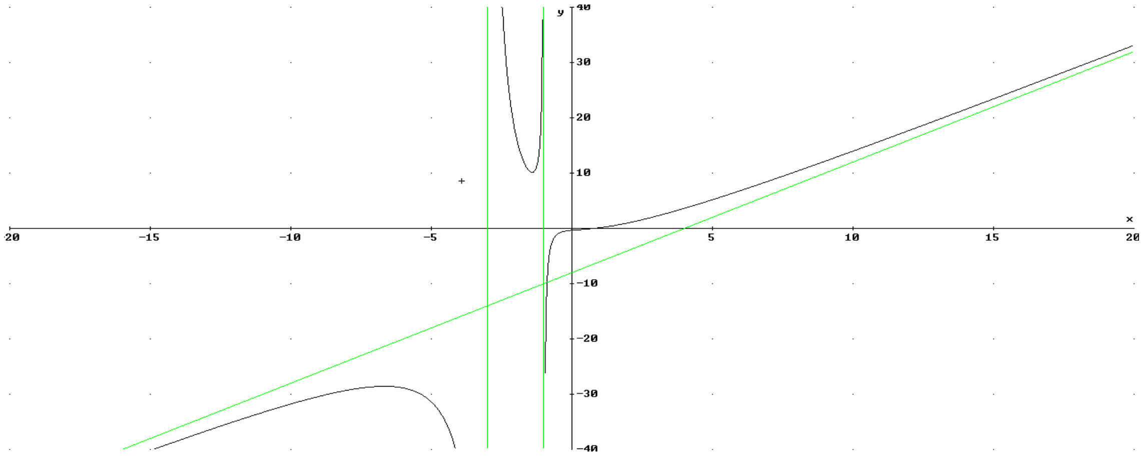
Ejemplo: calcular las asíntotas de las siguientes funciones

a) f(x)=$\dfrac{2x^3-1}{x^2+4x+3}$

- Asíntota Vertical: $x^2+4x+3=0 \rightarrow$ x=-1, x=-3.
- Asíntota Horizontal: $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$. No asíntota horizontal
- Asíntota Oblicua: $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{2x^3-1}{x^2+4x+3}}{x}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-1}{x^3+4x^2+3x}=2=m$

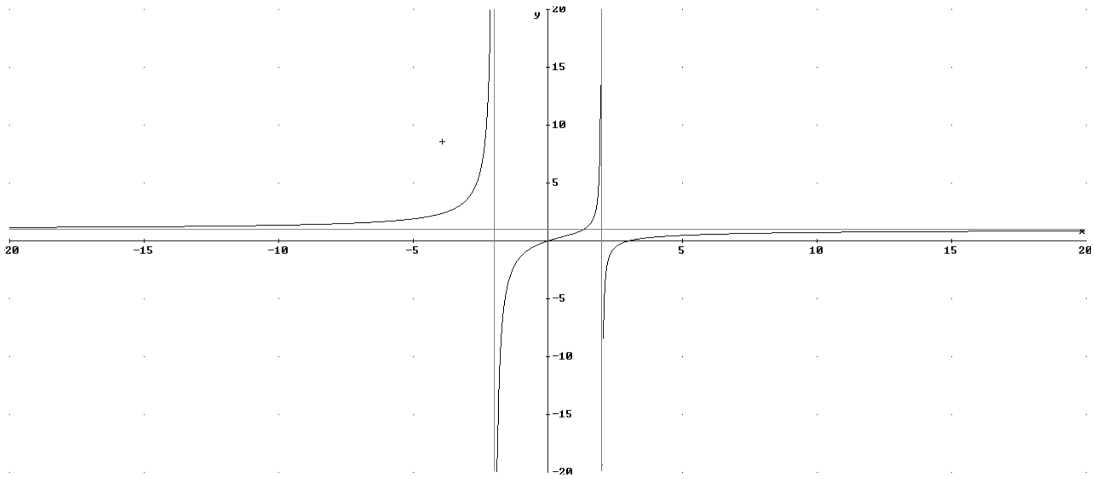
$$n=\lim_{x\to\infty} f(x)-mx=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-1}{x^2+4x+3}-2x=\lim_{x\to\infty}\frac{-8x^2-6x-1}{x^2+4x+3}=-8.$$

Luego la asíntota oblicua es y=2x-8



b) g(x)= $\dfrac{x^2-3x}{x^2-4}$

- Asíntota Vertical: $x^2-4=0 \rightarrow$ x= -2, x=2
- Asíntota horizontal: $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x}{x^2-4}=1$, $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+2x}{x^2-4}=1 \rightarrow$ y=1
- No puede tener asíntota oblicua al tener horizontal



c) h(x)=$\dfrac{\ln(x)}{x-2}$

- Asíntota Vertical:

x=0 (se anula el logaritmo) $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(x)}{x-2}=\dfrac{\infty}{-1}=-\infty$

x=2 (se anula el denominador) $\lim_{x\to 2}\dfrac{\ln(x)}{x-2}=\dfrac{\ln(2)}{0}=\begin{cases}\lim_{x\to 2^+}\dfrac{\ln(x)}{x-2}=\dfrac{\ln(2)}{0^+}=+\infty\\ \lim_{x\to 2^-}\dfrac{\ln(x)}{x-2}=\dfrac{\ln(2)}{0^-}=-\infty\end{cases}$

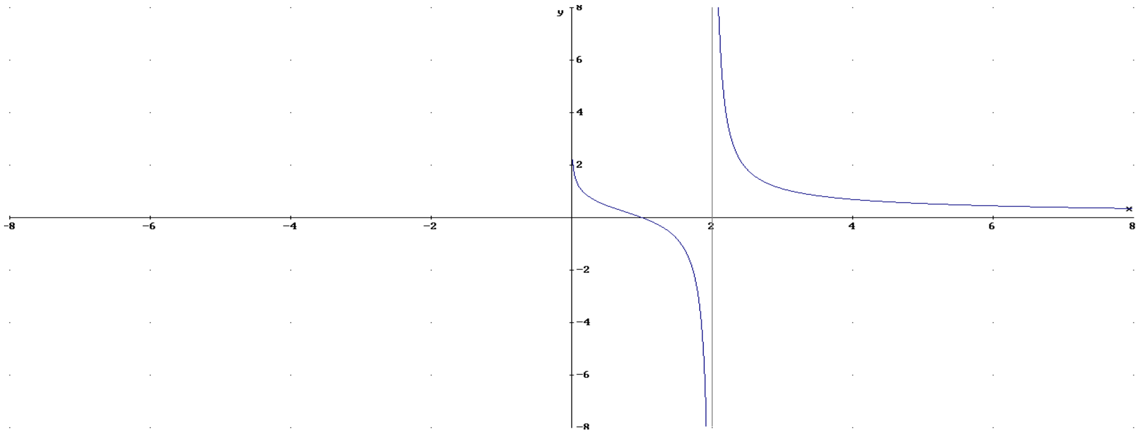
- Asíntota Horizontal $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x)}{x-2}=\dfrac{\infty}{\infty}\underset{L'H}{=}\lim_{x\to\infty}\dfrac{1/x}{1}=0$ y=0 (cuando x→∞)

$\lim_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(x)}{x-2}$ no existen logaritmos negativos

Luego la asíntota horizontal es y=0, pero sólo existe cuando x→+∞

- No asíntota oblicua cuando x→+∞ al tener horizontal. Veamos cuando x→-∞

$\lim_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(x)}{x^2-2x}$ no tiene



1.6. Primera derivada. Crecimiento y puntos relativos

Para estudiar el crecimiento y decrecimiento y los puntos relativos de una función f(x) tendremos que estudiar el signo de la primera derivada, f'(x). Como vimos en el tema anterior:

a) si f´(x)>0 creciente
b) si f´(x)<0 decreciente
c) si f´(x)=0 punto relativo (si f´´(x)≠0)

En la práctica igualamos f´(x)=0 y estudiamos el signo de f´(x) entre los puntos donde se anula la derivada y los valores que no pertenecen al dominio. Si la función está definida a trozos también tendremos que añadir, entre estos puntos, aquellos donde f(x) cambia de expresión analítica

1.7. Segunda derivada. Curvatura y Puntos de Inflexión

Para estudiar la curvatura y los puntos de inflexión de una función f(x) tendremos que estudiar el signo de la segunda derivada, f''(x). Como vimos en el tema anterior:

a) si $f''(x)>0$ cóncava hacia arriba

b) si $f''(x)<0$ cóncava hacia abajo

a) si $f''(x)=0$ punto de inflexión (si $f'''(x)\neq 0$)

En la práctica igualamos $f''(x)=0$ y estudiamos el signo de $f''(x)$ entre los puntos donde se anula la 2ª derivada y los valores que no pertenecen al dominio. Si la función está definida a trozos también tendremos que añadir, entre estos puntos, aquellos donde cambia de expresión analítica

1.8. Representación de la función

A partir del estudio realizado en los anteriores apartados no debería ser difícil representar un boceto de la función.

Ejemplos:

1) f(x)= $\boldsymbol{\frac{x-1}{x+1}}$

I) <u>Dominio</u>=R-{-1}

II) <u>Puntos de cortes:</u>

a) Con el eje OY: $x=0\in Dom(f(x))$ → f(0)=-1   **P_c(0,-1)**

b) Con eje OX: y=0 → f(x)=0 x=1.   **P_c(1,0)**

III) <u>Signo de la función:</u> se estudia el signo entre los puntos de corte con el eje OY y los puntos que no pertenecen al dominio:

	$(-\infty,-1)$	-1	(-1,1)	1	$(1,\infty)$
Signo f(x)	+	$\notin$	-	0	+
				$P_c(1,0)$	

IV) <u>Simetría y Periodicidad</u>

No periódica

Simetría → $f(-x)=\frac{-x-1}{-x+1}\neq f(x)$ y $\neq -f(x)$ No simétrica

V) <u>Asíntotas</u>

a) Asíntota Vertical: **x=-1**

b) Asíntota Horizontal: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x+1} = 1$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x-1}{x+1} = 1$ →

y=1 (cuando x→∞ y x→-∞)

c) Asíntota oblicua: no tiene al tener horizontal

VI) Primera derivada, crecimiento y puntos relativos

$f'(x)=\frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}$

Vemos que siempre es positiva para todo valor de x

	(-∞,-1)	-1	(-1,∞)
Signo f'(x)	+	No existe $-1\notin$ Dom(f)	+
Crecimiento	↗		↗
		No Punto relativo	

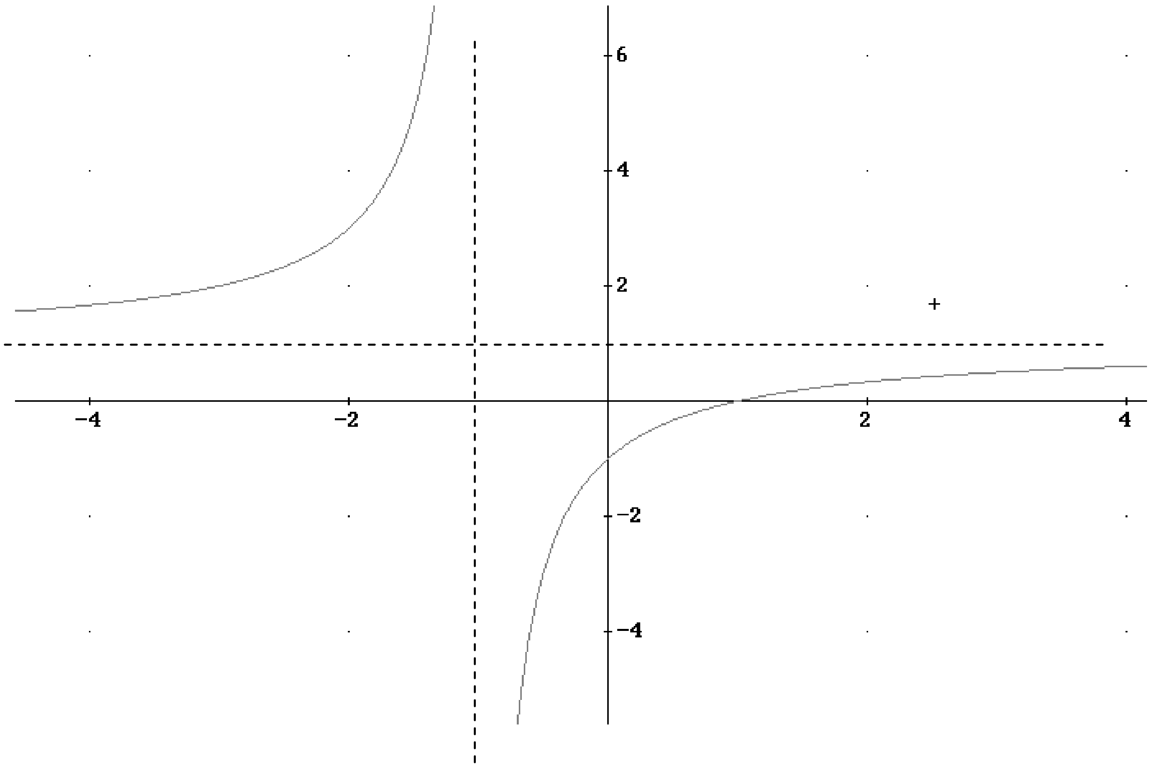
VII) Segunda derivada, curvatura y puntos de inflexión

$f''(x)=\frac{-2(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{-2}{(x+1)^3}$

El signo de la segunda derivada es:

Intevalo	(-∞,-1)	-1	(-1,∞)
Signo f''(x)	+	No existe $-1\notin$ Dom(f)	-
Cocavidad	∪		∩
		No P.I.	

VIII) Representación:



2) y=f(x)= $\frac{x^3}{x^2-4}$

I) Dominio

x^2-4=0 **Dom(f(x))=R-{-2,2}**

II) Puntos de corte con los ejes:

a) Eje OY (x=0), como 0∈Dom(f(x)) P_c(0,f(0)) → **P_c(0,0)**

b) Eje OX (y=0). x^3=0 → **P_c(0,0)**

III) Signo de la función:

Puntos representativos x=-2,0,2

Intervalo	(-∞,-2)	-2	(-2,0)	0	(0,2)	2	(2,∞)
Signo f(x)	-	∉	+	0	-	∉	+
				P_c(0,0)			

IV) Simetría y Periodicidad.

No periódica

Simetría: f(-x)= $\frac{-x^3}{x^2-4}=-f(x)$ → simetría impar, respecto del origen

V) Asíntotas

a) Asíntotas Vertical: **x=-2, x=2**

b) Asíntota Horizontal: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x^2-4}=\pm\infty$ No asíntota Horizontal

c) Asíntota Oblicua: $m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^3-4x}=1$,n= $\lim_{x\to\infty} f(x)-x=\lim_{x\to\infty}\frac{-4x}{x^2-4}=0$

y=x

VI) Primera derivada Crecimiento y Puntos relativos:

y=f´(x)= $\frac{x^4-12x^2}{(x^2-4)^2}$, f'(x)=0 → x^4-12x^2=0 x=0 (doble, será PI), x= $\pm\sqrt{12}$

	(-∞, $-\sqrt{12}$)	$-\sqrt{12}$	($-\sqrt{12}$,-2)	-2	(-2,0)	0	(0,2)	2	(2, $\sqrt{12}$)	$\sqrt{12}$	($\sqrt{12}$,∞)
f'(x)	+	0	-	∉	-	0	-	∉	-	0	+
crec	↗	**M(** $-\sqrt{12}$, $-\frac{3}{2}\sqrt{12}$ **)**	↘		↘	PI	↘		↘	**m(** $\sqrt{12}$, $\frac{3}{2}\sqrt{12}$ **)**	↗

M(-√12,-1.5√12), m(√12,1.5√12)

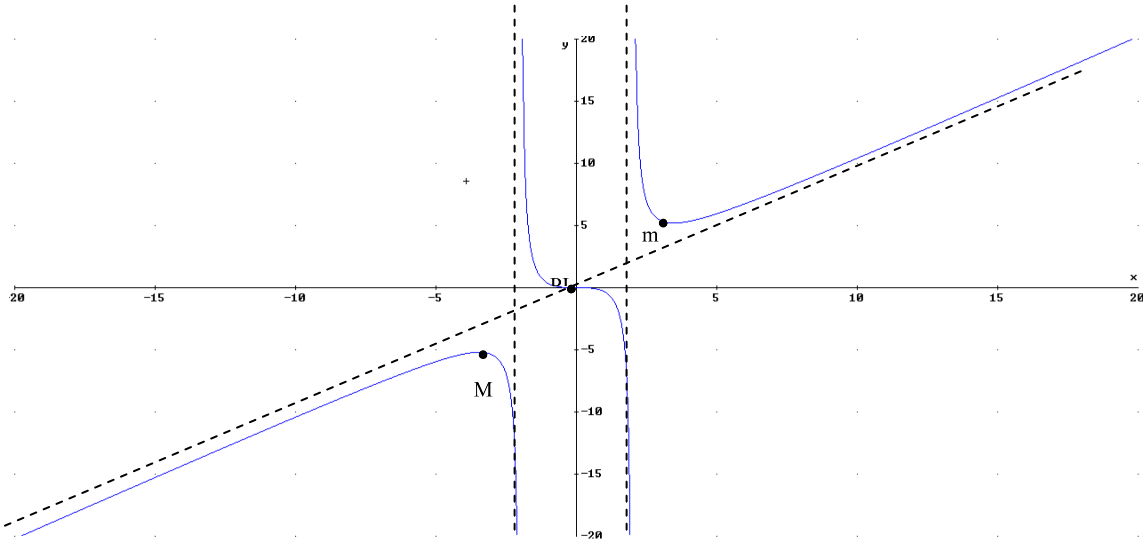
VII) Segunda derivada, curvatura y Puntos de Inflexión:

y=f´´(x)= $\frac{8x^5+64x^3-384x}{(x^2-4)^4}=\frac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$, f´´(x)=0 → x=0

El signo de la segunda derivada es:

Intervalo	(-∞,-2)	-2	(-2,0)	0	(0,2)	2	(2,∞)
Signo f ''(x)	-	∉	+	0	-	∉	+
	∩		∪	**PI(0,0)**	∩		∪

VIII: Representación



3) y=f(x)= $\ln(x^3-2x)$

I) Dominio:

x^3-2x>0 → x(x-2)(x+2)>0

Intervalo	(-∞,-$\sqrt{2}$)	-$\sqrt{2}$	(-$\sqrt{2}$,0)	0	(0, $\sqrt{2}$)	$\sqrt{2}$	($\sqrt{2}$,∞)
Signo x^3-4x	-	0	+	0	-	0	+
	No Dom	No Dom	Dom	No Dom	No Dom	No dom	Dom

Dom(f(x))=(-$\sqrt{2}$,0)∪($\sqrt{2}$,∞)

II) Corte con los ejes:

a) Corte con el eje OY (x=0∉ Dom(f(x)))→ No corte eje OX

b) Corte con el eje OX (y=0) → f(x)=$\ln(x^3-2x)$=0 →x^3-2x=1, x=-1,x=$\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ los tres puntos pertenecen al dominio (comprobar con la calculadora)

P_c(-1,0), P_c($\frac{1+\sqrt{5}}{2}$,0), P_c($\frac{1-\sqrt{5}}{2}$,0)

III) Signo de la función:

x=-$\sqrt{2}$, $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$,-1,0, $\sqrt{2}$, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$(-\sqrt{2},\frac{1-\sqrt{5}}{2})$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$(\frac{1-\sqrt{5}}{2},-1)$	-1	(-1,0)	0	$(0,\sqrt{2})$	$\sqrt{2}$	$(\sqrt{2},\frac{1+\sqrt{5}}{2})$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$(\frac{1+\sqrt{5}}{2},\infty)$
-	0	+	0	-	$\notin$	$\notin$	$\notin$	-	0	+
	$P_c(\frac{1-\sqrt{5}}{2},0)$		$P_c(-1,0)$						$P_c(\frac{1+\sqrt{5}}{2},0)$	

IV) <u>Simetría y periodicidad</u>

a) No periódica

b) $f(-x)=\ln(-x^3+2x)\neq f(x)$ y $\neq -f(x)$ No simétrica

V) <u>Asíntotas</u>

a) Vertical (donde se anula el logaritmo)→ **$x=-\sqrt{2}$, $x=\sqrt{2}$, $x=0$**

b) Horizontal $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=no\ existe$ No horizontal

c) Oblicua $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{\infty}{\infty}\underset{L'H}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2-2}{x^3-2x}}{1}=0$ No oblicua

VI) <u>Primera derivada, crecimiento, puntos relativos</u>

$f'(x)=\frac{3x^2-2}{x^3-2x}$ → $f'(x)=0$, $3x^2-2=0$ → $x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$ → $-\frac{\sqrt{6}}{3}\in$ Dom(f(x)), pero $\frac{\sqrt{6}}{3}\notin$ Dom(f(x))

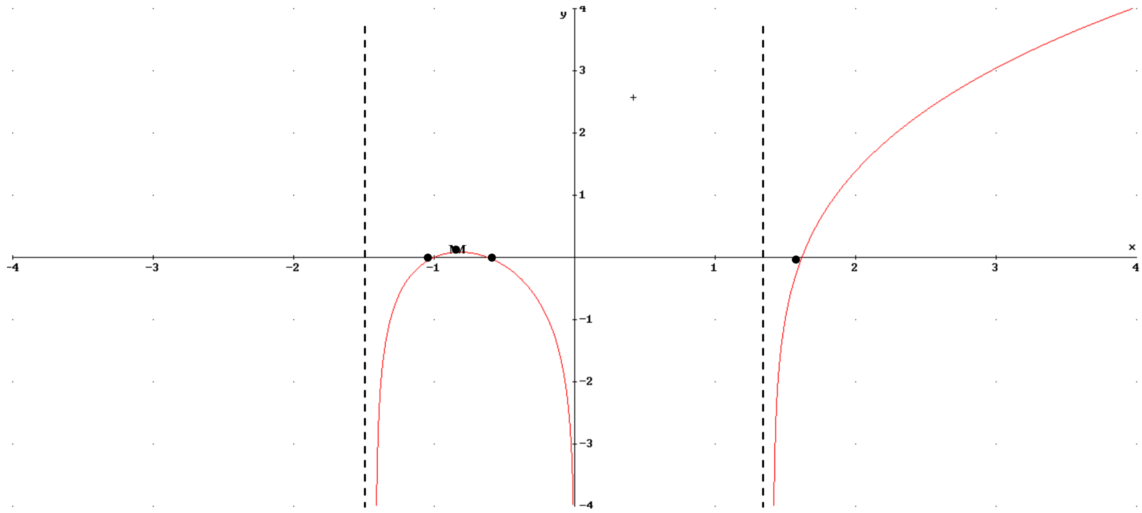
	$(-\sqrt{2},-\frac{\sqrt{6}}{3})$	$-\frac{\sqrt{6}}{3}$	$(-\frac{\sqrt{6}}{3},0)$	0	$(\sqrt{2},\infty)$
Signo f'(x)	+	0	-	$\notin$	+
Crecimiento	↗	$M(-\frac{\sqrt{6}}{3},-\frac{\ln(27/32)}{2})$	↘		↗

VI) <u>Segunda derivada, curvatura y puntos de inflexión</u>

$f''(x)=-\frac{3x^4+4}{(x^3-2x)^2}$ → $3x^4+4=0$ No solución, no puntos de inflexión

	$(-\sqrt{2},0)$	0	$\sqrt{2}$	$(\sqrt{2},\infty)$
Signo f''(x)	-	$\notin$	$\notin$	-
Curvatura	$\cap$			$\cap$

VII) Representación:



Ejercicios PAU

Septiembre 2006, Prueba A

PR-2.- a) Estúdiense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f(x)=xe^{-x}, sus máximos y mínimos relativos, asíntotas y puntos de inflexión. Demuéstrese que para todo *x* se tiene que f(x)≤1/e (2 puntos). b) Pruébese que la ecuación e^{x} = 3x tiene sólo una solución en $(-\infty,1]$. (1 punto)

a) Dom(f(x))=R

1) Asíntotas:

No verticales

Horizontales: $\lim\limits_{x\to\infty} xe^{-x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \underset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{e^x} = 0$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-x} = \infty\cdot\infty$

y=0 (sólo si x tiende a +∞)

Oblicua: no oblicua

2) Crecimiento, puntos relativos

f´(x)=e^{-x}-x·e^{-x} → e^{-x}-x·e^{-x}=0 e^{-x}(1-x)=0 → x=1

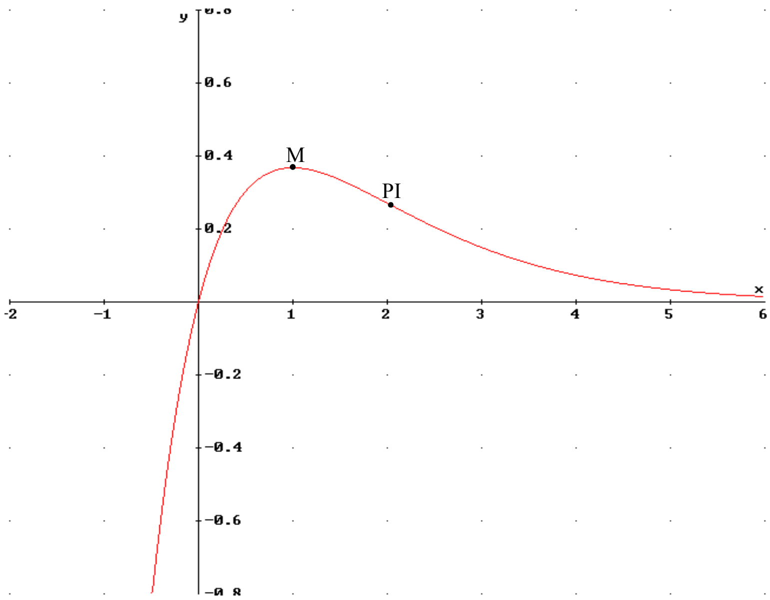
	(-∞,1)	1	(1,∞)
Signo f´(x)	+	0	-
Crecimiento	↗	M(1,e^{-1})	↘

3) Curvatura y Puntos de Inflexión

f´´(x)=-e^{-x}-e^{-x}+xe^{-x}=e^{-x}(-2+x)→ e^{-x}(-2+x)=0 → x=2

	(-∞,2)	2	(2,∞)
Signo f´´(x)	-	0	+
Crecimiento	∩	PI(2,2e^{-2})	∪

4) Representación gráfica:



Vemos que el máximo absoluto es el máximo relativo $(1,e^{-1})$, luego $f(x) \leq e^{-1}$

b) Decir si la ecuación $xe^{-x} = 3$ alguna solución en solución $(-\infty,1] \rightarrow g(x)=x\cdot e^{x}-3=0$

Aplicamos Bolzano:

· g(x) continua en $(-\infty,1]$

· $g(1)=e-3<0$, $g(0)=1>0$

Aplicando Bolzano $\exists c \in (-\infty,1) : g(c) = 0$

Veamos que sólo hay una: $g'(x)=e^{x}-3 \rightarrow e^{x}=3 \rightarrow x=\ln(3)=1,1$

	$(-\infty,\ln 3)$	ln3	$(\ln 3,\infty)$
Signo g´(x)	-	0	+
Crecimiento	↘	m(ln3,-0,3)	↗

Luego entre $(-\infty,1)$ la función decrece cortando en un único punto c en el eje OX.

Septiembre 2006. Prueba B

PR-2. Sea f(x)=$\frac{4-2x^2}{x}$

a) Determínese el dominio de *f*, sus asíntotas, simetrías y máximos y mínimos relativos. Esbócese su gráfica. (1,75 puntos)

1) Dom(f(x))=R-{0}

2) Asíntotas: Vertical **x=0**

Horizontal: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4-2x^2}{x}=-\infty \quad \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4-2x^2}{x}=\infty$

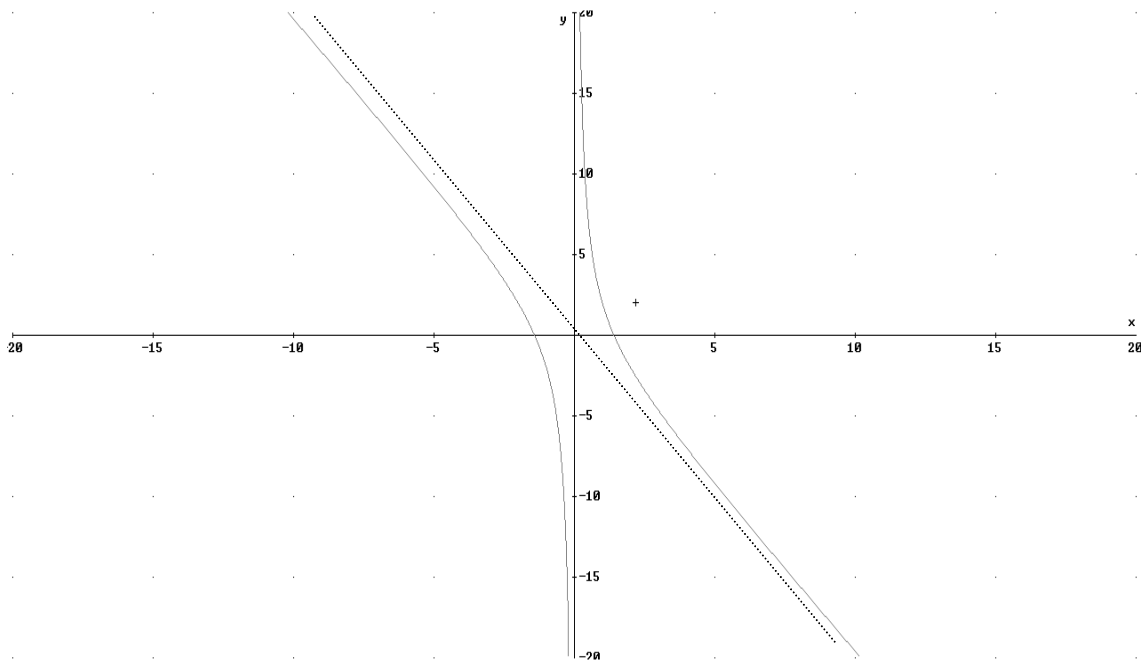
Oblicua: m=$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4-2x^2}{x^2}=-2$ n=$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4-2x^2}{x}+2x=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x}=0$ **y=-2x**

3) Simetrías: f(-x)= $\frac{4-2x^2}{-x}=-f(x)$ Simetría Impar (respecto al origen)

4) Monotonía y puntos reltaivos

f´(x)= $-2\frac{(x^2+2)}{x^2}$<0 Siempre decreciente. No puntos relativos

5) Representación



Junio 2006. Prueba B

PR-2.- Dada la función $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$, se pide:

a) **Determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los de concavidad y convexidad, los puntos de inflexión y las asíntotas de *f*. Esbócese su gráfica. (2 puntos)**

1) Dominio → Dom(f(x))=R-{-1}.

2) Asíntotas → AV: **x=-1**

AH: $\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x+1}=1$, $\lim_{x\to-\infty}\frac{x-1}{x+1}=1$ **y=1**

AO: No al tener horizontal

3) Crecimiento y puntos relativos:

$f'(x)=\frac{2}{(x+1)^2}>0$ Siempre crece no puntos relativos

Intervalo	(-∞,-1)	-1	(-1,∞)
Signo f´(x)	+	∉	+
Crecimiento	↗		↗

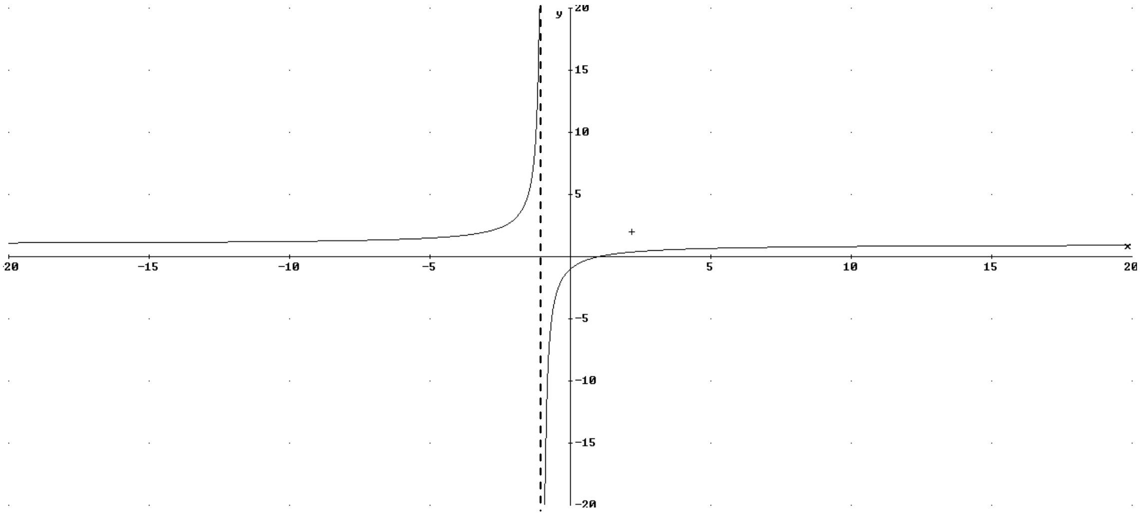
4) Curvatura y P.I.:

$f''(x)=-4\frac{(x+1)}{(x+1)^4}=-\frac{4}{(x+1)^3}$ → f''(x)≠0 (No P.I.)

	(-∞,-1)	-1	(-1,∞)
Signo f''(x)	+	∉	-
Curvatura	∪		∩

No P.I.

5) Representación



Septiembre 2005. Prueba A

PR-2.- a) Estúdiese la derivabilidad de $f(x)=\begin{cases} \ln(1+x^2) & si\ x>0 \\ x^2 & si\ x\le 0\end{cases}$, sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus puntos de inflexión. Esbócese su gráfica.

a) Continuidad: $\ln(1+x^2)$, x^2 es continua en R . Veamos en x=0

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\ln(1)=0$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=0^2=0$$

f(0)=0 → Continua. Luego podemos hacer la derivada de la función:

Derivabilidad: $f'(x)=\begin{cases} \dfrac{2x}{1+x^2}, & x>0 \\ 2x, & x<0\end{cases}$

$$f'(0^+)=\lim_{x\to 0^+} f'(x)=0$$
$$f'(0^-)=\lim_{x\to 0^-} f'(x)=0$$

Derivable→ $f'(x)=\begin{cases} \dfrac{2x}{1+x^2}, & x>0 \\ 2x, & x\le 0\end{cases}$

I) Crecimiento: igualamos la derivada a cero (cada uno de sus trozos)

· $\dfrac{2x}{1+x^2}=0$→ $x=0\notin(0,\infty)$

· 2x=0 →$x=0\in(-\infty,0]$.

Luego el único punto donde f´(x)=0 es x=0. Este punto, además, habría que introducirlo igualmente al cambiar f(x) de expresión en x=0

	(-∞,0)	0	(0,∞)
Signo f´(x)	-	0	+
Crecimiento	↘	m(0,0)	↗

2) Curvatura: como f(x) es derivable en R podemos calcular la segundad derivada

$$f''(x)=\begin{cases}\dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}, & x>0\\ 2 & \text{x}<0\end{cases}$$

Veamos si existe la segunda derivada en x=0: f''(0$^+$)= f''(0$^-$)=2:

$$f''(x)=\begin{cases}\dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}, & x>0\\ 2 & \text{x}\leq 0\end{cases}$$

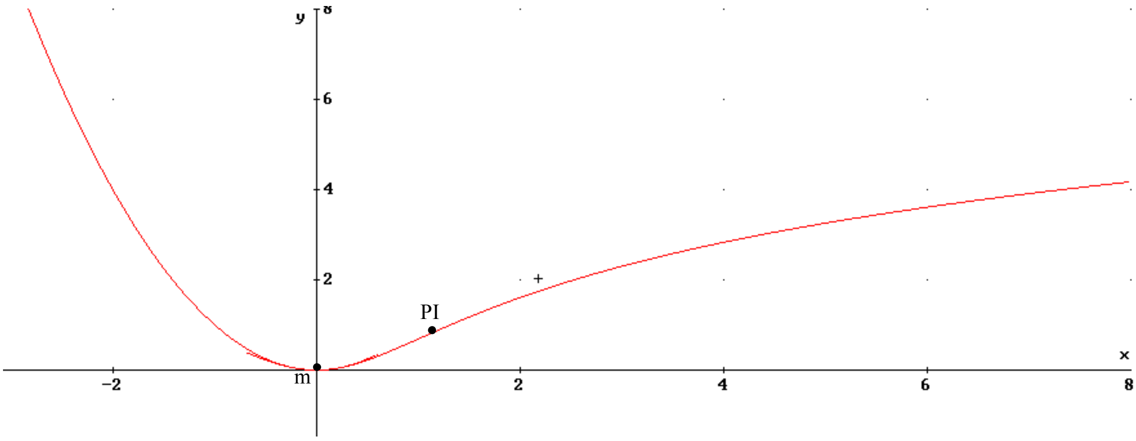
f''(x)=0, miremos los dos trozos de definición

· $\dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$=0 x=±1→ solo válido x=1, ya que x=-1$\notin$(0,∞)

· 2≠0

En los intervalos tenemos que considerar x=0 (donde cambia la expresión analítica):

Intervalo	(-∞,0)	0	(0,1)	1	(1,∞)
Signo f''(x)	+	2	+	0	-
Curvatura	∪	∪	∪	PI(1,ln2)	∩



Junio 2005. Prueba A

PR-2.- a) Calcúlense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = e^{1-x^2}$, sus extremos relativos, puntos de inflexión y asíntotas. b) Esbócese la gráfica de f

a) 1) Dom(f(x))=R

2) Asíntotas:

·Verticales: no

· Horizontales: $\lim_{x\to\infty} e^{1-x^2} = e^{-\infty} = 0$, $\lim_{x\to-\infty} e^{1-x^2} = e^{-\infty} = 0$

y=0 (cuando x→∞ y x→-∞)

· No oblicuas ya que si tiene horizontales.

3) Crecimiento y puntos relativos

$f'(x) = -2x\cdot e^{1-x^2}$ =0→x=0

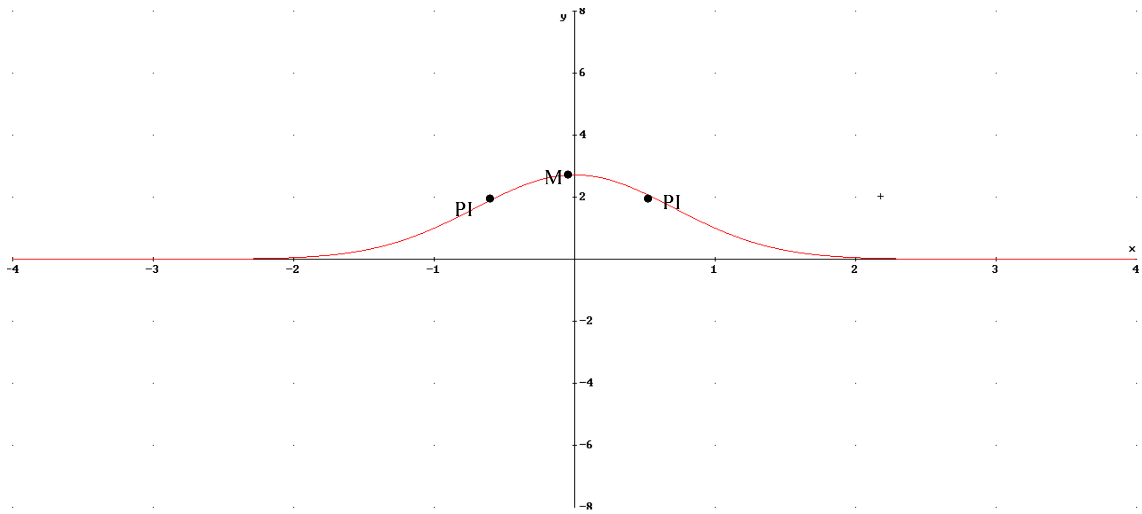
Intervalos	(-∞,0)	0	(0,∞)
Signo f'(x)	+	0	-
Crecimiento	↗	**M(0,e)**	↘

4) Curvatura:

$f''(x) = -2\cdot e^{1-x^2} + 4x^2e^{1-x^2} = e^{1-x^2}(4x^2-2) = 0$ → x=$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

Intervalo	$(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2})$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$(\frac{\sqrt{2}}{2},\infty)$
Signo f''(x)	+	0	-	0	+
Curvatura	∪	PI$(-\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{e})$	∩	PI$(\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{e})$	∪

b) Representación gráfica



Septiembre 2004-Prueba A

PR-2 Sea f la función dada por $f(x) = x^2 - 3|x| + 2$

- **a) Estúdiese la derivabilidad de f en $x = 0$ mediante la definición de derivada.**
- **b) Determínense los intervalos de monotonía de f y sus extremos relativos.**
- **c) Esbócese la gráfica de f.**

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & si \;\; x > 0 \\ x^2 + 3x + 2 & si \;\; x \leq 0 \end{cases}$

Continuidad → Sólo tenemos que estudiar la continuidad en x=0 ya que en los demás puntos es continua al ser los dos trozos polinomios

$\lim_{x \to 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \to 0^+} f(x) = 2 \\ \lim_{x \to 0^-} f(x) = 2 \end{cases}$ f(0)=2. **Continua**

Derivabilidad → al ser continua podemos definir la función f´(x)= $\begin{cases} 2x - 3 & si \;\; x > 0 \\ 2x + 3 & si \;\; x < 0 \end{cases}$

Donde tenemos que estudiar la derivabilidad en x=0:

$f'(0^+)=-3$; $f'(0^-)=3$ → **No derivable en x=0**(como ocurre en las funciones valor absoluto)

Luego al representar la gráfica en x=0 tendrá un "pico"

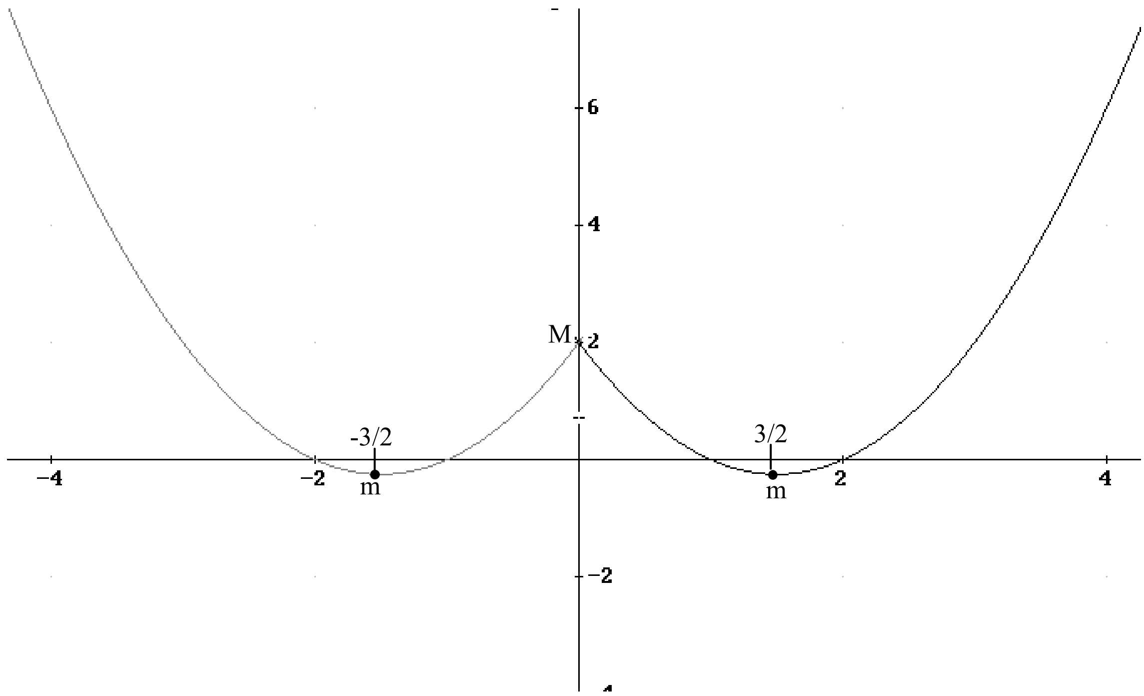
b) Crecimiento de la función → f´(x)=0: $\begin{cases} 2x-3=0 \;\; x=\dfrac{3}{2}>0 \;\; solución \\ 2x+3=0 \;\; x=\dfrac{-3}{2}<0 \;\; solución \end{cases}$.

A estos dos puntos, 3/2 y -3/2, tenemos que añadir x=0 donde f(x) cambia de expresión analítica.

Intervalo	(-∞,-3/2)	-3/2	(-3/2,0)	0	(0,3/2)	3/2	(3/2,∞)
Signo f´(x)	-	0	+	No derivable	-	0	+
Crecimiento	↘	m(-3/2,-1/4)	↗	M(0,2)	↘	m(3/2,-1/4)	↗

El punto (0,2) es un punto donde hay un cambio de pendiente, por eso no es derivable. El cambio de pendiente es tal que pasa de ser una función decreciente a creciente. Luego es un máximo relativo.

c) Podemos representarlo viendo que son dos parábolas (x^2-3x+2 cuando x>0 y x^2+3x+2 si x<0) o partir de las informaciones anteriores.



Junio 2004- Prueba A

PR-1.- Sea la función $y=2^{-2|x|}$.

a) Estúdiese su monotonía, extremos relativos y asíntotas.

$$y=f(x)=2e^{-2|x|}=\begin{cases}2e^{2x} & si\ \ x<0\\ 2e^{-2x} & si\ \ x\geq 0\end{cases}$$

Veamos primero si es continua para poder derivar la función a trozos:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=2\cdot e^0=2\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=2\cdot e^0=2\end{cases}$$: f(0)=2 → continua

$f'(x)=\begin{cases}4e^{2x} & si\ \ x<0\\ -4e^{-2x} & si\ \ x>0\end{cases}$. Veamos si derivable f'(0^+)=4≠f'(0^-)=-4. No derivable en x=0, luego en x=0 habrá un "pico".

Estudiemos donde se anula la derivada: f'(x)=0 →

$$4e^{2x}=0\ \ no\ \ solución$$
$$-4e^{.2x}=0\ \ no\ \ solución$$

Es decir, el único punto característico a la hora de estudiar monotonía es x=0, que es donde la función cambia de expresión analítica

Intervalo	(-∞,0)	0	(0,∞)
Signo f'(x)	+	No derivable	-
Crecimiento	↗	M(0,2)	↘

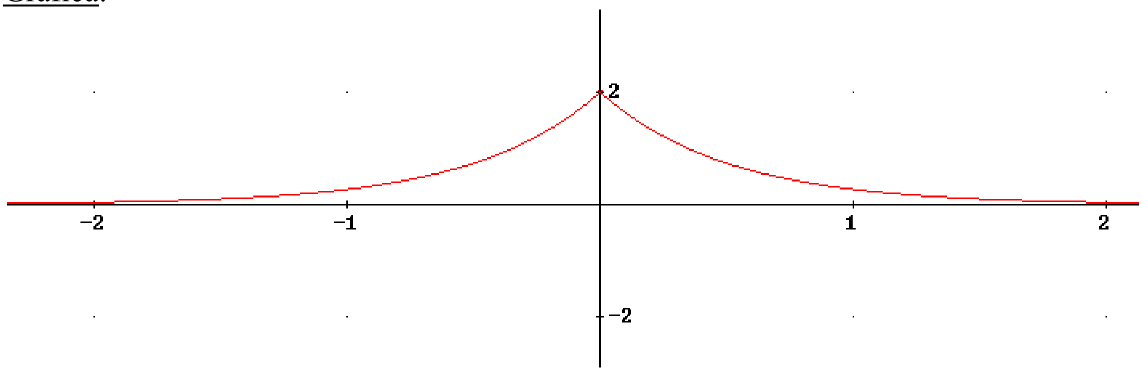
El punto (0,2) es un punto donde hay un cambio de pendiente, por eso no es derivable. El cambio de pendiente es tal que pasa de ser una función creciente a decreciente. Luego es un máximo relativo.

<u>Asíntotas:</u>

1) Verticales → no tiene

2) Horizontales: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=2e^{-\infty}=2\cdot 0=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2e^{-\infty}=2\cdot 0=0$. Luego tiene asíntota horizontal **y=0 (cuando x→∞ y x→-∞)**

Gráfica:



Junio 2007- Prueba A

PR-2. **Sea la función $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$**

a) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento, curvatura, puntos de inflexión y asíntotas. Esbozar la gráfica

1) Dominio=R-{-1,1}

2) Asíntotas:

AV: x=1, x=-1

AH: $\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ → y=0 (cuando x→∞ y x→-∞)

AO: No tiene

3) Crecimiento y puntos relativos

$f'(x)=\frac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2}=-\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$ → f´(x)=0 No solución. Los únicos puntos representativos para estudiar la monotonía son x=1, x=-1 (asíntotas verticales)

Intervalos	(-∞,-1)	-1	(-1,1)	1	(1,∞)
Signo(f´(x))	-	∉ Dom(f(x))	-	∉ Dom(f(x))	-
Monotonía	↘		↘		↘

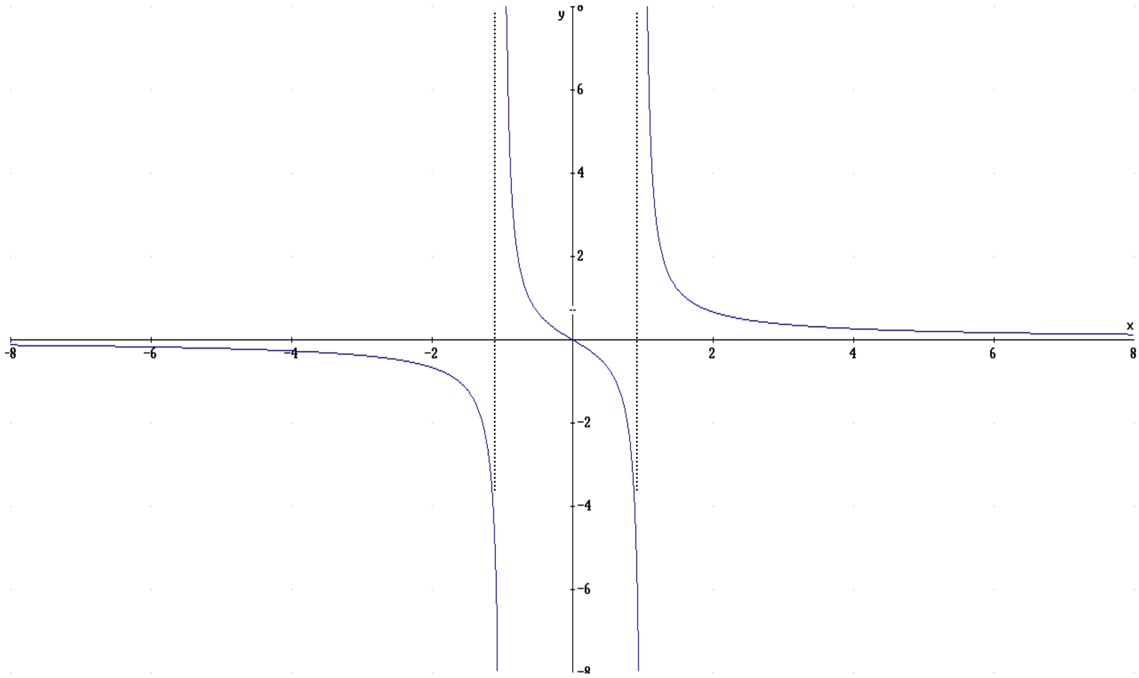
4) Curvatura y puntos de inflexión

$$f''(x)=-\frac{2x(x^2-1)^2-4x(x^2-1)\cdot(x^2+1)}{(x^2-1)^4}=-\frac{2x(x^2-1)(x^2-1-2x^2-2)}{(x^2-1)^4}=-\frac{2x(x^2-1)\cdot(-x^2-3)}{(x^2-1)^4}=\frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$$

f´´(x)=0 → x=0.

Intervalo	(-∞,-1)	-1	(-1,0)	0	(0,1)	1	(1,∞)
Signo(f''(x))	-	∉ Dom(f(x))	+	0	-	∉ Dom(f(x))	+
Curvatura	∩		∪	PI(0,0)	∩		∪

5) Representación gráfica



Junio 2006- Prueba B

PR-2. ***f(x)=x+e^-x^*** **Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos, los intervalos de concavidad y convexidad y las asíntotas. Esbozar su gráfica**

1) Dom(f(x))=R

2) Asíntotas:

· *Vertical*: no tiene

· *Horizontal*: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty + e^{-\infty} = \infty + 0 = \infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty + e^{\infty} = -\infty + \infty = \infty (ya\ \ que\ \ el\ \ \text{exponente}\, crece\, más\ rápido)$

No asíntota horizontal

· *Oblicua*: m=$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} 1 + \frac{e^{-x}}{x} = 1 + \frac{0}{\infty} = 1$

n=$\lim_{x\to\infty} f(x) - x = \lim_{x\to\infty} e^{-x} = e^{-\infty} = 0$

Veamos si x→-∞

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}1+\frac{e^{-x}}{x}=1+\frac{\infty}{\infty}\underset{L'H}{=}1+\lim_{x\to-\infty}\frac{-e^{-x}}{1}=1-e^{\infty}=1-\infty=-\infty$$

Luego la asíntota es **y=x (solo si x→∞)**

3) Crecimiento y puntos relativos:

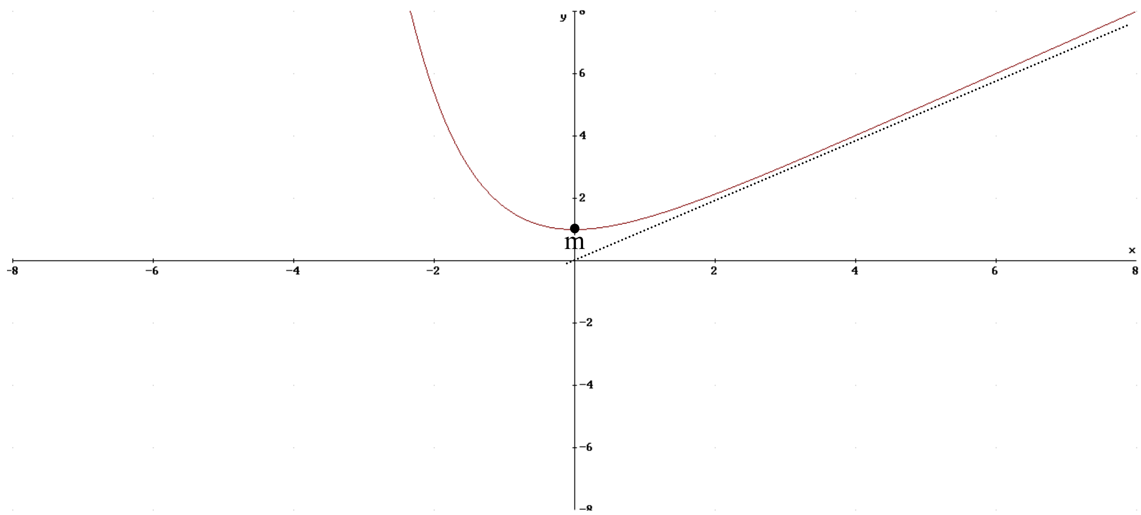
$f'(x)=1-e^{-x}$ → $f'(x)=0$ → $1-e^{-x}=0$; $e^{-x}=1$ → $-x=\ln(1)=0$ → $x=0$

Intervalo	(-∞,-0)	0	(0,∞)
Signo(f´(x))	-	0	+
Monotonía	↘	m(0,1)	↗

4) Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x)=e^{-x}$ → $f''(x)=0$ no solución pues e^{x} siempre positivo

Intervalo	(-∞,∞)
Signo(f''(x))	+
Curvatura	∪



Junio 2005- Prueba B

PR-2.- Sea $f(x)=e^x+ln(x)$, $x\in(0,\infty)$.a) Estúdiense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f y sus asíntotas. (1,5pto) b) Pruébese que f tiene un punto de inflexión en el intervalo $\left[\frac{1}{2},1\right]$ y esbócese la gráfica de f. (1,5 puntos)

a) Veamos primero el Dominio, que es necesario para el resto de cálculos

1) Dom(f(x))=$(0,\infty)$, el logaritmo sólo existe cuando el argumento es positivo.
2) Monotonía : $f'(x)=e^x+1/x=0$ → $e^x=-1/x$, que en el dominio no tiene solución pues para x>0 el exponente es positivo y –1/x negativo. En el domino f´(x)>0, y por tanto la función creciente en todos los puntos del dominio es decir en $(0,\infty)$.

3) Asíntotas:

· Verticales en x=0 (se anula el logaritmo)

· Horizontales $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty+\infty=\infty$. No horizontales

· Oblicuas m= $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x}+\frac{\ln x}{x}\underset{L'H}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{1}+\frac{1/x}{1}=\infty+0.$

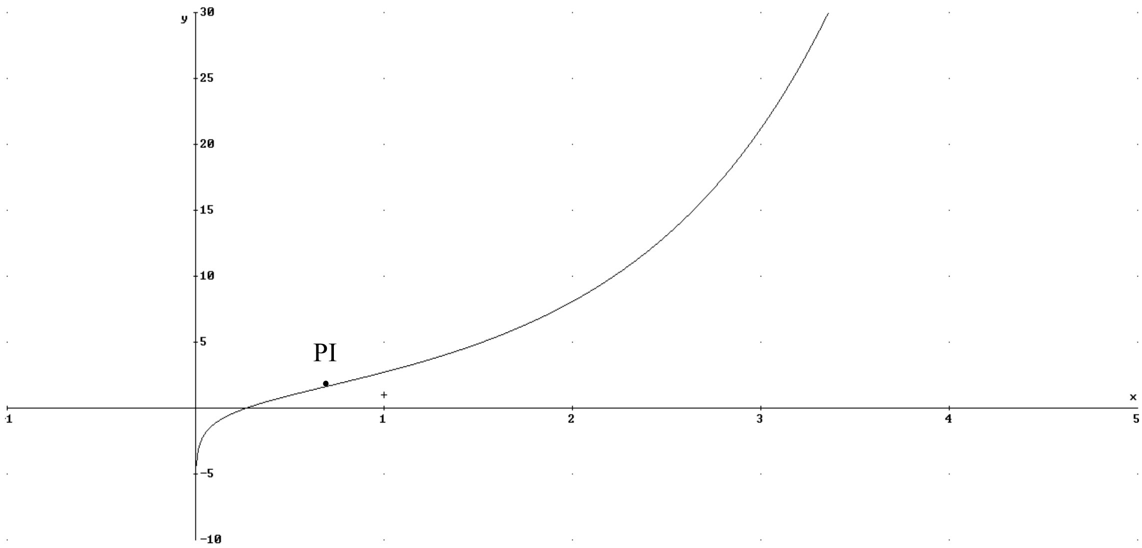
No oblicuas

b) $f''(x)=e^x-1/x^2$. Veamos que en el intervalo [1/2,1] se anula f´´(x), para eso aplicamos Bolzano a la función f´´(x):

· f´´(x) es continua en [1/2,1], ya que 0 no pertenece a este intervalo

· f´´(1/2)<0; f´´(1)>0

Luego al cumplir Bolzano existe un punto $c\in(1/2,1)$ tal que f´´(c)=0.



Junio 2008. Prueba A

PR-2 Sea f(x)=ln(x)/x^2 siendo x∈(0,∞). Se pide

a) **Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos y las asíntotas. Esbozar la gráfica.**

1) Dominio: nos lo da el problema: Dom(f(x))=(0,∞)

2) Asíntotas:

· Verticales: en x=0, pues se anula el denominador y el logaritmo.

· Horizontales $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x^2} = \frac{\infty}{\infty} \underset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1/x}{2x} = 0$ Asíntota y=0 (sólo si x→∞)

· Oblicuas: no al tener horizontales

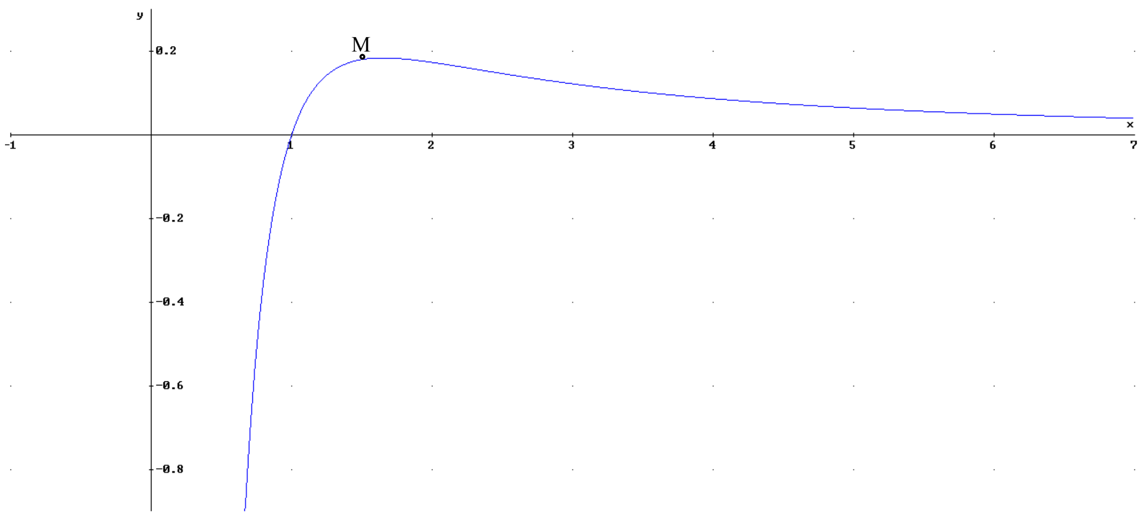
3) Crecimiento y extremos relativos:

$f'(x)=\frac{1-2\ln(x)}{x^3}=0$ → ln(x)=1/2 → x=e$^{1/2}$

Intervalo	(0,e$^{1/2}$)	e$^{1/2}$	(e$^{1/2}$,∞)
Signo(f´(x))	+	0	-
Monotonía	↗	M(e$^{1/2}$,$\frac{1}{2e}$)	↘

Luego f(x) crece en (e$^{1/2}$,∞) y decrece en (0,e$^{1/2}$). En el punto M(e$^{1/2}$, $\frac{1}{2e}$) hay un máximo relativo.

Veamos la gráfica:



Septiembre 2008. Prueba B

PR-2.- Sea f (x) = 2 –x + ln x con x∈(0,+∞). a) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos, los intervalos de concavidad y convexidad y las asíntotas de f . Esbozar la gráfica de f. b) Probar que existe un punto c∈(1/e^2,1) tal que f (c) = 0 .

a) Primero veamos el dominio:

1) Dominio: Dom(f(x))=(0,∞)

2) Asíntotas:

· Verticales: en x=0 (se anula el logaritmo)

· Horizontales $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} 2 - x + \ln(x) = 2 - \infty + \infty = \infty$. No tiene

· Oblicua m= $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2 - x + \ln(x)}{x} = \frac{\infty}{\infty} \underset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{-1+\frac{1}{x}}{1} = -1$

n= $\lim_{x\to\infty} f(x) + x = \lim_{x\to\infty} 2 + \ln(x) = \infty$. No oblicua

3) Extremos relativos:

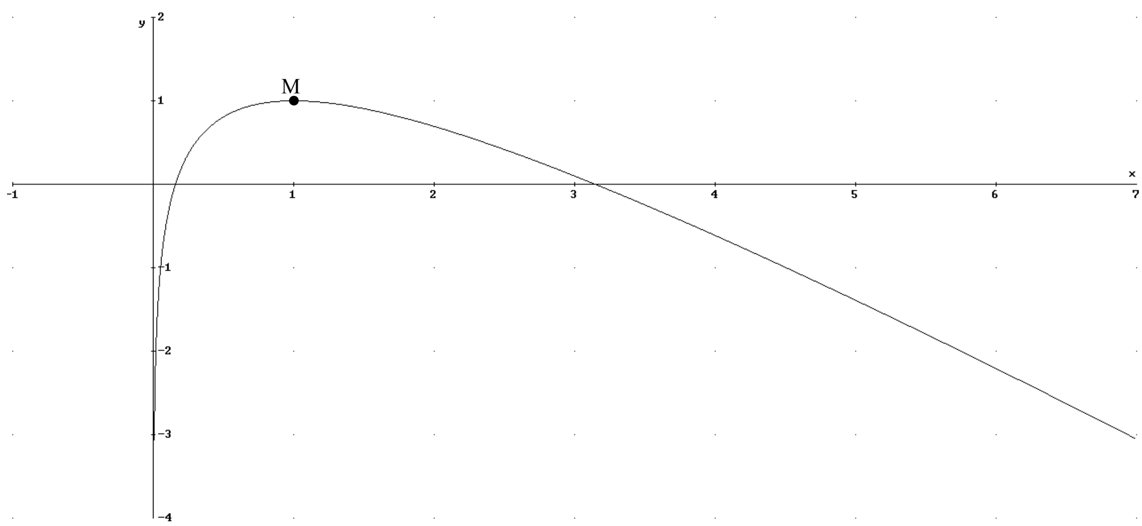
f´(x)=-1+1/x=0 → x=1.

Intervalo	(0,1)	1	(1,∞)
Signo(f´(x))	+	0	-
Monotonía	↗	M(1,1)	↘

Crece en (0,1) y decrece en (1,∞). En el punto M(1,1) hay un máximo relativo

4) Curvatura:

f´´(x)=-1/x^2=0→Nunca se anula f´´(x)<0 luego siempre es cóncava hacia abajo ∩



2. Representación de funciones circulares.

No es normal que en la PAU haya funciones circulares, pero algún año si han salido. Por ejemplo en año2009 en septiembre (prueba B). Veamos los pasos a seguir con algún ejemplo, el del citado examen y otro:

PAU Septiembre 2009. Prueba B

PR2. f(x)=sen(x)+cos(x) en [0,2π]

- Dom(f(x))=[0,2π]
- No asíntotas
- No simetría (sen(x) es impar y cos(x) par):

  f(-x)=sen(-x)+cos(-x)=-sen(x)+cos(x)≠f(x) y –f(x)
- Monotonía

  f'(x)=cos(x)-sen(x)=0 → cos(x)=sen(x)→cos(x)=$\sqrt{1-cos^2(x)}$. Elevamos al cuadrado, recordando que entonces hay que comprobar las soluciones.

  $\cos^2 x=1-\cos^2 x$ → $\cos^2 x=1/2$ → cos(x)=$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. La comprobación se hace cuando se obtengan las soluciones de x (los ángulos)

  $\cos(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}=\begin{cases}45^\circ=\frac{\pi}{4}\text{ rad}\\315^\circ=\frac{7\pi}{4}\text{rad}\end{cases}$ $\cos(x)=-\frac{\sqrt{2}}{2}=\begin{cases}135^\circ=\frac{3\pi}{4}\text{ rad}\\225^\circ=\frac{5\pi}{4}\text{ rad}\end{cases}$

  Comprobación de las soluciones:

  x=$\frac{\pi}{4}$ → cos($\frac{\pi}{4}$)=sen($\frac{\pi}{4}$)→ Si   x=$\frac{7\pi}{4}$ → cos($\frac{7\pi}{4}$)=sen($\frac{7\pi}{4}$)→ No

  x=$\frac{3\pi}{4}$ → cos($\frac{3\pi}{4}$)=sen($\frac{3\pi}{4}$)→ Si   x=$\frac{5\pi}{4}$ → cos($\frac{5\pi}{4}$)=sen($\frac{5\pi}{4}$)→ No

Intervalo	$[0,\frac{\pi}{4})$	$\frac{\pi}{4}$	$(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4})$	$\frac{3\pi}{4}$	$(\frac{3\pi}{4},2\pi]$
Sig(f'(x))	+	0	-	0	+
Monotonia	↗	$M(\frac{\pi}{4},\sqrt{2})$	↘	$m(\frac{3\pi}{4},-\sqrt{2})$	↗

- Curvatura: f''(x)=-sen(x)-cos(x)=0 → -cos(x)=sen(x)→ -cos(x)=$\sqrt{1-cos^2(x)}$

  $\cos^2 x=1-\cos^2 x$→ $\cos^2 x=1/2$ → cos(x)=$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

  $\cos(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}=\begin{cases}45^\circ=\frac{\pi}{4}\text{ rad}\\315^\circ=\frac{7\pi}{4}\text{rad}\end{cases}$ $\cos(x)=-\frac{\sqrt{2}}{2}=\begin{cases}135^\circ=\frac{3\pi}{4}\text{ rad}\\225^\circ=\frac{5\pi}{4}\text{ rad}\end{cases}$

Comprobación de las soluciones (al elevar al cuadrado puede haber soluciones no válidas):

x=$\frac{\pi}{4}$ → -cos($\frac{\pi}{4}$)=sen($\frac{\pi}{4}$)→ No   x=$\frac{7\pi}{4}$ → -cos($\frac{7\pi}{4}$)=sen($\frac{7\pi}{4}$)→ si

$\mathbf{x=\frac{3\pi}{4}}$ → -cos($\frac{3\pi}{4}$)=sen($\frac{3\pi}{4}$)→ no   x=$\frac{5\pi}{4}$ → -cos($\frac{5\pi}{4}$)=sen($\frac{5\pi}{4}$)→ si

Intervalo	$[0, \frac{5\pi}{4})$	$\frac{5\pi}{4}$	$(\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4})$	$\frac{7\pi}{4}$	$(\frac{7\pi}{4}, 2\pi]$
Sig(f''(x))	-	0	+	0	-
Curvatura	∩	PI($\frac{5\pi}{4}$, 0)	∪	PI($\frac{7\pi}{4}$, 0)	∩

Para representar veamos los valores de algún punto representativo:

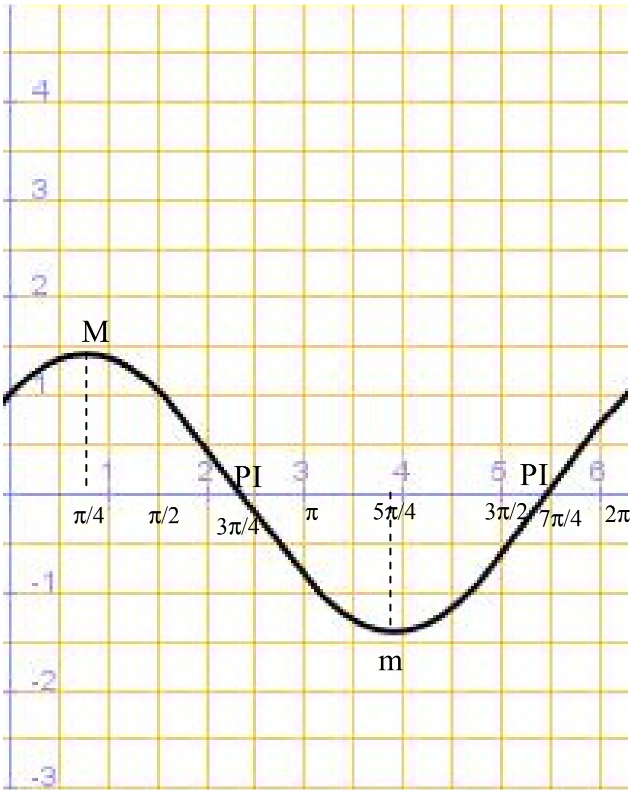
x=0 → y=1

x=π/2 → y=1

x=π →y=-1

x=3π/2 →y=-1

x=2π →y=1



2) f(x)=cos(x)+cos(2x) en [0,2π]

- Dom(f(x))=[0,2π]
- No asíntotas
- Simetría par (cos(x) es par):
  f(-x)=cos(-x)+cos(-2x)=cos(x)+cos(2x)=f(x) Par
- Monotonía
  f'(x)=-sen(x)-2sen(2x)=0 →(angulo doble) → -sen(x)-4sen(x)·cos(x)=0→
  -sen(x)[1+4cos(x)]=0 →
  sen(x)= $0 = \begin{Bmatrix} 0° = 0 \text{ rad} \\ 180° = \pi \text{ rad} \end{Bmatrix}$
  cos(x)=$-\frac{1}{4} = \begin{Bmatrix} 104° = 1.8 \text{ rad} \\ 256° = 4.5\text{rad} \end{Bmatrix}$

Intervalo	0	(0, 1.8)	1.8	$(1.8, \pi)$	π	$(\pi, 4.5)$	4.5	$(4.5, 2\pi]$
Sig(f'(x))	0	-	0	+	0	-	0	+
Monotonia	M(0,2)	↘	m(1.8, −1.12)	↗	$M(\pi, 0)$	↘	m(4.5,-1.12)	↗