Ejercicios resueltos de selectividad
Matemáticas II
Universidad de Extremadura

2000-2010

TOMO I: ANÁLISIS

Vicente González Valle
I.E.S. Zurbarán (Badajoz)
Enero 2011

Prólogo

Este libro se ha hecho para uso y disfrute de los alumnos de segundo de bachillerato de la opción científico-tecnológica. Se trata de la quinta edición. Espero que tengáis la bondad de perdonar los errores que he cometido al hacerlo.

También agradezco de corazón la colaboración de algunos compañeros y compañeras que tuvieron conocimiento de la primera versión gracias a la Sociedad Extremeña de Educación Matemática "Ventura Reyes Prósper", la cual no sólo comunicó la primera edición, sino que además me permitió obtener los enunciados de todos los años y así ayudarme a clasificarlos.

En especial acordarme de su secretario, Cipri, que falleció recientemente y era mi enlace con todos los componentes de la asociación. Descanse en paz.

Si quieres hacer algún comentario, comunicar algún error o decir algo que se te ocurra, puedes ponerte en contacto conmigo en vicente@vicentegonzalezvalle.es.

Este libro se irá actualizando con los exámenes que cada año vaya poniendo la universidad, incorporando este año los del curso 2010, tanto de la fase general, como de la específica, pudiendo obtenerse la versión actualizada en la página
http://www.vicentegonzalezvalle.es.

Este trabajo se ha hecho utilizando LATEXy su frontend para linux Kile. Para los gráficos se ha usado el software de Geogebra. Gracias a todos los que han hecho posible estos programas y los han compartido gratuitamente con los demás.

He dividido el libro en dos tomos por el volumen que tiene. También he hecho una clasificación de los ejercicios por temas, esperando que la clasificación realizada sea del agrado de todos.

A mi mujer Mª Teresa,
y a mis hijos Ana Mª, Isabel y Vicente.

A los tios Manolo, Chencho, Pepi, Gonzalo, Aurín y Modesto,
y, como no, al abuelo Paco,
los últimos que nos dejaron siendo testigos del amor.

En especial a mi padre Juan Antonio, ya fallecido,
que me enseño a servir y actuar gratuitamente en esta vida

Gracias a todos.

Índice general

Capítulo 1

Funciones y continuidad

1.1. Representar gráficamente la función

$$f(x) = 2x^3 - \frac{x^2}{2} - x + \frac{5}{27}$$

¿Cuántas raíces reales positivas tiene este polinomio?

(Septiembre 00)

- Solución:

Para poder representarla vamos a estudiar su derivada. Tenemos que

$$f'(x) = 6x^2 - x - 1$$

Igualando a cero resulta:

$$6x^2 - x - 1 = 0 \Longrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{12} = \frac{1 \pm 5}{12} = \begin{cases} \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2} \\ \\ -\dfrac{4}{12} = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Construimos una tabla para estudiar el signo de la derivada y conocer así donde crece y donde decrece y sus máximos y mínimos.

	$\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$	$\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$
$6x^2 - x - 1$	$+$	$-$	$+$
	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

En consecuencia:

- Crece $\longrightarrow \left(-\infty, -\dfrac{1}{3}\right) \cup \left(\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$

- Decrece $\longrightarrow \left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}\right)$

- Máximo $\longrightarrow \left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{7}{18}\right)$

- Mínimo $\longrightarrow \left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{41}{216}\right)$

También es obvio que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ y que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Podemos hacer una tabla de valores para afinar la representación, pero aquí no la pondremos.

La gráfica resultante podemos verla en la figura 1.1

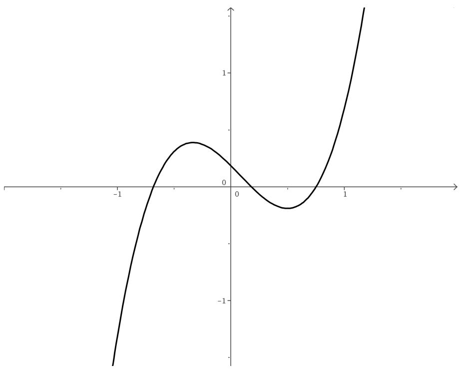


Figura 1.1: Representación gráfica de la función $f(x) = 2x^3 - \dfrac{x^2}{2} - x + \dfrac{5}{27}$

Para ver la última parte del ejercicio usaremos el Teorema de Bolzano. Sabemos que como mucho tendrá tres raices reales (pues es un polinomio de grado 3) y por los datos recabados con anterioridad y mirando la gráfica las raices estarán en los intervalos $\left(-\infty, -\dfrac{1}{3}\right)$, $\left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}\right)$ y $\left(\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$. Es evidente que hay una positiva garantizada (la contenida en el último intervalo) y otra negativa (en el primero). Veamos que ocurre con la otra. Nos basaremos en el teorema de Bolzano para ir tanteando y comprobando donde está.

Tenemos que $f(0) = \dfrac{5}{27} > 0$ y $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{41}{216} < 0$. Por tanto la tercera raiz se encuentra en el intervalo $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ y es positiva.

1.2. Representa la gráfica del polinomio

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 0'2$$

¿Cuántas raíces reales negativas tiene este polinomio? ¿y cuántas positivas?

(Junio 01)

- Solución:

Vamos a hacer un breve estudio del polinomio para su representación:

- $Domf = \mathbb{R} \longrightarrow$ Como en todos los polinomios.
- Simetría $\longrightarrow$ No tiene.
- Continuidad $\longrightarrow$ Continua en todo $\mathbb{R}$.
- Asíntotas $\longrightarrow$ No tiene, como le ocurre a todos los polinomios.
- Corte con los ejes:
  - Eje X: Al ser un polinomio de grado 3 puede cortar al Eje X en un máximo de tres puntos. Vamos a orientarnos donde estarán usando el teorema de Bolzano.
    - $f(-2) = -16 + 12 - 0'2 < 0$
    - $f(-1) = -2 + 3 - 0'2 > 0$
    - $f(0) = -0'2 < 0$
    - $f(1) = 2 + 3 - 0'2 > 0$

    Por tanto corta en un punto entre $(-2, -1)$, en otro entre $(-1, 0)$ y en otro entre $(0, 1)$.
  - Eje Y: $(0, -0'2)$
- Vamos a estudiar la derivada:

$$f'(x) = 6x^2 + 6x$$

Esta derivada se anula en $x = 0$ y en $x = -1$. Por tanto:

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, +\infty)$
$6x^2 + 6x$	$+$	$-$	$+$
	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

De aquí deducimos que:

- Crece $\longrightarrow (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$
- Decrece $\longrightarrow (-1, 0)$
- Máximo $\longrightarrow (-1, 0'8)$
- Mínimo $\longrightarrow (0, -0'2)$

Su representación gráfica podemos verla en la figura 1.2

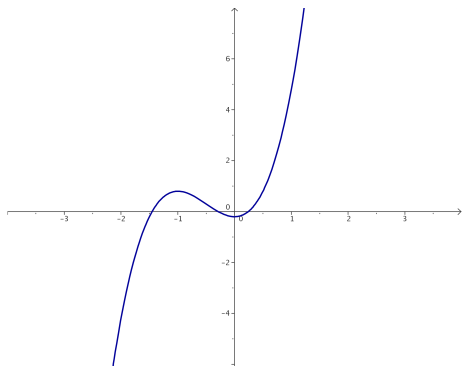


Figura 1.2: Representación gráfica de la función $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 0'2$

La respuesta a las preguntas finales ya la hemos hecho cuando realizamos el estudio del corte con el Eje X, es decir, hay dos raices negativas y una positiva.

1.3. Enunciar el teorema de Bolzano. Calcular, con un error menor que una décima, una raíz positiva del polinomio $x^3 + x - 1$

(Septiembre 01)

- Solución:

La parte de teoría podemos encontrarla en cualquier libro.

Para buscar la raiz positiva que nos piden vamos a tantear utilizando el teorema de Bolzano. Nuestra función es $f(x) = x^3 + x - 1$ y es fácil observar que la función es continua en todo $\mathbb{R}$, y por tanto, lo es en cualquier intervalo que cojamos. También se cumple que:

$$f(0) = -1 \text{ y } f(1) = 1$$

Vamos a comenzar a tantear para "acorralar" la raiz.

- $f(0'5) = -0'375 < 0 \Longrightarrow$ La raiz está en el intervalo $(0'5, 1)$.
- $f(0'7) = 0'043 > 0 \Longrightarrow$ La raiz está en el intervalo $(0'5, 0'7)$.

- $f(0'6) = -0'184 < 0 \Longrightarrow$ La raiz está en el intervalo $(0'6, 0'7)$.

La raiz, con un error menor que $0'1$ está contenida en el intervalo $(0'6, 0'7)$. Valdría cualquiera, pero parece que por el valor que toma la función en él podíamos tomar $0'7$.

1.4. Enunciar el teorema de Bolzano y determinar si el polinomio $x^4 - 4x^2 - 1$ tiene alguna raiz real negativa.

(Junio 03)

- Solución:

El teorema podemos encontrarlo en cualquier libro.

Vamos a aplicar el mismo para comprobar que la función tiene, al menos, una raiz negativa.

Este hecho es evidente, pues basta con comprobar que la función toma valores de distinto signo en -5 y 0.

- $f(-5) = 625 - 100 - 1 > 0$.

- $f(0) = -1 < 0$.

Luego, según el teorema de Bolzano, como f es continua en $[-5, 0]$ y toma valores de signo contrario en -5 y 0, entonces existe un $c \in (-5, 0)$ en el que $f(c) = 0$.

1.5. Enunciar el teorema de Bolzano y usarlo para probar que la ecuación $x = cosx$ tiene solución positiva.

(Septiembre 04)

- Solución:

El teorema de Bolzano puede encontrarse en cualquier libro.

Pasamos a la segunda parte.

Consideramos la función $f(x) = cosx - x$. Evidentemente su dominio es todo $\mathbb{R}$ y es también continua en todo su dominio. Además:

- $f(0) = 1 - 0 = 1 > 0$

- $f(1) = cos1 - 1 = 0'999847 - 1 < 0$

Por tanto, esta función cumple las hipótesis del teorema de Bolzano, y según el mismo, tiene que tener una raiz en el intervalo $(0, 1)$, y por tanto positiva.

Si no queremos apurar tanto podemos tomar $x = 2, 3, \cdots$ en lugar de $x = 1$, pues como el coseno está comprendido entre -1 y 1, al restarle la x elegida dará negativo.

1.6.

a) **Enuncie el teorema de Bolzano.**

b) **Aplique el teorema de Bolzano para probar que la ecuación** $e^x = -2x^2 + 2$ **tiene soluciones. (Puede ser útil dibujar las gráficas de las funciones** $f(x) = e^x$ **y** $g(x) = -2x^2 + 2$**.)**

c) **Determine un intervalo de longitud 1 donde se encuentre alguna solución de la ecuación** $e^x = -2x^2 + 2$**.**

(Junio 10 - Fase general)

- Solución:

a) La respuesta a este apartado podemos encontrarla en cualquier libro.

b) Vamos a considerar para resolver este apartado la función $h(x) = e^x + 2x^2 - 2$. Representaremos las dos funciones como nos aconsejan. Omitimos los calculos a realizar y el resultado es:

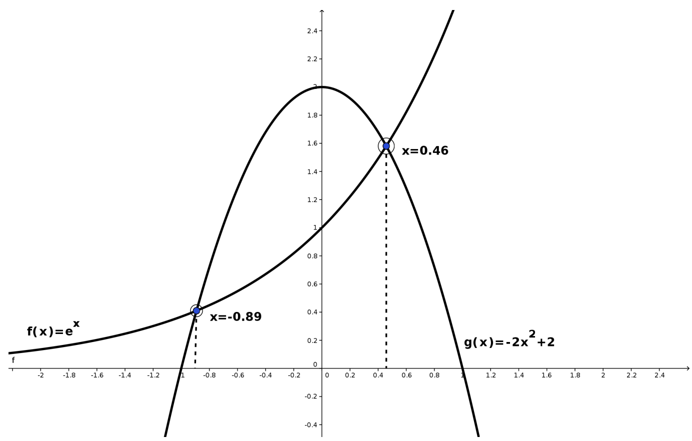


Figura 1.3: Representación gráfica de las funciones e^x y $2x^2 - 2$

Hay que encontrar dos valores en los que tenga signo contrario la función h construida anteriormente. No es mala idea utilizar el 0 como valor siempre que sea posible; pero además en este caso es aconsejable a la vista de las gráficas. El otro valor puede ser el 1.

Tomados estos valores tenemos que es obvio que la función es continua en $[0, 1]$ y además:

- $h(0) = e^0 - 2 = -1 < 0$
- $h(1) = e + 2 - 2 = e > 0$

En consecuencia, en virtud al teorema de Bolzano existe un valor en el intervalo $(0, 1)$ en el que la función $h(x)$ tiene un cero, es decir, es solución de la ecuación planteada.

c) El intervalo anterior vale para este apartado.

1.7. Diga, razonando la respuesta, qué valor debe tomar c para que sea continua la función:

$$f(x) = \begin{cases} c & \textbf{si } x = 0 \\ \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2} & \textbf{si } x \neq 0 \end{cases}$$

(Septiembre 10 - Fase general)

- Solución:

Si $x \neq 0$ es obvio que la función es continua por ser un cociente de funciones continuas. Para que sea continua en $x = 0$ tiene que ocurrir que

$$c = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$$

Calculemos el límite aplicando la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$$

Luego $c = \dfrac{1}{2}$ para que sea continua.

Capítulo 2

Derivada y sus aplicaciones

2.1. Determinar el dominio de definición de la función $f(x) = x - ln\left(x^2 - 1\right)$ y representar su gráfica, calculando los intervalos de crecimiento y los extremos (máximos y mínimos relativos).

(Junio 00)

- Solución:

La función no existirá en los puntos en los que $x^2 - 1 \leq 0$. Vamos a ver donde ocurre. Para ello vamos a hacer una tabla con los puntos de corte.

$$x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$$

La tabla queda:

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
$x^2 - 1$	$+$	$-$	$+$

Luego el dominio de la función es $Dom f = (-\infty, -1) \bigcup (1, +\infty)$.

Vamos a estudiar su derivada:

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{x^2 - 1} = \frac{x^2 - 1 - 2x}{x^2 - 1} = \frac{x^2 - 2x - 1}{x^2 - 1}$$

Vamos a estudiar su signo. Para ello vamos a igualar la derivada a cero y tendremos en cuenta el dominio antes calculado y construiremos una tabla.

$$\frac{x^2 - 2x - 1}{x^2 - 1} = 0 \Longrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

La tabla quedaría:

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$\left(1,1+\sqrt{2}\right)$	$\left(1+\sqrt{2},+\infty\right)$
$\dfrac{x^2-2x-1}{x^2-1}$	$+$	No existe	$-$	$+$
	$\nearrow$		$\searrow$	$\nearrow$

Luego la función:

- Crece $\longrightarrow (-\infty,-1)\bigcup\left(1+\sqrt{2},+\infty\right)$

- Decrece $\longrightarrow \left(1,1+\sqrt{2}\right)$

Hay un mínimo en $\left(1+\sqrt{2},0.84\right)$. Para aproximar más es bueno hacer una tabla de valores, que aquí no haremos. También es evidente que en $x=1$ y en $x=-1$ hay asíntotas verticales, pues las tiene el logaritmo.

- $x=1 \longrightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$ (Por la izquierda no existe).

- $x=-1 \longrightarrow \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=+\infty$ (Por la derecha no existe).

La representación gráfica podemos verla en la figura 2.1.

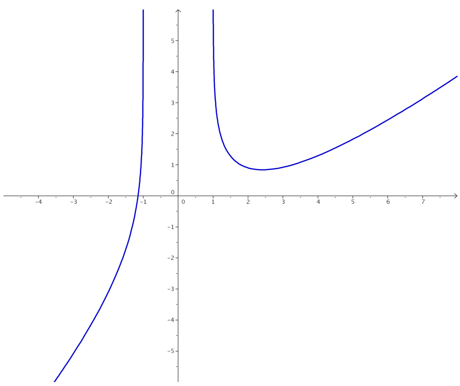


Figura 2.1: Representación gráfica de la función $f(x)=x-ln\left(x^2-1\right)$

2.2. Definir el concepto de derivada de una función $f(x)$ en un punto $x=a$, y explicar su relación con los máximos relativos de la función.

(Junio 00)

- Solución:

La solución de este ejercicio puede verse en cualquier libro.

2.3. Calcular la derivada en el punto $x = 1$ de la función $f(x) = x^{-1/2}lnx$.

(Septiembre 00)

- Solución:

Vamos a calcular la derivada y después sustituiremos $x = 1$ en la función obtenida.

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-3/2}lnx + x^{-1/2}\frac{1}{x}$$

Sustituyendo obtenemos:

$$f'(1) = -\frac{1}{2} \cdot 1^{-3/2}ln1 + 1^{-1/2} \cdot 1 = 1$$

2.4. Dadas las funciones $f(x) = x^2 + \pi$ y $g(x) = senx + cosx$, calcula la derivada en $x = 0$ de las funciones $f(g(x))$ y $g(f(x))$.

(Junio 01)

- Solución:

Tenemos dos formas de resolver este ejercicio. La primera consiste en calcular las composiciones requeridas y posteriormente derivar, y la segunda en derivar aplicando la regla de la cadena. Veamos la primera en ambas funciones:

$$f(g(x)) = (senx + cosx)^2 + \pi = \underbrace{sen^2x + cos^2x}_{1} + 2senxcosx + \pi = sen2x + \pi + 1$$

Si derivamos esta expresión tendremos:

$$\left[(fog)\right]'(x) = \left[f(g(x))\right]' = 2cos2x$$

Sustituyendo en $x = 0$ resulta:

$$\left[(fog)\right]'(0) = 2$$

Por otro lado, la otra composición nos daría:

$$g(f(x)) = sen(x^2 + \pi) + cos(x^2 + \pi)$$

Derivando obtenemos:

$$\left[(gof)\right]'(x) = 2xcos(x^2 + \pi) - 2xsen(x^2 + \pi)$$

Subtituyendo en $x = 0$ el resultado obtenido es:

$$[(gof)]'(0) = 0$$

Veamos ahora el otro método para la resolución del ejercicio. Lo haremos a modo de ejemplo sólo en el primer caso. Según la regla de la cadena

$$[(fog)]'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = 2(senx + cosx)(cosx - senx)$$

Si sustituimos en $x = 0$ nos quedaría:

$$(fog)]'(0) = 2(sen0 + cos0)(cos0 - sen0) = 2$$

Obtenemos, obviamente, el mismo resultado.

2.5. Entre todos los rectángulos de área dada ¿cuál es el de perímetro mínimo?

(Septiembre 01)

- Solución:

Vamos a buscar una función a minimizar (que dependerá en un principio de dos variables) y una igualdad que ligue las variables. En nuestro caso son:

$$\left.\begin{array}{rcl} P(x,y) & = & 2x+2y \\ A & = & x \cdot y \end{array}\right] \begin{array}{l} \Longrightarrow P(x) = 2x + \dfrac{2A}{x} = \dfrac{2x^2+2A}{x} \\ \Longrightarrow y = \dfrac{A}{x} \ (1) \end{array}$$

Vamos a derivar la función obtenida:

$$P'(x) = \frac{4x \cdot x - (2x^2+2A)}{x^2} = \frac{4x^2 - 2x^2 - 2A}{x^2} = \frac{2x^2 - 2A}{x^2}$$

Igualando la derivada a cero obtenemos:

$$\frac{2x^2 - 2A}{x^2} = 0 \Longrightarrow 2x^2 - 2A = 0 \Longrightarrow x^2 = A \Longrightarrow x = \pm\sqrt{A}$$

De las dos obtenidas sólo vale la positiva. Vamos a calcular la segunda derivada para ver que hay un mínimo.

$$P''(x) = \frac{4x \cdot x^2 - 2x(2x^2 - 2A)}{x^4} = \frac{4x^3 - 4x^3 + 4Ax}{x^4} = \frac{4Ax}{x^4}$$

Sustituyendo el valor de x obtenido tenemos:

$$P''\left(\sqrt{A}\right)=\frac{4A\sqrt{A}}{A^2}>0$$

luego hay un mínimo. Sustituyendo $x=\sqrt{A}$ en (1) podemos calcular y.

$$x=\sqrt{A}\Longrightarrow y=\frac{A}{\sqrt{A}}=\sqrt{A}$$

Se trata por tanto de un cuadrado de lado $\sqrt{A}$.

2.6. Definir el concepto de derivada de una función $f(x)$ en un punto $x=a$ y explicar su relación con el crecimiento de la función.

(Junio 02)

- Solución:

La respuesta puede encontrarse en cualquier libro.

2.7. Representar la gráfica de la función $f(x)=2x+(2x)^{-1}$, determinando los intervalos donde es creciente.

(Junio 02)

- Solución:

Nuestra función podemos ponerla $f(x)=2x+(2x)^{-1}=2x+\dfrac{1}{2x}=\dfrac{4x^2+1}{2x}$.

Vamos a buscar algunos datos para poder representarla.

Es evidente que el dominio de la función es $Dom f=\mathbb{R}-\{0\}$. También es obvio que tiene una asíntota vertical en $x=0$, que no corta al eje X, ni al eje Y.

Vamos a estudiar la derivada.

$$f'(x)=\frac{8x\cdot 2x-2\cdot(4x^2+1)}{4x^2}=\frac{16x^2-8x^2-2}{4x^2}=\frac{8x^2-2}{4x^2}$$

Igualando a cero tenemos:

$$\frac{8x^2-2}{4x^2}=0\Longrightarrow 8x^2-2=0\Longrightarrow x^2=\frac{1}{4}\Longrightarrow x=\pm\frac{1}{2}$$

Vamos a estudiar el signo de la derivada para especificar donde crece y donde decrece, así como los máximos y mínimos, si los tiene.

	$(-\infty,-1/2)$	$(-1/2,0)$	$(0,1/2)$	$(1/2,+\infty)$
$\dfrac{8x^2-2}{4x^2}$	$+$	$-$	$-$	$+$
	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Para afinar la representación puede hacerse una pequeña tabla de valores, viendo la representación en la figura 2.2.

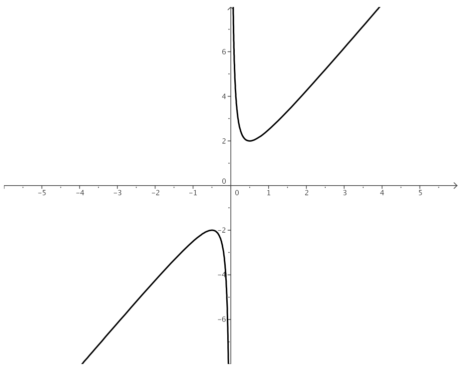


Figura 2.2: Representación gráfica de la función $f(x) = 2x + (2x)^{-1}$

En cuanto al crecimiento y decrecimiento, así como del estudio de la derivada, concluimos:

- Crece $\longrightarrow (-\infty,-1/2) \cup (1/2,+\infty)$.

- Decrece $\longrightarrow (-1/2,0) \cup (0,1/2)$.

- Máximo $\longrightarrow (-1/2,-2)$.

- Mínimo $\longrightarrow (1/2,2)$.

2.8. Representar la gráfica de la función $f(x) = x^3 + x^{-3}$, determinando sus extremos (máximos y mínimos relativos).

(Septiembre 02)

- Solución:

Nuestra función escrita en forma de fracción es:

$$f(x) = x^3 + x^{-3} = x^3 + \frac{1}{x^3} = \frac{x^6+1}{x^3}$$

Es evidente que su dominio es $Dom f = \mathbb{R} - \{0\}$. Además la función es impar, pues:

$$f(-x) = \frac{(-x)^6 + 1}{(-x)^3} = \frac{x^6 + 1}{-x^3} = -\frac{x^6 + 1}{x^3} = -f(x)$$

Vamos a ver los puntos de corte con los ejes:

- Eje X $\longrightarrow$ Hacemos $y = 0$.

$$\frac{x^6 + 1}{x^3} = 0 \Longrightarrow x^6 + 1 = 0 \Longrightarrow \text{ No corta.}$$

- Eje Y $\longrightarrow$ Hacemos $x = 0$. En este caso no corta, pues $x = 0$ no pertenece al dominio.

Vamos a calcular la primera derivada para hallar los máximos y los mínimos.

$$y' = \frac{6x^5.x^3 - 3x^2\left(x^6 + 1\right)}{x^6} = \frac{6x^8 - 3x^8 - 3x^2}{x^6} = \frac{3x^8 - 3x^2}{x^6}$$

Si igualamos a cero resulta

$$\frac{3x^8 - 3x^2}{x^6} = 0 \Longrightarrow 3x^8 - 3x^2 = 0 \Longrightarrow 3x^2\left(x^6 - 1\right) = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \Longrightarrow \text{No pertenece al dominio.} \\ x^6 - 1 = 0 \Longrightarrow x^6 = 1 \Longrightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

Vamos a estudiar el signo de la derivada y así podemos decidir los máximos y mínimos.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
$\frac{3x^8 - 3x^2}{x^6}$	$+$	$-$	$-$	$+$
	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

De aquí deducimos que la función tiene:

- Un máximo en el punto $(-1, -2)$.

- Un mínimo en el punto $(1, 2)$.

Es fácil observar que la función tiene una asíntota vertical en la recta $x = 0$ y que no tiene asíntotas ni horizontales, ni oblicuas.

Puede hacerse una tabla de valores para afinar más la representación gráfica, pero no la haremos aquí. La representación gráfica pedida podemos verla en la figura 2.3.

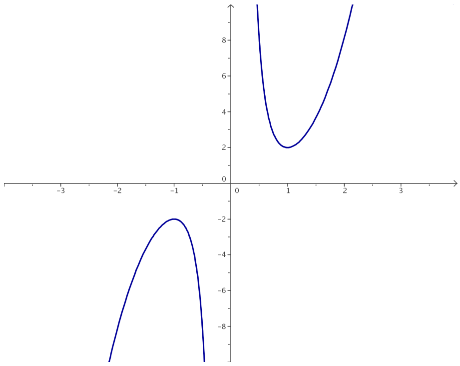


Figura 2.3: Representación gráfica de la función $f(x) = x^3 + x^{-3}$

2.9. Enuncia la regla de L'Hôpital y calcula el límite

$$\lim_{x\to 1} \frac{1 - cos(2\pi x)}{(x-1)^2}$$

(Septiembre 02)

- Solución:

La parte teórica de la pregunta puede verse en cualquier libro. Vamos a resolver el límite.

$$\lim_{x\to 1} \frac{1 - cos(2\pi x)}{(x-1)^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{2}\pi sen(2\pi x)}{\cancel{2}(x-1)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1} \frac{2\pi^2 cos(2\pi x)}{1} = 2\pi^2$$

2.10. Representar gráficamente la función $f(x) = e^x - ex$, determinando sus extremos relativos (máximos y mínimos relativos). ¿Existe algún valor de x en que $f(x)$ sea negativo?

(Junio 03)

- Solución:

Vamos a empezar, como siempre, por ver su dominio.

- Es evidente que el $Dom f = \mathbb{R}$.

- Veamos ahora los cortes con los ejes:

  - Eje X. $\longrightarrow$ Hacemos $y = 0$.
    $e^x - ex = 0 \Longrightarrow e^x = ex \Longrightarrow x = 1$

- Eje Y. $\longrightarrow$ Hacemos $x = 0$.
  $f(0) = 1$

- Vamos a realizar la derivada, la igualaremos a cero y la estudiaremos la misma.

$$f'(x) = e^x - e = 0 \Longrightarrow e^x = e \Longrightarrow x = 1$$

	$(-\infty, 1)$	$(1, \infty)$
$e^x - e$	$-$	$+$
	$\searrow$	$\nearrow$

También se puede observar de forma sencilla que no va a tener asíntotas.

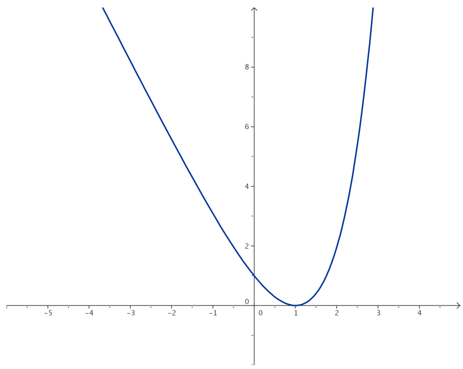


Figura 2.4: Representación gráfica de la función $f(x) = e^x - ex$

Para afinar la representación vamos a hacer una tabla de valores:

x	-1	0	1	2	3
y	3.09	1	0	1.95	11.93

La representación gráfica podemos verla en la figura 2.4.

En cuanto al interrogante que nos hacen la respuesta es evidente viendo la gráfica, pero también puede razonarse si tenemos en cuenta que tiene un mínimo en el punto $(1, 0)$. La respuesta obvia es no.

2.11. Determinar una recta tangente a la parábola $y = 2 - x^2$ que sea paralela a la recta de ecuación $2x + y = 4$.

(Junio 03)

- Solución:

Como es paralela a la recta $2x + y = 4$ la ecuación de la recta que buscamos tiene que ser de la forma $2x + y = k$ y de aquí deducimos que su pendiente tiene que ser $m = -2$.

Vamos a ver donde tiene la función $y = 2 - x^2$ una recta tangente con pendiente $m = -2$.

$$m_{tg} = f'(x) = -2x = -2 \Longrightarrow x = 1$$

Luego el punto en el que se produce la tangente es $f(1) = 2 - 1 = 1 \Longrightarrow (1, 1)$.

Por tanto, para calcular k basta con sustituir el punto en la ecuación de la recta $2x + y = k$.

$$2x + y = k \text{ en } (1, 1) \Longrightarrow 2 + 1 = k \Longrightarrow k = 3.$$

Luego la recta buscada es

$$2x + y = 3$$

2.12. Con un alambre de dos metros se desea formar un cuadrado y un círculo. Determinar el lado del cuadrado y el radio del círculo para que la suma de sus áreas sea mínima.

(Septiembre 03)

- Solución:

Para plantear el problema buscamos una función a minimizar (que estará en función de dos variables) y una ecuacún que ligue las variables. Estas ecuaciones son:

$$A(l, r) = l^2 + \pi r^2 \Longrightarrow \text{ Ecuación a minimizar.}$$
$$4l + 2\pi r = 2 \Longrightarrow 2l + \pi r = 1 \Longrightarrow \text{ Ecuación que liga las variables.}$$

Vamos a despejar l en la última ecuación, resultando:

$$l = \frac{1 - \pi r}{2} \tag{2.1}$$

Sustituyendo en la primera tenemos:

$$A(r) = \left(\frac{1 - \pi r}{2}\right)^2 + \pi r^2 = \frac{1 + \pi^2 r^2 - 2\pi r}{4} + \pi r^2 = \frac{1 + \pi^2 r^2 - 2\pi r + 4\pi r^2}{4} =$$

$$= \frac{(\pi^2 + 4\pi)r^2 - 2\pi r + 1}{4}$$

Derivando la expresión obtenemos:

$$A'(r) = \frac{1}{\underset{2}{\cancel{4}}} \cdot \left[\cancel{2}(\pi^2 + 4\pi)r - \cancel{2}\pi\right] = \frac{(\pi^2 + 4\pi)r - \pi}{2}$$

Igualando a cero resulta:

$$\frac{(\pi^2+4\pi)r-\pi}{2}=0 \Longrightarrow (\pi^2+4\pi)r-\pi=0 \Longrightarrow (\pi^2+4\pi)r=\pi \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (\pi+4)r=1 \Longrightarrow r=\frac{1}{\pi+4} \text{ u.}$$

Si hacemos la segunda derivada resulta:

$$A''(r)=\frac{\pi^2+4\pi}{2}>0 \text{ para cualquier valor de r.}$$

En consecuencia para el valor de r que nosotros hemos calculado la función tiene un mínimo.

Vamos a calcular l sustituyendo en la igualdad (2.1).

$$l=\frac{1-\pi\frac{1}{\pi+4}}{2}=\frac{1-\frac{\pi}{\pi+4}}{2}=\frac{\cancel{\pi}+4-\cancel{\pi}}{2\pi+8}=\frac{4}{2\pi+8}=\frac{2}{\pi+4} \text{ u.}$$

2.13. Determinar en qué puntos es negativa la derivada de la función $f(x)=e^x x^{-2}$.

(Septiembre 03)

- Solución:

Nuestra función es $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2}$. Su derivada por tanto será:

$$f'(x)=\frac{e^x x^2-2xe^x}{x^4}=\frac{xe^x(x-2)}{x^4}$$

Vamos a estudiar su signo. Calculamos para ello las raices del numerador y del denominador.

- Raices del numerador:

$$xe^x(x-2)=0 \Longrightarrow \begin{cases} x=0. \\ e^x=0 \Longrightarrow \text{ No tiene solución.} \\ x-2=0 \Longrightarrow x=2. \end{cases}$$

- Raices del denominador:

$$x^4=0 \Longrightarrow x=0.$$

Con los valores obtenidos construimos una tabla para estudiar el signo de la derivada.

	$(-\infty,0)$	$(0,2)$	$(2,+\infty)$
$\dfrac{xe^x(x-2)}{x^4}$	$+$	$-$	$+$

Por tanto es negativa en el intervalo $(0,2)$.

2.14. Determinar el mayor área que puede encerrar un triángulo rectángulo cuyo lado mayor mida 1 metro.

(Junio 04)

- Solución:

La figura 2.5 nos muestra la idea.

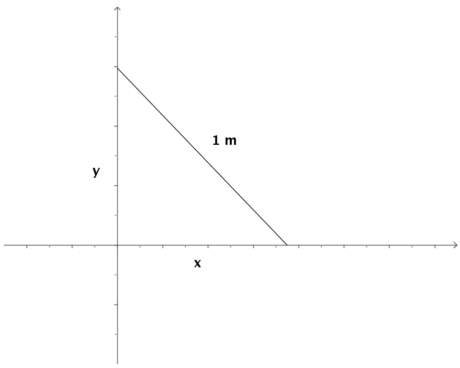


Figura 2.5: Visión gráfica del problema

Nosotros iremos moviendo la hipotenusa (lado mayor) haciendo variar x e y.

Necesitamos pues una función a maximizar (el área) y otra que ligue las dos variables. Dichas ecuaciones son:

$$A(x,y) = \frac{x.y}{2} \text{ (Función a maximizar)}$$
$$x^2+y^2=1 \Rightarrow y=\sqrt{1-x^2} \text{ (Ecuación que liga las variables)}$$

Por tanto, si sustituimos la y en la primera función obtenemos:

$$A(x) = \frac{x\cdot\sqrt{1-x^2}}{2} = \frac{1}{2}\cdot x\cdot\sqrt{1-x^2}$$

Vamos a derivar para ver los puntos que anulan dicha derivada. Entre estos valores se encuentran los máximos y los mínimos.

$$A'(x) = \frac{1}{2}\left[\sqrt{1-x^2} + \frac{x\cdot(-\cancel{2}x)}{\cancel{2}\cdot\sqrt{1-x^2}}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1-x^2-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right] = \frac{1-2x^2}{2\sqrt{1-x^2}}$$

Igualando esta expresión a cero tenemos:

$$\frac{1-2x^2}{2\sqrt{1-x^2}} = 0 \Longrightarrow -2x^2+1=0 \Longrightarrow 2x^2=1 \Longrightarrow x^2=\frac{1}{2} \Longrightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Para ver que tenemos en ese punto un máximo vamos a estudiar el signo de la derivada a ambos lados del número.

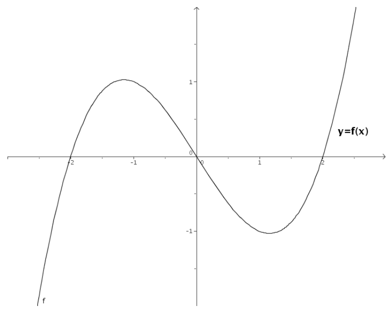
Tenemos que $A'(0)=\frac{1}{2}>0$ y $A'(0'8)=\frac{-0'28}{1'2}<0$ y por tanto hay un máximo.

En conclusión tenemos que:

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ é } y=\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

.

2.15. **Si la gráfica de una función $f(x)$ es:**



representar aproximadamente la gráfica de la derivada $f'(x)$.

(Junio 04)

- Solución:

Observando la gráfica tenemos que la función tiene las siguientes características:

- Crece en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty) \longrightarrow$ Luego ahí $f'(x)>0$.
- Decrece en $(-1,1) \longrightarrow$ Luego ahí $f'(x)<0$.
- Tiene un máximo en $(-1,1) \Longrightarrow f'(-1)=0$.
- Tiene un mínimo en $(1,-1) \Longrightarrow f'(1)=0$.
- Es convexa en $(-\infty,0) \Longrightarrow f''(x)<0 \Longrightarrow f'$ es decreciente en $(-\infty,0)$.
- Es cóncava en $(0,+\infty) \Longrightarrow f''(x)>0 \Longrightarrow f'$ es creciente en $(0,+\infty)$.

- Hay un punto de inflexión en $x = 0$ como conclusión de los puntos anteriores, por tanto tiene un mínimo en $x = 0$.

Con todos estos datos tenemos que la gráfica podría ser la que vemos en la figura 2.6.

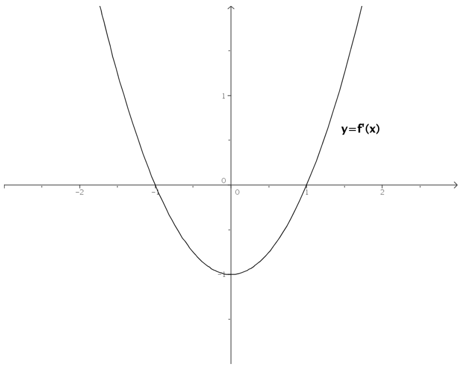
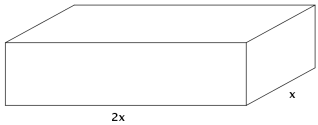


Figura 2.6: Representación aproximada de la función buscada

2.16. **Se desea construir un paralelepípedo rectangular de 9 litros de volumen y tal que un lado de la base sea doble que el otro. Determinar las longitudes de sus lados para que el área total de sus 6 caras sea mínima.**



(Septiembre 04)

- Solución:

Queremos minimizar el área total. Dicho área es la suma de las áreas de las seis caras. En el figura 2.7 podemos ver que este área es:

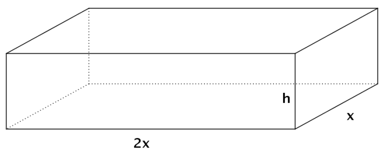


Figura 2.7: Visión gráfica del ejercicio

$$A(x,h)=2.(2x.h)+2.(h.x)+2.(2x.x)=4xh+2xh+4x^2=4x^2+6xh$$

Para ligar las variables tenemos el volumen que cumple

$$V=A_b\cdot h=2x.x.h=2x^2.h=9\Longrightarrow h=\frac{9}{2x^2}$$

Por tanto la función área queda:

$$A(x)=4x^2+\overset{3}{\cancel{6x}}\frac{9}{\cancel{2}x^{\cancel{2}}}=4x^2+\frac{27}{x}=\frac{4x^3+27}{x}$$

Si derivamos tendremos:

$$A'(x)=\frac{12x^2.x-(4x^3+27)}{x^2}=\frac{12x^3-4x^3-27}{x^2}=\frac{8x^3-27}{x^2}=0$$

Por tanto, la derivada se anula cuando $8x^3 - 27 = 0$. De aquí deducimos que:

$$8x^3 - 27 = 0 \Longrightarrow 8x^3 = 27 \Longrightarrow x^3 = \frac{27}{8} \Longrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{3}{2}\ dm.$$

Si estudiamos el comportamiento de la derivada en puntos próximos al obtenido vemos que se trata de un mínimo.

$$A'(1) = \frac{-19}{1} < 0 \text{ y } A'(2) = \frac{37}{4} > 0$$

En conclusión tenemos que $x = \dfrac{3}{2} \Longrightarrow h = \dfrac{9}{2.\frac{9}{4}} = \dfrac{36}{18} = 2$ dm.

Y estos eran los valores buscados.

2.17. Determinar los puntos de la curva plana $y^3 = 2x$ en que la recta tangente es perpendicular a la recta $y + 6x = 0$.

(Septiembre 04)

- Solución:

La curva de la que hablamos tiene ecuación $y^3 = 2x \Longrightarrow y = \sqrt[3]{2x} = (2x)^{\frac{1}{3}}$. Por otro lado tenemos que la recta es $y + 6x = 0 \Longrightarrow y = -6x \Longrightarrow m = -6$.

De aquí deducimos que la perpendicular tiene por pendiente $m_{tg} = \dfrac{-1}{m} = \dfrac{1}{6}$.

Vamos a ver en que puntos tiene la curva pendiente $\dfrac{1}{6}$. Para ello derivamos la función y la igualamos a $\dfrac{1}{6}$.

$$y' = \frac{1}{3}(2x)^{-2/3}.2 = \frac{2}{3\sqrt[3]{4x^2}} = m_{tg}$$

$$\frac{2}{3\sqrt[3]{4x^2}} = \frac{1}{6} \Longrightarrow 3\sqrt[3]{4x^2} = 12 \Longrightarrow \sqrt[3]{4x^2} = 4 \Longrightarrow 4x^2 = 64 \Longrightarrow x^2 = 16 \Longrightarrow x = \pm 4$$

Por tanto, los puntos buscados son $P_1(4,2); P_2(-4,-2)$.

2.18. Hallar la derivada en $x = 0$ de la función $f(f(x))$, donde $f(x) = (1+x)^{-1}$.

(Junio 05)

- Solución:

Tenemos que $f(x) = (1+x)^{-1} = \dfrac{1}{1+x} \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{-1}{(1+x)^2}$.

Es obvio que $f(0) = 1$, que $f'(0) = -1$ y que $f'(1) = -\dfrac{1}{4}$.

Aplicamos la regla de la cadena:

$$[f(f(0))]' = f'(f(0)) \cdot f'(0) = f'(1) \cdot (-1) = \frac{-1}{4} \cdot (-1) = \frac{1}{4}$$

2.19. Representar gráficamente la función $f(x) = x - 2senx$ en el intervalo $-\pi < x < \pi$, determinando sus extremos (máximos y mínimos relativos).

(Junio 05)

- Solución:

Tenemos la función $f(x) = x - 2senx$ en el intervalo $-\pi < x < \pi$

Es obvio que el dominio de esta función es todo $\mathbb{R}$. También es evidente que no hay asíntotas. Vamos a estudiar la derivada:

$$f'(x) = 1 - 2cosx = 0 \Longrightarrow -2cosx = -1 \Longrightarrow cosx = \frac{1}{2} \Longrightarrow x = \frac{\pi}{3} \text{ y } x = -\frac{\pi}{3}$$

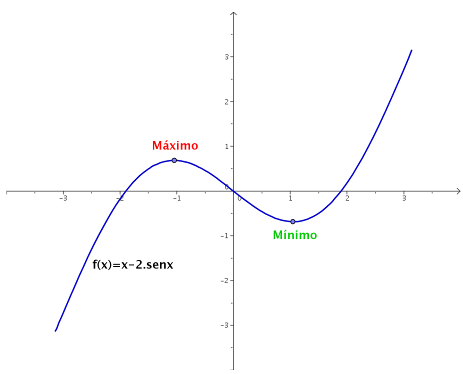
	$\left(-\pi, -\frac{\pi}{3}\right)$	$\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$	$\left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)$
$1 - 2cosx$	$+$	$-$	$+$
	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

De este estudio deducimos que hay un máximo en $x = -\frac{\pi}{3}$ y un mínimo en $x = \frac{\pi}{3}$

Para representarla tendríamos que hacer una tabla de valores:

x	0	2	-2	3	-3	$-\pi/3$	$\pi/3$
y	0	$0'18$	$-0'18$	$2'71$	$-2'71$	$0'68$	$-0'68$

Su representación gráfica sería:



2.20. **Enunciar el Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial. Usarlo para demostrar que para cualesquiera números reales $x < y$ se verifica que $cosy - cosx \leq y - x$.**

(Septiembre 05)

- Solución:

El enunciado del teorema puede encontrarse en cualquier libro.

Vamos a considerar la función $f(x) = cosx$ que es obviamente continua y derivable en todo $\mathbb{R}$, y por lo tanto lo será en cualquier intervalo $[x, y]$. En consecuencia:

$$\exists\, c \in (x, y) \;/\; f'(c) = \frac{cosy - cosx}{y - x}$$

Ahora bien, $f'(x) = -senx \Longrightarrow f'(c) = -senc \Longrightarrow f'(c) \leq 1$.

De aquí deducimos lo que queríamos:

$$\frac{cosy - cosx}{y - x} \leq 1 \Longrightarrow cosy - cosx \leq y - x$$

2.21. **Hallar la derivada en el punto $x = 0$ de la función $f(f(x))$, donde $f(x) = senx$.**

(Septiembre 05)

- Solución:

Vamos a realizar la derivada por la regla de la cadena:

$$[(fof)]'(0) = f'(f(0)) \cdot f'(0) = cos(sen(0)) \cdot cos0 = cos0 \cdot cos0 = 1 \cdot 1 = 1$$

2.22. **Calcula**

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 + x - e^x}{sen^2 x}$$

(Junio 06)

- Solución:

Vamos a resolver el límite por la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 + x - e^x}{sen^2 x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{1 - e^x}{2\; senx\; cosx} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - e^x}{sen2x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{-e^x}{2cos2x} = \frac{-1}{2}$$

2.23. **Define el concepto de máximo relativo de una función $f(x)$ y enuncia su relación con las derivadas sucesivas de $f(x)$.**

(Junio 06)

- Solución:

Es una pregunta teórica que puede encontrarse en cualquier libro.

2.24. Dada la función

$$f(x) = \frac{senx + sen(x+1)}{cosx - cos(x+1)}$$

en el intervalo $0 < x < 2\pi$, calcula su derivada, simplificándola en lo posible. ¿Es constante esta función $f(x)$?

(Septiembre 06)

- Solución:

Vamos a calcular la derivada que nos piden.

$$f'(x) = \frac{[cosx + cos(x+1)] \cdot [cosx - cos(x+1)] - [senx + sen(x+1)] \cdot [-senx + sen(x+1)]}{[cosx - cos(x+1)]^2} =$$

$$= \frac{cos^2x - cos^2(x+1) + sen^2x - sen^2(x+1)}{[cosx - cos(x+1)]^2} = \frac{1-1}{[cosx - cos(x+1)]^2} = 0$$

De esto deducimos que la función es constante, pues su derivada es cero para cualquier valor de x.

2.25. Calcula las asíntotas y determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = (1+x^2)^{-1}x$. A partir de los resultados obtenidos, dibuja la gráfica de la función $f(x)$.

(Septiembre 06)

- Solución:

Nuestra función es $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$. Es evidente que su dominio es todo $\mathbb{R}$, pues no se anula el denominador.

Vamos a hallar las asíntotas.

- Asíntotas verticales: Como no se anula el denominador no hay asíntotas verticales.

- Asíntotas horizontales:

  - $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0.$
  - $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{1+x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{1+x^2} = 0.$

  Luego la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal tanto en $+\infty$, como en $-\infty$.

- Asíntotas oblicuas: Al tener asíntotas horizontales no tiene oblicuas.

Vamos a estudiar su derivada:

$$f'(x) = \frac{1+x^2-2x.x}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{-x^2+1}{(1+x^2)^2}$$

Veamos para que valores se anula la derivada:

$$\frac{-x^2+1}{(1+x^2)^2} = 0 \Longrightarrow -x^2+1=0 \Longrightarrow x^2=1 \Longrightarrow x=\pm 1$$

Estudiemos su signo para ver el crecimiento y el decrecimiento:

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,+\infty)$
$\frac{-x^2+1}{(1+x^2)^2}$	$-$	$+$	$-$
	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

De aquí deducimos que:

- La función crece en el intervalo $(-1,1)$.
- La función decrece en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.
- La función tiene un máximo en el punto $\left(1,\frac{1}{2}\right)$.
- La función tiene un mínimo en el punto $\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$.
- También es evidente que corta a los ejes en el punto $(0,0)$.

Por tanto su representación gráfica la podemos ver en la figura 2.8.

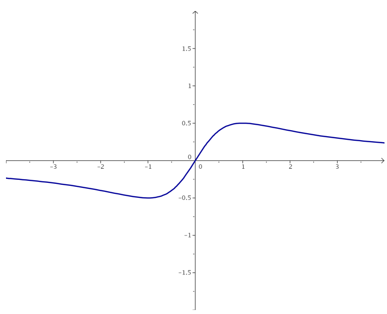


Figura 2.8: Representación gráfica de la función $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$

2.26.

a) Enuncia la regla de la cadena para derivar funciones compuestas.

b) Dada la función $h(x) = e^{sen(f(x))}$, calcula el valor de su derivada en $x = 0$, sabiendo que $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$.

(Junio 07)

- Solución:

a) Es una pregunta teórica que puede encontrarse en cualquier libro.

b) Aplicando reiteradamente la regla de la cadena tenemos que:

$$h'(x) = e^{sen(f(x))} \cdot [sen(f(x))]' = e^{sen(f(x))} \cdot cos(f(x)) \cdot f'(x)$$

Por tanto:

$$h'(0) = e^{sen(f(0))} \cdot cos(f(0)) \cdot f'(0) = e^{sen 0} \cdot cos(0) \cdot 1 = e^0 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

2.27. **Determina los puntos de la parábola $y = x^2$ que están a mínima distancia del punto $P = (0, 1)$.**

(Junio 07)

- Solución:

Los puntos de la parábola tienen la forma genérica $Q(x, x^2)$. La distancia de P a Q será:

$$d(P,Q) = g(x) = \sqrt{x^2 + (x^2-1)^2} = \sqrt{x^2 + x^4 - 2x^2 + 1} = \sqrt{x^4 - x^2 + 1}$$

Vamos a ver donde es mínima esa distancia.

$$g'(x) = \frac{4x^3 - 2x}{2\sqrt{x^4 - 2x^2 + 1}} = \frac{2x^3 - x}{\sqrt{x^4 - 2x^2 + 1}} = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 2x^3 - x = 0 \Longrightarrow x(2x^2 - 1) = 0 \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} x = 0 \\ 2x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right.$$

Vamos a estudiar el signo de la derivada para ver donde la distancia es mínima.

	$\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$	$\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$
$\frac{2x^3-x}{\sqrt{x^4-2x^2+1}}$	$-$	$+$	$-$	$+$
	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

En $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ hay mínimos. Luego los puntos buscados son $P_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right)$ y $P_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right)$.

2.28.

a) **Enuncia el Teorema de Rolle.**

b) **Prueba que la función $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ satisface las hipótesis en el intervalo $[-1,1]$ y calcula un punto del intervalo abierto $(-1,1)$ cuya existencia asegura el Teorema de Rolle.**

(Septiembre 07)

- Solución:

a) La parte teórica puede encontrarse en cualquier libro.

b) Vamos a empezar por ver que se cumplen las hipótesis:

- Obviamente es continua en $[-1,1]$, pues es un polinomio.
- Por la misma razón sabemos que también es derivable.
- También se cumple la tercera premisa

$$f(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 - (-1) - 1 = -1 + 1 + 1 - 1 = 0$$

$$f(1) = (1)^3 + (1)^2 - (1) - 1 = 1 + 1 - 1 - 1 = 0$$

En consecuencia se cumple el teorema. Vamos a encontrar el punto donde la derivada vale cero:

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{6} = \frac{-2 \pm 4}{6} = \left|\begin{array}{l} x = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \\ x = -1 \end{array}\right.$$

Luego el punto buscado es $x = \dfrac{1}{3} \in (-1, 1)$, ya que $x = -1$ no está en el interior del intervalo.

2.29. **Para la función $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$:**

a) Comprueba que la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal en $+\infty$.

b) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

c) Con los datos anteriores, haz una representación aproximada de la gráfica de la función $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$.

(Septiembre 07)

- Solución:

a) Vamos a ver cuanto vale el límite.

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 \cdot e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$$

Para lo anterior hay que tener en cuenta que e^x es un infinito de orden superior que x^2. También puede aplicarse dos veces la regla de L'Hôpital para comprobarlo.

Por tanto la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal en $+\infty$.

b) Vamos a calcular la derivada.

$$f(x) = x^2 \cdot e^{-x} = \frac{x^2}{e^x}$$

$$f'(x) = \frac{2xe^x - x^2e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x\left(2x - x^2\right)}{(e^x)^2} = \frac{2x - x^2}{e^x}$$

Igualando a cero tenemos.

$$\frac{2x - x^2}{e^x} = 0 \Longrightarrow 2x - x^2 = 0 \Longrightarrow x(2 - x) = 0 \left| \begin{array}{l} x = 0 \\ 2 - x = 0 \Longrightarrow x = 2 \end{array} \right.$$

Vamos a estudiar el signo de la derivada:

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
$\dfrac{2x - x^2}{e^x}$	$-$	$+$	$-$
	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

Por tanto:

- Crece $\longrightarrow (0,2)$.
- Decrece $\longrightarrow (-\infty,0) \cup (2,+\infty)$.

c) Acompaña lo que ya sabemos por los apartados anteriores de una tabla de valores. Para formar dicha tabla basta tomar valores en -2, -1, 0, 1 y 2. Nosotros aqui la omitimos, pero la gráfica resultante es:

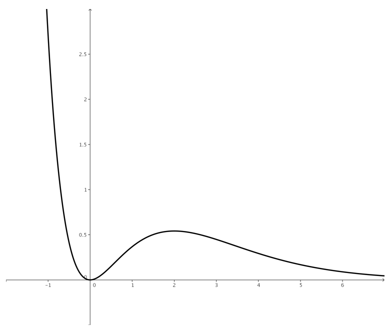


Figura 2.9: Representación gráfica de la función $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$

2.30.

a) Enuncia la condición que se debe cumplir para que una recta $y = l$ sea asíntota horizontal de una función $f(x)$ en $+\infty$.

b) Calcula las asíntotas verticales y horizontales (en $+\infty$ y en $-\infty$) de la función

$$f(x) = \frac{3x-1}{\sqrt{x^2-1}}$$

(Junio 08)

- Solución:

a) Tiene que ocurrir que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$.

b) En primer lugar vamos a ver cual es el dominio de la función. Por un lado tenemos una raiz, por tanto, $x^2-1 \geq 0$. Además, como la raiz está en el denominador no puede valer cero, en consecuencia:

$$x^2 - 1 > 0$$

Para resolver la inecuación, resolvemos la ecuación asociada.

$$x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x^2 = 1 \Longrightarrow x = \pm 1$$

Construimos la tabla

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,+\infty)$
x^2-1	$+$	$-$	$+$

Luego el dominio de la función es $Dom f = (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$

Veamos las asíntotas.

- Asíntotas verticales: Estudiaremos las asíntotas en aquellos puntos que anulan el denominador.
  - $x = -1$ Aqui sólo estudiaremos el límite por la izquierda, pues por la derecha no hay función.
    $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{3x-1}{\sqrt{x^2-1}} = \left[\dfrac{-4}{0}\right] = -\infty$. Luego es una A.V.
  - $x = 1$ Aqui sólo estudiaremos el límite por la derecha, pues por la izquierda no hay función.
    $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{3x-1}{\sqrt{x^2-1}} = \left[\dfrac{2}{0}\right] = +\infty$. Luego es una A.V.
- Asíntotas horizontales:
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x-1}{\sqrt{x^2-1}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x}{\sqrt{x^2}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x}{x} = 3$
    Luego $y = 3$ es asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$.
  - $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x-1}{\sqrt{x^2-1}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-3x-1}{\sqrt{x^2-1}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-3x}{\sqrt{x^2}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-3x}{x} = -3$
    Luego $y = -3$ es asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$.

2.31. Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{(e^x - 1)^2}{e^{x^2} - 1}$$

(Junio 08)

- Solución:

Tenemos que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(e^x-1)^2}{e^{x^2}-1} = \left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Vamos a resolverlo utilizando la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x \to 0} \frac{(e^x-1)^2}{e^{x^2}-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{2\,(e^x-1)\,e^x}{2xe^{x^2}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{2\,(e^x-1)\,e^x + 2e^xe^x}{2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2}} = \frac{0+2}{2+0} = 1$$

2.32.

a) **Calcula el siguiente límite**

$$\lim_{x\to 0} \frac{ln\left(x^2+1\right)}{x}$$

b) **Indica, razonadamente, el valor que debe tomar *a* para que la siguiente función sea continua:**

$$f(x) = \begin{cases} a & si \quad x = 0 \\ \dfrac{ln\left(x^2+1\right)}{x} & si \quad x \neq 0 \end{cases}$$

Nota: *ln* denota el logaritmo neperiano.

(Septiembre 08)

- Solución:

a) Sustituyendo tenemos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{ln\left(x^2+1\right)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

Vamos a resolverlo utilizando L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{ln\left(x^2+1\right)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2x}{x^2+1}}{1} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{x^2+1} = 0$$

b) Tenemos la función

$$f(x) = \begin{cases} a & si \quad x = 0 \\ \dfrac{ln\left(x^2+1\right)}{x} & si \quad x \neq 0 \end{cases}$$

Obviamente la función es continua en todo $\mathbb{R}$ salvo en el cero, por ser cociente de funciones continuas $(x^2+1>0)$.

Para que sea continua en el cero, el límite de la función en dicho punto y el valor de la función en él tienen que coincidir. Como en el apartado anterior vimos que el límite valía cero, deducimos que a debe valer cero.

2.33. Halla los puntos de la curva de ecuación $y = x^3 - 2x^2 + 1$ donde la recta tangente es paralela a la recta $y + x - 2 = 0$.

(Septiembre 08)

- Solución:

Sabemos que la pendiente de la recta tangente coincide con el valor de la derivada en el punto, si esta existe. Además, decir que la recta tangente es paralela a la recta dada es sinónimo de decir que sus pendientes son iguales. Por tanto:

$$\begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 - 4x \\ y + x - 2 = 0 \Longrightarrow y = -x + 2 \Longrightarrow m = -1 \end{array}$$

En consecuencia:

$$3x^2 - 4x = -1 \Longrightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0$$

Resolviendo la ecuación tenemos:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{6} = \frac{4 \pm 2}{6} = \left[\begin{array}{l} \dfrac{4+2}{6} = 1 \\ \\ \dfrac{4-2}{6} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3} \end{array} \right.$$

Luego los puntos buscados son:

$$-f(1) = 1 - 2 + 1 = 0 \Longrightarrow P_1(1, 0)$$

$$-f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27} - \frac{2}{9} + 1 = \frac{1 - 6 + 27}{27} = \frac{22}{27} \Longrightarrow P_2\left(\frac{1}{3}, \frac{22}{27}\right)$$

2.34.

a) Diga cuando un punto $(x_0, f(x_0))$ es de inflexión para una función $f(x)$.

b) Calcule los coeficientes *a* y *b* del polinomio $p(x) = ax^3 - 3x^2 + bx + 1$ para que su gráfica pase por el punto $(1, 1)$, teniendo aquí un punto de inflexión.

c) Diga, razonadamente, si en el punto $(1, 1)$ la función $p(x)$ es creciente o decreciente.

(Junio 09)

- Solución:

Vamos a contestar a cada apartado.

a) Para que $(x_0, f(x_0))$ sea un punto de inflexión tienen que ocurrir dos cosas, $f''(x_0) = 0$ y $f'''(x_0) \neq 0$.
Más correctamente tendríamos que decir que $f''(x_0) = 0$ y que la siguiente derivada no nula sea de índice impar, aunque con la anterior respuesta probablemente valga.

b) Tenemos que $p(x) = ax^3 - 3x^2 + bx + 1$.
Hay dos incógnitas, a y b, por tanto habrá que buscar dos ecuaciones para poder calcularlas. La primera ecuación sale de tener en cuenta que pasa por el punto $(1, 1)$, es decir, $p(1) = 1$, y la otra de tener un punto de inflexión en dicho punto, es decir, $p''(1) = 0$. Vamos a calcular $p''(x)$.

$$p(x) = ax^3 - 3x^2 + bx + 1 \Rightarrow p'(x) = 3ax^2 - 6x + b \Rightarrow p''(x) = 6ax - 6$$

Por tanto, nuestro sistemas es:

$$\left.\begin{array}{lcrcr} f(1) = 1 & \Rightarrow & a - 3 + b + 1 = 1 & \Rightarrow & a + b = 3 \\ f''(1) = 0 & \Rightarrow & 6a - 6 = 0 & \Rightarrow & a = 1 \end{array}\right] \Rightarrow b = 2$$

En conclusión $a = 1$ y $b = 2$.

c) En el apartado anterior ya calculamos $p'(x)$ y vamos a estudiar su signo para ver si crece o decrece en dicho punto.

$$p'(1) = 3 - 6 + 2 = -1 < 0$$

Luego la función es decreciente en $(1, 1)$.

2.35. Calcule los máximos y mínimos relativos de la función $f(x) = \frac{x}{2} + cosx$ en el intervalo $0 < x < 2\pi$. Tenga en cuenta que los ángulos se miden en radianes.

(Junio 09)

- Solución:

Vamos a calcular la primera y segunda derivada de la función. Estas derivadas son:

$$f'(x) = \frac{1}{2} - senx \quad y \quad f''(x) = -cosx$$

Sabemos que habrá un máximo o un mínimo relativo en x_0 si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) < 0$ ó $f''(x_0) > 0$ respectivamente.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} - senx = 0 \Rightarrow senx = \frac{1}{2} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} \\ \\ x = \dfrac{5\pi}{6} \end{array} \right.$$

Veamos el valor, en cada caso, de f"(x).

- $f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0 \Rightarrow$ En $x = \frac{\pi}{6}$ hay un máximo.
- $f''\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -cos\frac{5\pi}{6} = -\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0 \Rightarrow$ En $x = \frac{5\pi}{6}$ hay un mínimo.

2.36.

a) Enuncie el teorema de Rolle.

b) Aplique dicho teorema para probar que, cualquiera que sea el valor del número real a, la ecuación $x^3 - 12x + a = 0$ no puede tener dos soluciones distintas en el intervalo cerrado $[-2, 2]$.

(Septiembre 09)

- Solución:

a) Este teorema lo podemos encontrar en cualquier libro.

b) Sea $f(x) = x^3 - 12x + a$ la función asociada a la ecuación dada. Obviamente la función es continua en el intervalo $[-2, 2]$ y derivable en el intervalo abierto, pues es un polinomio.

   Vamos a comprobar lo que nos piden por el método de reducción al absurdo. Supongamos que tiene dos valores x_1 y x_2 en los cuales la función se anula (sinónimo de tener dos soluciones). Si eso es así, en el intervalo que tiene como extremos dichos puntos se cumplen las hipótesis del teorema de Rolle, pues sería continua y derivable en dichos intervalos (por ser polinómica) y tendría el mismo valor en los extremos, y en consecuencia, se cumpliría la tesis de dicho teorema. Por tanto, debe existir un valor de la variable x en el interior del intervalo (x_1, x_2) en el que se anule la derivada.

   Ahora bien, la derivada de la función se anula:

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

Luego, no se anula en el intervalo pedido y por tanto, esto contradice el hecho de que se cumple la tesis del teorema. Como consecuencia de ello deducimos que la suposición de partida no se cumple, es decir, no existen los x_1 y x_2 supuestos, no hay dos raices en el intervalo $[-2, 2]$

2.37.

a) **Calcule el límite**

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

b) **Diga, razonadamente, el valor que debe tomar c para que la siguiente función sea continua:**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & si \quad x \neq 0 \\ \\ c & si \quad x = 0 \end{cases}$$

(Septiembre 09)

- Solución:

Vamos a calcular el límite aplicando la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1$$

Hecho esto vamos a resolver el segundo apartado.

Obviamente si $x \neq 0$ la función es continua, por ser un cociente de funciones continuas.

Para ser continua en $x = 0$ la función debe existir en dicho punto y coincidir con el límite. Como el límite, según vimos en el apartado anterior, vale 0, deducimos que c tiene que valer 0.

2.38.

a) Escriba la "regla de la cadena" para la derivación de funciones compuestas.

b) Calcule, y simplifique en lo posible, la derivada de la función

$$f(x) = ln\left(\frac{1-cosx}{1+cosx}\right), \qquad 0 < x < \pi$$

(Junio 10 - Fase general)

- Solución:

La respuesta al primer apartado podemos encontrarla en cualquier libro.

Vamos a realizar la derivada del segundo apartado paso a paso, utilizando la regla de la cadena.

$$f'(x) = \frac{\left(\dfrac{1-cosx}{1+cosx}\right)'}{\dfrac{1-cosx}{1+cosx}} = \frac{\dfrac{senx(1+cosx)-(-senx)(1-cosx)}{(1+cosx)^2}}{\dfrac{1-cosx}{1+cosx}} =$$

$$= \frac{\dfrac{senx + \cancel{senx \cdot cosx} + senx - \cancel{senx \cdot cosx}}{(1+cosx)^2}}{\dfrac{1-cosx}{1+cosx}} = \frac{\dfrac{2senx}{(1+cosx)^2}}{\dfrac{1-cosx}{1+cosx}} =$$

$$= \frac{2senx\cancel{(1+cosx)}}{(1-cosx)(1+cosx)^{\cancel{2}}} = \frac{2senx}{1-cos^2x} = \frac{2senx}{sen^2x} = \frac{2}{senx} = 2cosecx$$

2.39. **Calcule el límite**

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - xcosx - 1}{senx - x + 1 - cosx}$$

(Junio 10 - Fase específica)

- Solución:

Sustituyendo tenemos queda

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - xcosx - 1}{senx - x + 1 - cosx} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

Vamos a resolver el límite usando la regla de L'Hôpital dos veces:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^x - xcosx - 1}{senx - x + 1 - cosx} &= \lim_{x\to 0}\frac{e^x - cosx + xsenx}{cosx - 1 + senx} = \left[\frac{0}{0}\right] = \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{e^x + senx + senx + xcosx}{-senx + cosx} = \frac{1}{1} = 1\end{aligned}$$

2.40.

a) **Defina la noción de mínimo relativo de una función.**

b) **Para cada x sea $h(x)$ la suma de las coordenadas del punto $(x, f(x))$ de la gráfica de $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 - x + 1$. Calcule los extremos relativos de $h(x)$.**

- **¿Tiene $h(x)$ algún extremo absoluto? Razone la respuesta.**

(Junio 10 - Fase específica)

- Solución:

El primer apartado podemos encontrarlo en cualquier libro. Vamos a constestar al segundo.

La función $h(x)$ es:

$$h(x) = x + f(x) = x + x^4 + x^3 + x^2 - x + 1 = x^4 + x^3 + x^2 + 1$$

Vamos a derivar para calcular los extremos relativos.

$$h'(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x$$

Vamos a ver donde se anula dicha derivada.

$$4x^3 + 3x^2 + 2x = 0 \Longrightarrow x(4x^2 + 3x + 2) = 0$$

Esto ocurre cuando $x = 0$ y cuando $4x^2 + 3x + 2 = 0$. Al resolver la segunda vemos que el discriminante es negativo, por lo que no tiene solución. Por tanto hay sólo un posible extremo relativo en $x = 0$. Vamos a hacer la segunda derivada.

$$h''(x) = 8x + 3 \Longrightarrow h''(0) = 3 > 0$$

Por tanto hay un mínimo relativo en el punto $P(0, 1)$.

La respuesta al tercer apartado es si. Este mínimo relativo se transforma en mínimo absoluto, pues tanto cuando $x \to -\infty$, como cuando $x \to +\infty$ la función se va a ir a $+\infty$.

2.41. **Halle todos los puntos de la gráfica de la función $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ en los que su recta tangente sea paralela a la recta de ecuación $2x - y = 0$.**

(Septiembre 10 - Fase general)

- Solución:

Para que eso ocurra en x_0 tiene que ocurrir que $f'(x_0) = m_r$. Calculemos ambas cosas:

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 \\ 2x - y = 0 \Longrightarrow y = 2x \Longrightarrow m_r = 2 \end{array}\right] \Longrightarrow 3x^2 + 2x + 1 = 2 \Longrightarrow 3x^2 + 2x - 1 = 0$$

Resolviendo la ecuación

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{6} = \frac{-2 \pm 4}{6} = \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3} \\ \\ x = \dfrac{-6}{6} = -1 \end{array}\right.$$

tenemos que los puntos buscados son:

- $\left(\frac{1}{3}, f\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{40}{27}\right)$
- $(-1, f(-1)) = (-1, 0)$

2.42.

a) **Estudie el dominio, los extremos relativos, la curvatura (intervalos de concavidad y de convexidad) y los puntos de inflexión de la función $f(x) = ln(1 + x^2)$ (ln denota el logaritmo neperiano).**

b) **Represente la gráfica de $f(x) = ln(1+x^2)$ utilizando los datos obtenidos en el apartado (a).**

(Junio 10 - Fase específica)

- Solución:

a) El dominio de la función es todo $\mathbb{R}$, pues $1 + x^2 \geqslant 1 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Vamos a calcular la primera y la segunda derivada de f.

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

$$f''(x) = \frac{2\left(1+x^2\right) - 2x \cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{2+2x^2-4x^2}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{2-2x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$$

Comenzaremos estudiando la primera derivada.

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow \frac{2x}{1+x^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$$

Vamos a estudiar el signo de la derivada.

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$\frac{2x}{1+x^2}$	$-$	$+$
	$\searrow$	$\nearrow$

En consecuencia la función crece en $(0, +\infty)$, decrece en $(-\infty, 0)$ y hay un mínimo relativo en $(0, f(0)) = (0, 0)$. Estudiemos ahora la segunda derivada.

$$f''(x) = 0 \Longrightarrow \frac{2-2x^2}{\left(1+x^2\right)^2} = 0 \Longrightarrow 2 - 2x^2 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$$

Vamos a estudiar el signo de la segunda derivada.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
$\frac{2-2x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$	$-$	$+$	$-$

Ante la falta de un criterio común, basta con ver distintos libros de texto, prefiero decir que la función es:

- Cóncava hacia arriba en $(-1, 1)$.
- Cóncava hacia abajo en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.
- Puntos de inflexión en $(-1, ln2)$ y $(1, ln2)$.

b) Es obvio que la función es simétrica respecto del eje Y y podemos completar la gráfica con una tabla de valores. La gráfica buscada la podemos ver en la figura 2.10

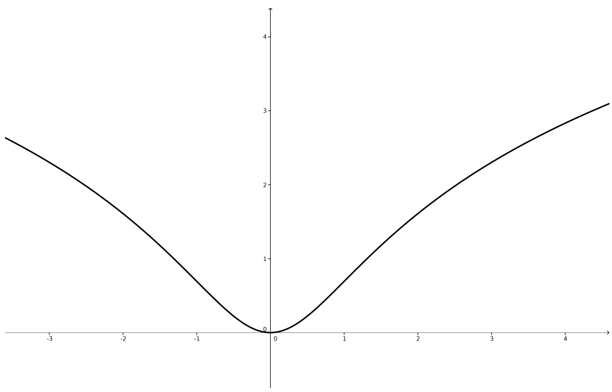


Figura 2.10: Representación gráfica de la función $f(x) = ln\left(1 + x^2\right)$

Capítulo 3

Integral. Cálculo de áreas y volúmenes

3.1. Calcular, integrando por partes, el valor de

$$\int_1^2 x^2 lnx dx$$

(Junio 00)

- Solución:

Vamos a comenzar calculando una primitiva por partes.

$$u = lnx \quad \Longrightarrow \quad du = \frac{1}{x}dx$$

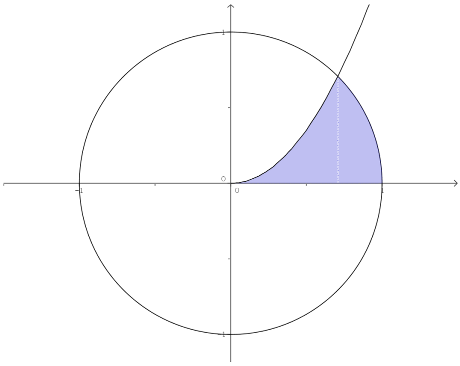
$$dv = x^2 dx \quad \Longrightarrow \quad v = \frac{x^3}{3}$$

$$\int x^2 lnx\, dx = \frac{x^3}{3} lnx - \int \frac{x^{\cancel{3}\,2}}{3} \cdot \frac{1}{\cancel{x}}\, dx = \frac{x^3}{3} lnx - \frac{x^3}{9}$$

Luego:

$$\int_1^2 x^2 lnx\, dx = \left[\frac{x^3}{3} lnx - \frac{x^3}{9}\right]_1^2 = \left(\frac{8}{3} ln2 - \frac{8}{9}\right) - \left(0 - \frac{1}{9}\right) = \frac{8}{3} ln2 - \frac{7}{9}$$

3.2. Calcular el área limitada por la parábola $y = \sqrt{2}x^2$, la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ y el eje OX, que aparece rayada en la figura..



(Junio 00)

- Solución:

Por lo que observamos en la figura del enunciado, nos piden que de la circunferencia consideremos la rama positiva, es decir, tomaremos $y = \sqrt{1-x^2}$.

Es obvio que el área hay que dividirla en dos trozos, como podemos ver en la figura 3.1.

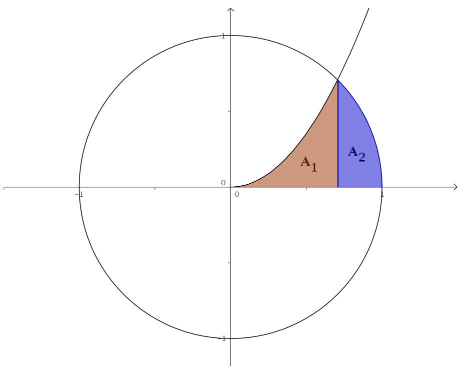


Figura 3.1: Representación detallada del área buscada

Vamos a calcular los puntos de corte:

$$\sqrt{2}x^2 = \sqrt{1-x^2} \Longrightarrow 2x^4 = 1 - x^2 \Longrightarrow 2x^4 + x^2 - 1 = 0$$

Se trata de una ecuación bicuadrada, por lo que hacemos $z = x^2$ y resolvemos.

$$2z^2 + z - 1 = 0$$

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} \Longrightarrow \begin{cases} z_1 = \dfrac{-1+3}{4} = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ z_2 = \dfrac{-1-3}{4} = -1 \Longrightarrow \text{No vale.} \end{cases}$$

Luego el área buscada, según vemos en la figura 3.1 es:

$$A = A_1 + A_2 = \int_0^{\sqrt{2}/2} \sqrt{2}x^2 dx + \int_{\sqrt{2}/2}^1 \sqrt{1-x^2}dx$$

Vamos a calcular cada una por separado, calculando previamente una primitiva en cada caso.

$$\int \sqrt{2}x^2 dx = \frac{\sqrt{2}}{3}x^3$$

Por tanto,

$$A_1 = \int_0^{\sqrt{2}/2} \sqrt{2}x^2 dx = \left[\frac{\sqrt{2}}{3}x^3\right]_0^{\sqrt{2}/2} = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{8} = \frac{1}{6} \text{ u}^2$$

Por otro lado tenemos:

$$\int \sqrt{1-x^2}dx$$

Vamos a utilizar el cambio $x = sent$ para resolver la integral indefinida.

$$\begin{aligned} x &= sent \\ dx &= cost\ dt \end{aligned}$$

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \sqrt{1-sen^2 t}\ cost\ dt = \int cos^2 t\ dt$$

Si aquí cambiamos $cos^2 t = \dfrac{1}{2} + \dfrac{cos2t}{2}$ tendríamos:

$$\int \left(\frac{1}{2} + \frac{cos2t}{2}\right) dt = \frac{1}{2}t + \frac{sen2t}{4} = \frac{1}{2}arcsenx + \frac{sen2(arcsenx)}{4}$$

Por tanto:

$$A_2 = \int_{\sqrt{2}/2}^1 \sqrt{1-x^2}dx = \left[\frac{1}{2}arcsenx + \frac{sen2(arcsenx)}{4}\right]_{\sqrt{2}/2}^1 =$$

$$= \left(\frac{\pi}{4} + 0\right) - \left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\ u^2$$

En consecuencia:

$$A = A_1 + A_2 = \frac{1}{6} + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} = \frac{4 + 3\pi - 6}{24} = \frac{3\pi - 2}{24}\ \mathrm{u}^2$$

3.3. Determinar una función $f(x)$ cuya segunda derivada sea $f''(x) = xe^x$.

(Septiembre 00)

- Solución:

Habrá que calcular una primitiva de la función que nos dan, que será f' y posteriormente calcular otra primitiva de ésta, que será la función que buscamos. La integral se calcula por partes:

$$\begin{array}{lcl} u = x & ; & du = dx \\ dv = e^x dx & ; & v = e^x \end{array}$$

Por tanto:

$$f'(x) = \int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x$$

Hacemos de nuevo la integral de la función obtenida.

$$\int (xe^x - e^x)\, dx = \int xe^x dx - \int e^x dx = xe^x - e^x - e^x = xe^x - 2e^x$$

La función buscada es:

$$f(x) = xe^x - 2e^x$$

3.4. Calcular, con el cambio de variable $t^2 = x + 3$, el valor de:

$$\int_1^6 \frac{xdx}{\sqrt{x+3}}$$

(Septiembre 00)

- Solución:

Vamos a calcular primero una primitiva utilizando el cambio indicado:

$$\begin{array}{l} t^2 = x + 3 \quad \Longrightarrow \quad x = t^2 - 3 \quad \Longrightarrow \quad t = \sqrt{x+3} \\ 2tdt = dx \end{array}$$

Realizando la sustitución:

$$\int \frac{\left(t^2 - 3\right) 2tdt}{t} = \int \frac{2t^3 - 6t}{t} dt = \int \left(2t^2 - 6\right) dt = \frac{2t^3}{3} - 6t = \frac{2\sqrt{(x+3)^3}}{3} - 6\sqrt{x+3}$$

En consecuencia:

$$\int_1^6 \frac{xdx}{\sqrt{x+3}} = \left[\frac{2\sqrt{(x+3)^3}}{3} - 6\sqrt{x+3}\right]_1^6 = \left(\frac{54}{3} - 18\right) - \left(\frac{16}{3} - 12\right) =$$

$$= \frac{54 - 54 - 16 + 36}{3} = \frac{20}{3}$$

3.5. **Determinar una constante positiva a sabiendo que la figura plana limitada por la parábola $y = 3ax^2 + 2x$, la recta $y = 0$ y la recta $x = a$ tiene área $(a^2 - 1)^2$.**

(Junio 01)

- Solución:

La figura 3.2 nos muestra una visión gráfica del problema planteado.

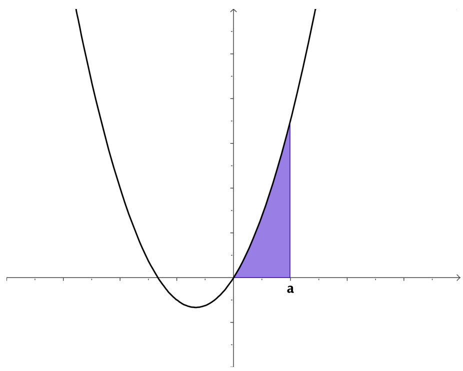


Figura 3.2: Representación detallada del área buscada

Como $a > 0$ la función $y = 3ax^2 + 2x$ corta al Eje X en $x = 0$ y en $x = -\dfrac{2}{3a}$ (que será un número negativo).

Luego el área buscada es la que aparece sombreada en la figura 3.2. Por tanto, tenemos que:

$$\int_0^a (3ax^2 + 2x)dx = (a^2 - 1)^2$$

Ahora bien,

$$\int_0^a (3ax^2 + 2x)dx = \left[ax^3 + x^2\right]_0^a = a^4 + a^2$$

En consecuencia:

$$\begin{aligned} a^4 + a^2 &= (a^2-1)^2 \\ \cancel{a^4} + a^2 &= \cancel{a^4} + 1 - 2a^2 \\ 3a^2 &= 1 \\ a^2 &= \frac{1}{3} \\ a &= \pm\sqrt{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

Como tiene que ser positivo el valor de a, tenemos que $a = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

3.6. Calcular el valor de:

$$\int_0^1 \frac{xdx}{e^{x^2}}$$

(puede hacerse con el cambio de variable $t = -x^2$ y con el cambio de variable $t = x^2$).

(Junio 01)

- Solución:

Vamos a calcular una primitiva. Para ello vamos a utilizar el cambio $t = x^2$.

$$t = x^2 \Longrightarrow dt = 2xdx$$

Sustituyendo tenemos:

$$\int \frac{1}{2e^t}dt = \frac{-1}{2}e^{-t} = \frac{-1}{2}e^{-x^2}$$

Por tanto:

$$\int_0^1 \frac{xdx}{e^{x^2}} = \left[\frac{-1}{2}e^{-x^2}\right]_0^1 = \frac{-1}{2e} + \frac{1}{2}$$

3.7. Representar gráficamente el recinto plano limitado por la curva $y = x^3 - x$ y su tangente en el punto de abscisa $x = 1$. Calcular su área

(Septiembre 01)

- Solución:

Vamos a calcular primero la recta tangente. Vamos a calcularla mediante la ecuación punto-pendiente. El punto lo obtenemos sustituyendo en la función x por 1. Dicho punto será $P(1,0)$.

La pendiente de la recta tangente se obtiene sustituyendo en la derivada de la función:

$$f'(x) = 3x^2 - 1 \Longrightarrow m_{tg} = f'(1) = 3 - 1 = 2$$

La ecuación de la recta será:

$$y - 0 = 2(x - 1) \Longrightarrow y = 2x - 2$$

A continuación representaremos la zona que nos piden. Para pintar la recta basta con hacer una tabla de valores, pero para pintar la función será mejor estudiar su derivada. Vamos a calcularla y estudiaremos su signo para ver el crecimiento y los máximos y mínimos.

$$f'(x) = 3x^2 - 1 \Longrightarrow 3x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Longrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Estudiamos el signo:

	$(-\infty, -\sqrt{3}/3)$	$(-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$	$(\sqrt{3}/3, +\infty)$
$3x^2 - 1$	$+$	$-$	$+$
	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Luego:

- Crece $\longrightarrow \left(-\infty, -\sqrt{3}/3\right) \cup \left(\sqrt{3}/3, +\infty\right)$.

- Decrece $\longrightarrow \left(-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3\right)$.

- Máximo $\longrightarrow \left(-\sqrt{3}/3, 0'38\right)$.

- Mínimo $\longrightarrow \left(\sqrt{3}/3, -0'38\right)$.

Es evidente que se trata de una función impar y por tanto corta en el $(0, 0)$. La representación gráfica podemos verla en la figura 3.3.

Vamos ahora a calcular el área. Hallamos los puntos de corte de la función y la recta.

$$x^3 - x = 2x - 2 \Longrightarrow x^3 - 3x + 2 = 0$$

Buscamos una raiz por Ruffini.

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

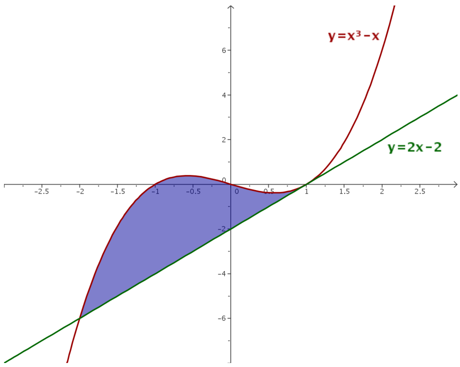


Figura 3.3: Representación detallada del área buscada

Calculamos después las otras dos:

$$x^2 + x - 2 = 0 \Longrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

Luego los límites de integración son $x = -2$ y $x = 1$. Vamos a calcular el área.

$$A = \int_{-2}^{1} \left[\left(x^3 - x\right) - (2x - 2) \right] dx = \int_{-2}^{1} \left(x^3 - 3x + 2\right) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 2x \right]_{-2}^{1} =$$

$$= \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2 \right) - \left(\cancel{4} - 6 - \cancel{4}\right) = \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 8 = \frac{1 - 6 + 32}{4} = \frac{27}{4}\ u^2$$

3.8. Definir el concepto de primitiva de una función y explicar su relación con el concepto de integral definida.

(Septiembre 01)

- Solución:

La solución a este ejercicio podemos verla en cualquier libro.

3.9. Representar gráficamente la figura plana limitada por las parábolas $y = 4 - x^2$, $y = x^2 - 4$. Calcular su área.

(Junio 02)

- Solución:

Las funciones que nos dan son dos parábolas cuyas representaciones gráficas podemos verla en la figura 3.4.

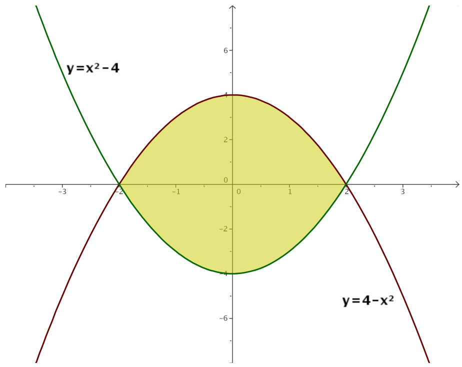


Figura 3.4: Representación gráfica de la región pedida.

Vamos a calcular los puntos corte.

$$x^2 - 4 = 4 - x^2 \Longrightarrow 2x^2 - 8 = 0 \Longrightarrow x^2 = 4 \Longrightarrow x = \pm 2$$

Calculemos ahora el área:

$$A = \int_{-2}^{2} \left[\left(4 - x^2\right) - \left(x^2 - 4\right) \right] \, dx = \int_{-2}^{2} \left(-2x^2 + 8\right) \, dx = \left[\frac{-2x^3}{3} + 8x \right]_{-2}^{2} =$$

$$= \left(\frac{-16}{3} + 16 \right) - \left(\frac{16}{3} - 16 \right) = 32 - \frac{32}{3} = \frac{64}{3} \, u^2$$

3.10. Calcular el valor de la integral

$$\int_0^1 xe^{-x} dx$$

(Junio 02)

- Solución:

Vamos a calcular primero una primitiva. Esta integral hay que resolverla por partes.

$$\begin{array}{lcl} u = x & ; & du = dx \\ dv = e^{-x} \, dx & ; & v = -e^{-x} \end{array}$$

Por tanto:

$$\int x \, e^{-x} \, dx = -xe^{-x} + \int e^{-x} \, dx = -xe^{-x} - e^{-x}$$

Retomamos la definida y tenemos:

$$\int_0^1 x\, e^{-x}\, dx = \left[-xe^{-x} - e^{-x}\right]_0^1 = \left(-e^{-1} - e^{-1}\right) + 1 = \frac{-2}{e} + 1 = \frac{e-2}{e}$$

3.11. **Representa gráficamente el recinto plano limitado, en la región donde la coordenada x es positiva, por la recta $x = 1$, la hiperbola $xy = 1$, y la recta $6y - x + 1 = 0$. Calcula su área.**

(Septiembre 02)

- Solución:

Vamos a representar la región pedida haciendo una tabla de valores para cada caso:

a) Para la hipérbola $xy = 1$ valdría:

x	$0'1$	$0'5$	1	2	3
y	10	5	1	$1/2$	$1/3$

b) Para la recta bastarían dos puntos:

x	0	3
y	$-1/6$	$1/3$

La representación gráfica podemos verla en la figura 3.5.

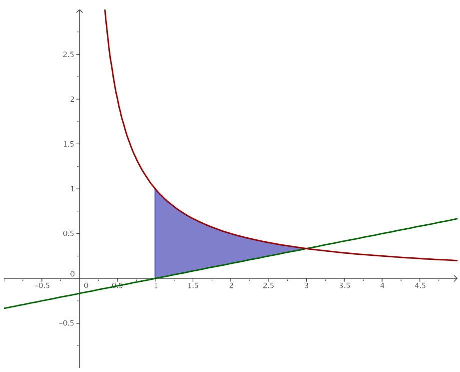


Figura 3.5: Representación gráfica de la región pedida.

Vamos a buscar los puntos de corte de las dos gráficas.

$$\left.\begin{array}{rcl} x.y & = & 1 \\ 6y - x & = & -1 \end{array}\right] \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} x.y = 1 \\ x = 6y + 1 \end{array}\right] \Longrightarrow (6y+1).y = 1 \Longrightarrow 6y^2 + y - 1 = 0$$

Resolviendo la ecuación tenemos:

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{12} = \frac{-1 \pm 5}{12} = \begin{cases} y = -\dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Sustituyendo cada valor de y obtenemos uno de x.

$$\begin{array}{lll} y = -\dfrac{1}{2} & \Longrightarrow & x = -3 + 1 = -2 \Longrightarrow \text{No nos sirve.} \\ y = \dfrac{1}{3} & \Longrightarrow & x = 2 + 1 = 3. \end{array}$$

Por tanto, mis límites de integración son $x = 1$ y $x = 3$.

Observando la figura 3.5, podemos calcular el área de la siguiente forma:

$$\int_1^3 \left(\frac{1}{x} - \frac{x-1}{6}\right) dx = \left[lnx - \frac{x^2}{12} + \frac{x}{6}\right]_1^3 = \left(ln3 - \frac{9}{12} + \frac{6}{12}\right) - \left(0 - \frac{1}{12} + \frac{2}{12}\right) =$$

$$= ln3 - \frac{4}{12} = ln3 - \frac{1}{3}\ u^2$$

3.12. Calcular una primitiva de la función $f(x) = \left(x^2+1\right)^{-1} x$ que se anule en $x = 2$.

(Septiembre 02)

- Solución:

Vamos a calcular la integral indefinida y despues calcularemos el valor de la constante que hace que se anule en $x = 2$.

$$\int \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} ln\left(x^2+1\right) + k$$

Si hacemos $x = 2$ resulta:

$$\frac{1}{2} ln5 + k = 0 \Longrightarrow k = -ln\sqrt{5}$$

3.13. Representar gráficamente el recinto plano limitado por la recta $y = x - 2$ y la parábola de ecuación $y^2 = x$. Calcular su área.

(Junio 03)

- Solución:

Son funciones suficientemente conocidas, por lo que con una tabla de valores se pueden representar. Sólo hay que tener en cuenta que de la parábola hay que considerar las dos ramas. La representación pedida la podemos ver en la figura 3.6.

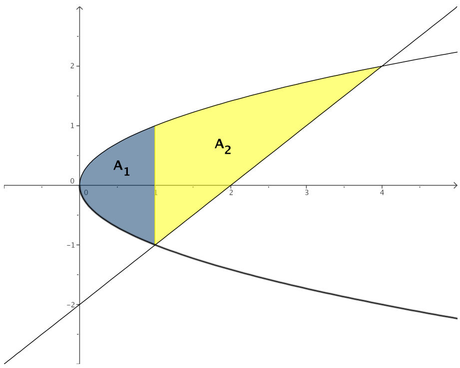


Figura 3.6: Representación gráfica de la región pedida.

Vamos a hallar los puntos de corte.

$$\left.\begin{array}{l} y^2 = x \\ y = x-2 \end{array}\right] \Longrightarrow x = (x-2)^2 \Longrightarrow x = x^2 - 4x + 4 \Longrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 4 \\ x = 1 \end{array} \right.$$

Vamos a calcular el área. Observando la gráfica de la figura 3.6 vemos que hay que descomponer el área en dos trozos (A_1 y A_2).

$$A = A_1 + A_2 = \int_0^1 \left[\sqrt{x} - (-\sqrt{x})\right] dx + \int_1^4 \left[\sqrt{x} - (x-2)\right] dx = \int_0^1 2\sqrt{x} dx +$$

$$+ \int_1^4 \left[\sqrt{x} - x + 2\right] dx = \left[\frac{4\sqrt{x^3}}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{2\sqrt{x^3}}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_1^4 = \frac{4}{3} + \left(\frac{16}{3} - \frac{16}{2} + 8\right) -$$

$$- \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) = \frac{4}{3} + \frac{16}{3} - \frac{16}{2} + 8 - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 2 = \frac{8 + 32 - 48 + 48 - 4 + 3 - 12}{6} = \frac{27}{6}\ u^2.$$

3.14. Calcular el valor de la siguiente integral, donde ln denota el logaritmo neperiano:

$$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x(lnx)}$$

(Junio 03)

- Solución:

Vamos a calcular primero una primitiva. Para eso vamos a hacer el cambio:

$$\begin{aligned} t &= lnx \\ dt &= \frac{1}{x}dx \end{aligned}$$

Tenemos por tanto

$$\int \frac{dx}{xlnx} = \int \frac{dt}{t} = ln|t| = ln|ln|x||$$

Por tanto:

$$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x(lnx)} = [ln|ln|x||]_e^{e^2} = ln|ln|e^2|| - ln|ln|e|| = ln2 - ln1 = ln2$$

3.15. Calcular el valor de la integral (puede hacerse con el cambio de variable $t = e^{-x}$):

$$\int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1}$$

(Septiembre 03)

- Solución:

Vamos a calcular primero una primitiva. Aplicamos el cambio aconsejado:

$$\begin{array}{lcl} t = e^{-x} & \Longrightarrow & e^x = \dfrac{1}{t} \\ dt = -e^{-x}dx & \Longrightarrow & dx = \dfrac{-dt}{t} \end{array}$$

$$\int \frac{dx}{e^x + 1} = \int \frac{-dt}{t\left(\dfrac{1}{t} + 1\right)} = -\int \frac{dt}{1+t} = -ln|1+t| = -ln\left|1 + e^{-x}\right|$$

Por tanto:

$$\int_0^1 \frac{dx}{e^x+1} = \left[-ln\left|1+e^{-x}\right|\right]_0^1 = -ln\left(1+\frac{1}{e}\right) + ln2$$

3.16. Representar gráficamente la figura plana limitada por la curva $y = e^x$, su recta tangente en el punto de abcisa $x = 0$, y la recta $x = 1$. Calcular su área.

(Septiembre 03)

- Solución

Vamos a calcular en primer lugar la ecuación de la recta tangente a la curva en $x = 0$. Sabemos que dicha recta pasa por $(0, e^0) = (0, 1)$ y que su pendiente es $m_{tg} = f'(0) = e^0 = 1$.

Por tanto la ecuación de dicha recta es:

$$y - 1 = 1(x - 0) \Longrightarrow y = x + 1$$

La representación gráfica podemos verla en la figura 3.7.

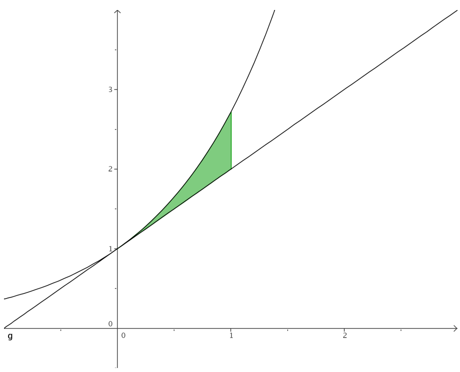


Figura 3.7: Representación gráfica de la región pedida.

En la gráfica puede verse que no hay más punto de corte que $x = 0$, por tanto el área que queremos es:

$$A = \int_0^1 \left[e^x - (x+1)\right] dx = \int_0^1 (e^x - x - 1)dx = \left[e^x - \frac{x^2}{2} - x\right]_0^1 = \left(e - \frac{1}{2} - 1\right) - 1 =$$

$$= e - \frac{5}{2}\, u^2.$$

3.17. Definir el concepto de primitiva de una función. ¿Existe alguna primitiva de la función $f(x) = x^{-1}$ que no tome ningún valor positivo en el intervalo $1 \leq x \leq 2$?

(Junio 04)

- Solución:

El concepto teórico puede encontrarse en cualquier libro. Vayamos a lo práctico.
Tenemos la función $f(x) = x^{-1} = \dfrac{1}{x}$.
Si hayamos las primitivas de la función nos sale:

$$\int \frac{1}{x} dx = lnx + k$$

La gráfica de $y = lnx$ podemos verla en la figura 3.8.

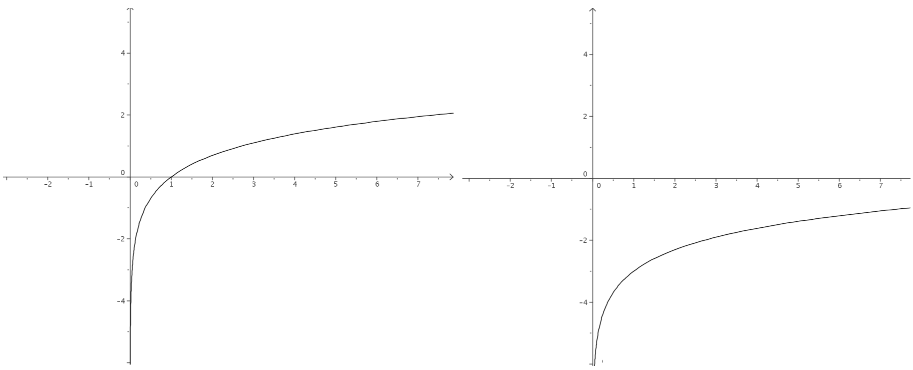


Figura 3.8: Gráfica de y=ln x y de y=ln x-3

Como sabemos, k desplaza verticalmente dicha gráfica, por tanto, si a k le doy, por ejemplo, el valor -3, es decir, $f(x) = lnx - 3$, la gráfica se desplazará 3 unidades hacia abajo, resultando la gráfica de la derecha de la figura 3.8.

Hay que tener en cuenta que la función $y = lnx$ es una función creciente y que $ln1 = 0$ y $ln2 = 0'693147...$, por tanto $y = lnx - 3$ será negativa en todo el intervalo (Observar la gráfica de la derecha la figura 3.8). De hecho bastaría con tomar $k < -ln2$.

3.18. Representa gráficamente el recinto plano limitado, en la región donde la abcisa x es positiva, por la curva $y = x^3 + x$, y por la recta $y = 2x$. Calcular el área.

(Junio 04)

- Solución:

Tenemos que las funciones que encierran el área son $y = x^3 + x$ é $y = 2x$. Para representar $y = x^3 + x$ bastará con calcular sus máximos y mínimos, los puntos de corte con lo ejes y, si es necesario, una tabla de valores.

Vamos a empezar hallando los puntos de corte con el eje X haciendo y=0.

$$x^3 + x = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 1 = 0 \Longrightarrow \text{No tiene solución} \end{cases}$$

Vamos a ver donde se anula su derivada:

$$y' = 3x^2 + 1 \Longrightarrow 3x^2 + 1 = 0 \Longrightarrow \text{No tiene solución}$$

La gráfica de las dos funciones podéis verla en la gráfica 3.9

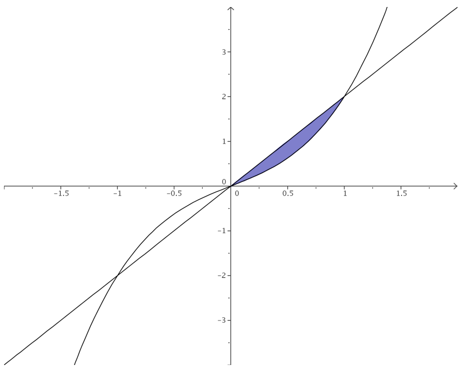


Figura 3.9: Visión gráfica del problema

Vamos a hallar los puntos de corte de las dos funciones:

$$x^3 + x = 2x \Longrightarrow x^3 - x = 0 \Longrightarrow x \cdot (x^2 - 1) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = 0. \\ x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1. \end{cases}$$

Vamos a calcular el área, que será el comprendida entre 0 y 1 por las dos funciones. Como la recta está por encima ponemos:

$$A = \int_0^1 \left[2x - \left(x^3 + x\right)\right] dx = \int_0^1 \left(x - x^3\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\ u^2$$

3.19. Representar gráficamente la figura plana limitada en el primer cuadrante ($x \geq 0, y \geq 0$) por la recta $y = x$ y la curva $x = y^3$. Calcular su área.

(Septiembre 04)

- Solución:

Tenemos que $(x \geq 0, y \geq 0)$, es decir, el primer cuadrante. Tenemos también la función $y = x$ y la función $x = y^3 \Longrightarrow y = \sqrt[3]{x}$.

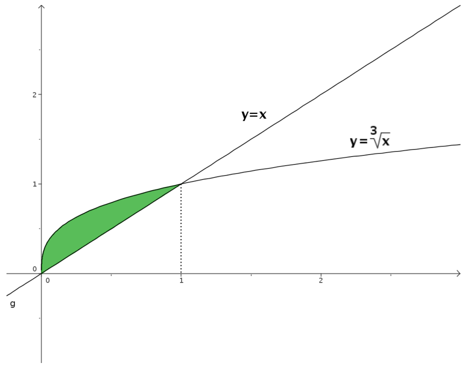


Figura 3.10: Representación detallada

El área que queremos calcular es la que nos muestra la figura 3.10. Buscamos los puntos de corte de ambas funciones:

$$x = \sqrt[3]{x} \Longrightarrow x^3 = x \Longrightarrow x^3 - x = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

Como $x \geq 0; y \geq 0$, sobra la raiz $x = -1$ y tenemos que:

$$A = \int_0^1 \left(\sqrt[3]{x} - x\right) dx = \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{3}} - x\right) dx = \left[\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \left[\frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\ u^2$$

3.20. Calcular el valor de la siguiente integral:

$$\int_1^2 x\sqrt[3]{x^2 - 1}dx$$

(puede hacerse con el cambio de variable $x^2 - 1 = t^3$.

(Septiembre 04)

- Solución:

Vamos a resolver primero la indefinida.

Hacemos el cambio que nos recomiendan:

$$\begin{array}{lcl} t^3 = x^2 - 1 & \Longrightarrow & t = \sqrt[3]{x^2 - 1} \\ 3t^2 dt = 2xdx & & \end{array}$$

Por tanto:

$$\int x\sqrt[3]{x^2-1}dx = \frac{1}{2}\int 3t^2\sqrt[3]{t^3}dt = \frac{3}{2}\int t^3dt = \frac{3}{2}\frac{t^4}{4}+k = \frac{3\sqrt[3]{(x^2-1)^4}}{8}+k$$

En consecuencia tendríamos:

$$\int_1^2 x\sqrt[3]{x^2-1}dx = \left[\frac{3\sqrt[3]{(x^2-1)^4}}{8}\right]_1^2 = \frac{3\sqrt[3]{81}}{8} = \frac{9\sqrt[3]{3}}{8}$$

3.21. Representar gráficamente el recinto plano limitado por las curvas $y = e^x, y = e^{-x}$, y por la recta $x = 1$. Calcular su área.

(Junio 05)

- Solución:

Vamos a representar las funciones haciendo una tabla de valores:

$y = e^x \Longrightarrow$

x	-2	-1	0	1	2
y	e^{-2}	e^{-1}	1	e	e^2

$y = e^{-x} \Longrightarrow$

x	-2	-1	0	1	2
y	e^2	e	1	e^{-1}	e^{-2}

La representación gráfica y el área buscada la vemos en la figura 3.11.

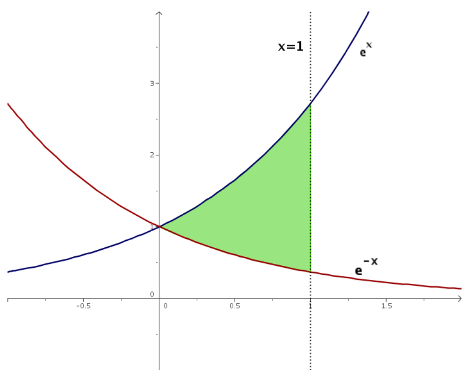


Figura 3.11: Área encerrada por las exponenciales y x=1.

Vamos a encontrar los puntos de corte:

$$e^x = e^{-x} \Longrightarrow \frac{e^x}{e^{-x}} = 1 \Longrightarrow e^x.e^x = 1 \Longrightarrow e^{2x} = 1 = e^0 \Longrightarrow 2x = 0 \Longrightarrow x = 0$$

Luego los límites de integración son $x = 0$ y $x = 1$. Por tanto:

$$\int_0^1 \left(e^x - e^{-x}\right) dx = \left[e^x + e^{-x}\right]_0^1 = \left(e^1 + e^{-1}\right) - (1+1) =$$

$$= e + \frac{1}{e} - 2 = \frac{e^2 + 1 - 2e}{e}\ u^2$$

3.22. Calcular el valor de la siguiente integral:

$$\int_1^e \frac{lnx}{x^2} dx$$

(puede hacerse por partes).

(Junio 05)

- Solución:

Vamos a resolver la integral como nos indican, por partes. Para ello vamos a derivar el logaritmo y a integrar el polinomio.

$$u = lnx \qquad \Longrightarrow \quad du = \frac{1}{x}dx$$

$$dv = \frac{1}{x^2}dx \quad \Longrightarrow \quad v = \frac{-1}{x}$$

Vamos a empezar por encontrar una primitiva:

$$\int \frac{lnx}{x^2}dx = \frac{-lnx}{x} - \int \frac{-1}{x} \cdot \frac{1}{x}dx = \frac{-lnx}{x} + \int \frac{1}{x^2}dx = \frac{-lnx}{x} - \frac{1}{x} = \frac{-lnx - 1}{x}$$

Por tanto:

$$\int_1^e \frac{lnx}{x^2}dx = \left[\frac{-lnx - 1}{x}\right]_1^e = \frac{-lne - 1}{e} - \frac{-ln1 - 1}{1} = \frac{-2}{e} + 1$$

3.23. Calcular una primitiva de la función $f(x) = (x+1)^2 x^{-1/2}$ que se anule en $x = 1$.

(Septiembre 05)

- Solución:

Tenemos que nuestra función es:

$$f(x) = (x+1)^2 x^{-1/2} = \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}} = \frac{x^2 + 2x + 1}{\sqrt{x}} = x^{3/2} + 2x^{1/2} + x^{-1/2}$$

Vamos a calcular la integral indefinida:

$$\int (x^{3/2} + 2x^{1/2} + x^{-1/2})dx = \frac{2x^{5/2}}{5} + \frac{4x^{3/2}}{3} + 2x^{1/2} + k$$

Según el enunciado tiene que anularse en $x = 1$, por tanto:

$$\frac{2}{5} + \frac{4}{3} + 2 + k = 0 \Longrightarrow k = -\frac{2}{5} - \frac{4}{3} - 2 = \frac{-6 - 20 - 30}{15} = \frac{-56}{15}$$

La primitiva buscada es:

$$F(x) = \frac{2x^{5/2}}{5} + \frac{4x^{3/2}}{3} + 2x^{1/2} - \frac{56}{15}$$

3.24. Representar gráficamente el recinto plano limitado por la recta $x - y = 1$ y por la curva de ecuación $y = \sqrt{x-1}$. Calcular su área.

(Septiembre 05)

- Solución:

Ambas funciones son conocidas y su representación puede hacerse por una sencilla tabla de valores que voy a omitir. Tras eso la representación gráfica podemos verla en la figura 3.12.

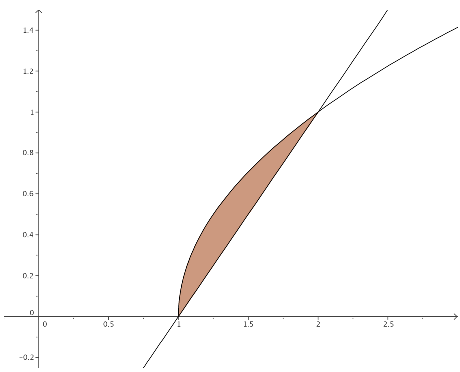


Figura 3.12: Representación detallada del área buscada

A continuación vamos a calcular el área encerrada por las dos funciones. Empezaremos por calcular los puntos de corte para delimitar los límites de integración.

$$\begin{aligned} \sqrt{x-1} &= x - 1 \\ x - 1 &= (x-1)^2 \\ x - 1 &= x^2 - 2x + 1 \end{aligned}$$

$$-x^2 + 3x - 2 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Por tanto el área quedaría:

$$A = \int_1^2 \left[\sqrt{x-1} - (x-1)\right] dx = \left[\frac{2\sqrt{(x-1)^3}}{3} - \frac{x^2}{2} + x\right]_1^2 =$$

$$= \left(\frac{2}{3} - \cancel{2} + \cancel{2}\right) - \left(-\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 1 = \frac{4+3-6}{6} = \frac{1}{6}\ u^2$$

3.25. **Representa gráficamente la figura plana limitada por la curva $y = x^4$, su recta tangente en el punto $(1,1)$ y el eje OY. Calcular su área.**

(Junio 06)

- Solución:

La función $y = x^4$ es de fácil representación, basta con dar algunos valores. Vamos a calcular la recta tangente que nos piden y posteriormente realizaremos la representación de la zona buscada.

Sabemos que la pendiente de dicha recta es la derivada de la función en el punto, por tanto:

$$f'(x) = 4x^3 \Longrightarrow m_{tg} = f'(1) = 4$$

Como la recta pasa por el punto $(1,1)$ y tiene la pendiente anterior, tenemos que la recta buscada es:

$$y - 1 = 4(x-1) \Longrightarrow y - 1 = 4x - 4 \Longrightarrow y = 4x - 3$$

En consecuencia, la representación gráfica de ambas funciones y la zona pedida la podemos ver en la figura 3.13.

Vamos a calcular el área que nos piden:

$$\int_0^1 \left[x^4 - (4x-3)\right] dx = \left[\frac{x^5}{5} - 2x^2 + 3x\right]_0^1 = \frac{1}{5} - 2 + 3 = \frac{6}{5}\ u^2$$

3.26. **Halla una primitiva de la función $f(x) = xe^x$.**

(Junio 06)

- Solución:

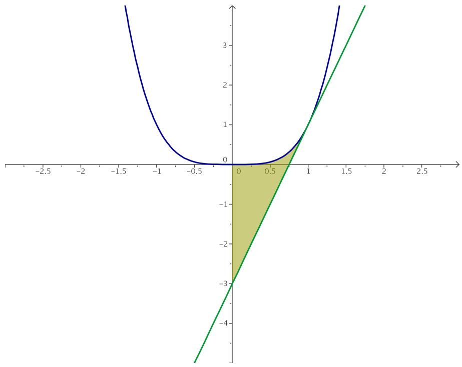


Figura 3.13: Representación gráfica de la región pedida.

Es una integral típica para resolverla por partes, en la que tenemos que derivar el polinomio e integrar la exponencial.

$$\left.\begin{array}{rcl} u = x & ; & du = dx \\ dv = e^x dx & ; & v = e^x \end{array}\right]$$

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x$$

No es necesario terminar el resultado sumando una constante pues nos piden una primitiva, no todas.

3.27. Enuncia la regla de Barrow. Representa la gráfica de la función

$$f(x) = \int_1^x tdt$$

(Septiembre 06)

- Solución:

La regla de Barrow puede verse en cualquier libro.

Vamos a calcular cual es nuestra función:

$$f(x) = \int_1^x tdt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_1^x = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

De su ecuación deducimos que se trata de una parábola. Para representarla vamos a calcular la coordenada x del vértice y haremos una tabla de valores.

Coordenada x del vértice $\longrightarrow x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{0}{1} = 0$

La tabla de valores que utilizaremos es:

x	0	-1	1	-2	2	-3	3
y	$-1/2$	0	0	$3/2$	$3/2$	4	4

La representación gráfica la tenemos en la figura 3.14

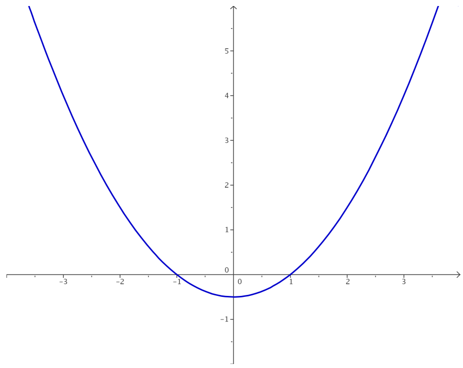


Figura 3.14: Representación gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$

3.28. Representa la figura plana limitada por la gráfica de la función $f(x) = cosx$, en el intervalo $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, y por la recta $y = \frac{1}{2}$. Calcular su área.

(Septiembre 06)

- Solución:

La representación del área pedida no es complicada, pues se suponen conocidas ambas funciones. Dicha representación la encontramos en la figura 3.15.

Vamos a encontrar los puntos de corte que nos dirán cuales son los límites de integración.

$$cosx = \frac{1}{2} \Longrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3}$$

Para hallar el área consideramos la función $g(x) = cosx - \frac{1}{2}$. Vamos a calcular una primitiva de dicha función.

$$G(x) = \int \left(cosx - \frac{1}{2}\right) dx = senx - \frac{x}{2}$$

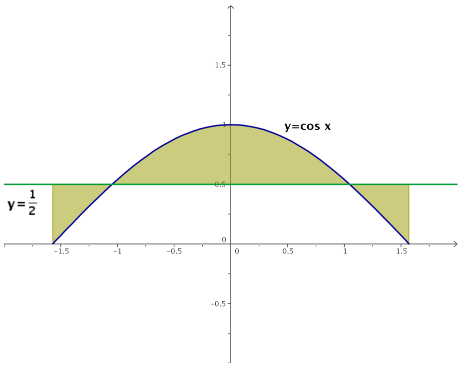


Figura 3.15: Representación gráfica de la región pedida.

Sustituimos en los distintos puntos que tenemos resultando:

$$G\left(\frac{-\pi}{2}\right) = sen\left(\frac{-\pi}{2}\right) - \frac{\frac{-\pi}{2}}{2} = -1 + \frac{\pi}{4} = -0'2146$$

$$G\left(\frac{-\pi}{3}\right) = sen\left(\frac{-\pi}{3}\right) - \frac{\frac{-\pi}{3}}{2} = \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6} = -0'3424$$

$$G\left(\frac{\pi}{3}\right) = sen\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{\frac{\pi}{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} = 0'3424$$

$$G\left(\frac{\pi}{2}\right) = sen\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\frac{\pi}{2}}{2} = 1 - \frac{\pi}{4} = 0'2146$$

Para calcular el área hacemos:

$$G\left(\frac{-\pi}{3}\right) - G\left(\frac{-\pi}{2}\right) = -0'3424 + 0'2146 = -0'1278$$

$$G\left(\frac{\pi}{3}\right) - G\left(\frac{-\pi}{3}\right) = 0'3424 + 0'3424 = 0'6848$$

$$G\left(\frac{\pi}{2}\right) - G\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0'2146 - 0'3424 = -0'1278$$

Y el área buscada será:

$$A = |-0'1278| + 0'6848 + |-0'1278| = 0'9404\ u^2$$

.

3.29. **Representa gráficamente el recinto plano limitado por las parábolas $y = 1 - x^2$ e $y = 2x^2$ y calcula su área.**

(Junio 07)

- Solución:

Vamos a representar las dos parábolas. Para ello empezamos por calcular sus vértices y hacemos después sendas tablas de valores.

- $y = 1 - x^2$

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{-2} = 0$$

x	0	-1	-2	1	2
y	1	0	-3	0	-3

- $2x^2$

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{-4} = 0$$

x	0	-1	-2	1	2
y	0	2	8	2	8

Luego sus representaciones gráficas son:

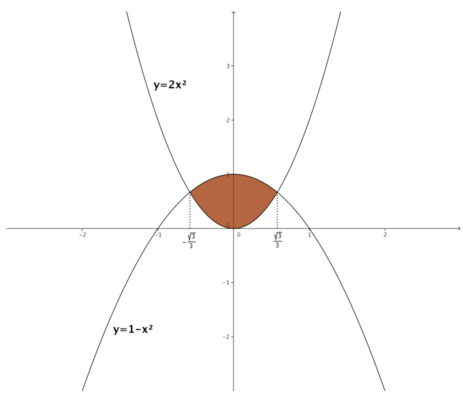


Figura 3.16: Representación gráfica de la región pedida.

Vamos a hallar los puntos de corte para calcular el área:

$$2x^2 = 1 - x^2 \Longrightarrow 3x^2 = 1 \Longrightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Longrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Luego el área pedida es:

$$A = \int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \left(1 - x^2 - 2x^2\right) dx = \int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \left(1 - 3x^2\right) = \left[x - x^3\right]_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{3\sqrt{3}}{27} - \left(\frac{-\sqrt{3}}{3} + \frac{3\sqrt{3}}{27}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{6\sqrt{3}}{27} = \frac{18\sqrt{3} - 6\sqrt{3}}{27} = \frac{12\sqrt{3}}{27} = \frac{4\sqrt{3}}{9} u^2$$

3.30. Calcula el valor de la integral

$$\int_3^{10} (x-2)^{1/3} dx$$

(Junio 07)

- Solución:

$$\int_3^{10} (x-2)^{1/3} dx = \left[\frac{3(x-2)^{4/3}}{4}\right]_3^{10} = \left[\frac{3\sqrt[3]{(x-2)^4}}{4}\right]_3^{10} = \left[\frac{3(x-2)\sqrt[3]{(x-2)}}{4}\right]_3^{10} =$$

$$= \frac{24\sqrt[3]{8}}{4} - \frac{3\sqrt[3]{1}}{4} = \frac{48}{4} - \frac{3}{4} = \frac{45}{4}$$

3.31. Representa gráficamente la figura plana limitada por la curva $y = 2x^3$, su recta tangente en el origen de coordenadas y la recta $x = 2$. Calcula su área.

(Septiembre 07)

- Solución:

La representación gráfica de la región pedida está en la figura 3.17. Vamos a calcular la recta tangente en $x = 0$. Sabemos que la ecuación de la recta tangente es:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0)$$

Empezamos por calcular la pendiente:

$$f'(x) = 6x \Longrightarrow m_{tg} = f'(0) = 0$$

Además tenemos que $f(0) = 0$.

Luego la recta tangente es $y = 0$.

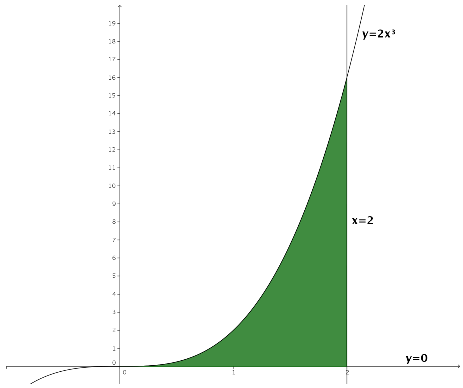


Figura 3.17: Representación gráfica de la región pedida.

Para la función hacemos una tabla de valores que aqui omitimos.

Vamos a calcular el área. En la gráfica podemos ver marcada la región a la que queremos calcularle el área.

$$A = \int_0^2 2x^3 dx = \left[\frac{x^4}{2}\right]_0^2 = \frac{16}{2} - 0 = 8u^2$$

3.32.

a) Enuncia el Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral.

b) Calcula el punto al que se refiere dicho teorema para la función $f(x) = 3x^2 + 1$ **en el intervalo** $[0, 3]$

(Septiembre 07)

- Solución:

a) La parte teórica puede encontrarse en cualquier libro.

b) Vamos a ver cuanto vale la integral.

$$\int_0^3 \left(3x^2 + 1\right) dx = \left[x^3 + x\right]_0^3 = 30 - 0 = 30$$

Vamos a buscar el valor pedido.

$$f(c)(3-0) = 30 \Longrightarrow \left(3c^2 + 1\right) \cdot 3 = 30 \Longrightarrow 9c^2 + 3 = 30 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 9c^2 = 27 \Longrightarrow c^2 = 3 \Longrightarrow c = \pm\sqrt{3}$$

De los dos valores sólo nos sirve $c = \sqrt{3}$, pues el otro no pertenece al intervalo $(0, 3)$.

3.33. **Calcula el valor de la siguiente integral (puede hacerse con el cambio de variable $t = ln(x)$)**

$$\int_1^e \frac{1}{x\,(1 + ln(x))}dx$$

donde ln denota el logaritmo neperiano.

(Junio 08)

- Solución:

Para resolver la integral empezaremos por calcular una primitiva. Realizamos el cambio aconsejado.

$$t = ln(x) \quad \Longrightarrow \quad dt = \frac{1}{x}dx$$

Luego:

$$\int \frac{1}{x\,(1 + ln(x))}dx = \int \frac{1}{1+t}dt = ln(1+t) = ln(1 + lnx)$$

Por tanto:

$$\int_1^e \frac{1}{x\,(1 + ln(x))}dx = [ln(1 + ln(x))]_1^e = (ln(1 + ln(e)) - ln(1 + ln(1))) = ln(2) - ln(1) = ln2$$

3.34.

a) **Representa gráficamente el recinto plano limitado por la recta $y + 2x - 6 = 0$ y la parábola $y = -x^2 + 2x + 3$.**

b) **Calcula su área.**

(Junio 08)

- Solución:

a) Vamos a hacer una tabla de valores para la recta:

x	0	2
y	6	2

Vamos a calcular una tabla de valores para la parábola. Para ello empezamos por calcular su vértices y hacemos después dicha tabla de valores.

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{-2} = 1$$

x	1	0	2	-1	3
y	4	3	3	0	0

La representación gráfica es:

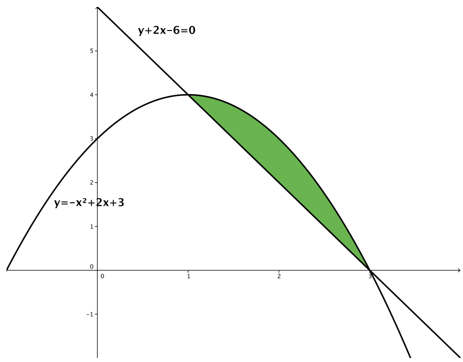


Figura 3.18: Representación gráfica de la región pedida.

b) Vamos a calcular el área. Para ello empezaremos por calcular los puntos de corte de las dos gráficas:

$$\left.\begin{array}{l} y+2x-6=0 \\ y=-x^2+2x+3 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} y=-2x+6 \\ y=-x^2+2x+3 \end{array}\right\} \Longrightarrow -2x+6=-x^2+2x+3$$

Luego:

$$x^2-4x+3=0$$

Resolviendo la ecuación obtenemos:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{4+2}{2} = 3 \\ \\ \dfrac{4-2}{2} = 1 \end{array} \right.$$

Vamos a resolver la integral.

$$A = \int_1^3 \left[\left(-x^2+2x+3\right) - (-2x+6) \right] dx = \int_1^3 \left(-x^2+4x-3\right) dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x \right]_1^3 = (-9 + 18 - 9) - \left(-\frac{1}{3} + 2 - 3 \right) =$$

$$= \frac{1}{3} - 2 + 3 = \frac{1 - 6 + 9}{3} = \frac{4}{3} u^2$$

3.35. **Calcula la función $f(x)$ cuya gráfica pasa por el punto $(0,1)$ (es decir, $f(0) = 1$) y que tiene como derivada la función $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$.**

(Septiembre 08)

- Solución:

Vamos a calcular la integral indefinida de $f'(x)$ y luego le impondremos a la función obtenida que pase por el punto $(0,1)$ para calcular el valor de la constante.

$$\int \frac{2x}{x^2 + 1} dx = ln \left(x^2 + 1 \right) + K$$

Por tanto, como $f(0) = 1$, tenemos:

$$ln 1 + K = 1 \Longrightarrow K = 1$$

Luego la función buscada es:

$$f(x) = ln \left(x^2 + 1 \right) + 1$$

3.36.

a) **Define el concepto de primitiva de una función.**

b) **Di, razonando la respuesta, si las funciones $F_1(x) = sen^2 x$ y $F_2(x) = -cos^2 x$ son primitivas de una misma función.**

(Septiembre 08)

- Solución:

La respuesta al primer apartado puede encontrarse en cualquier libro de texto, por lo que pasaremos a resolver la segunda.

Vamos a calcular las derivadas de $F_1(x)$ y de $F_2(x)$ y veremos si coinciden.

$$F_1'(x) = 2 \cdot senx \cdot cosx$$

$$F_2'(x) = 2 \cdot (-cosx) \cdot (-senx) = 2 \cdot senx \cdot cosx$$

Por tanto, ambas funciones son primitivas de una misma función.

3.37.

a) **Exprese $f(x) = x \cdot |x|$ como una función definida a trozos y dibuje su gráfica de forma aproximada.**

b) **Calcule la integral definida $\int_{-1}^{1} x \cdot |x|\, dx$.**

c) **Calcule el área del recinto plano limitado por la gráfica de $f(x)$, el eje $\boldsymbol{OX}$, la recta $x = -1$ y la recta $x = 1$.**

(Junio 09)

- Solución:

Respondemos a las tres cuestiones.

a) Si tenemos en cuenta que:

$$|x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$$

tenemos que

$$f(x) = x \cdot |x| = \begin{cases} x^2 & si \quad x \geq 0 \\ -x^2 & si \quad x < 0 \end{cases}$$

Por tanto su gráfica es:

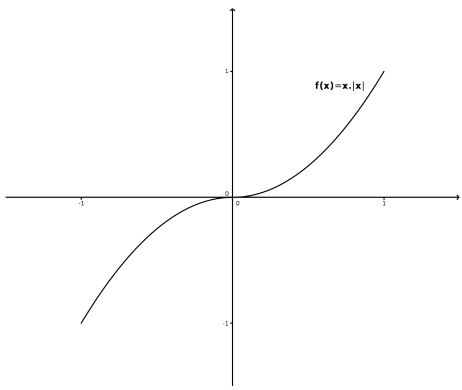


Figura 3.19: Representación gráfica de la función $f(x) = x \cdot |x|$.

b) La integral definida de una función definida a trozos tiene que tener en cuenta los dos trozos, por tanto:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0} -x^2 dx + \int_{0}^{1} x^2 dx = \left[\frac{-x^3}{3}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{1} =$$

$$= \left[0 - \frac{1}{3}\right] + \left[\frac{1}{3} - 0\right] = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0$$

c) El área que estamos buscando podemos verla en la siguiente gráfica:

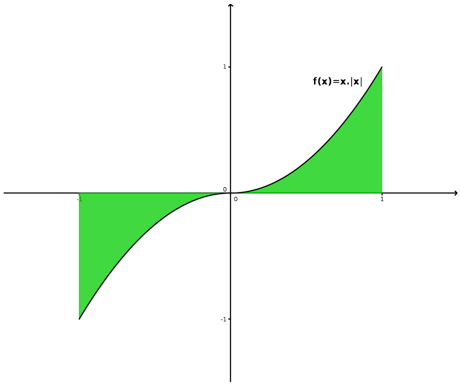


Figura 3.20: Representación gráfica del área buscada.

El área será por tanto:

$$A = \left|\int_{-1}^{0} -x^2 dx\right| + \left|\int_{0}^{1} x^2 dx\right| = \left|-\frac{1}{3}\right| + \left|\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

3.38.

a) Escriba la fórmula, o regla, de integración por partes.

b) Aplíquela para calcular la siguiente integral indefinida

$$\int x^2 cosx dx$$

(Junio 09)

- Solución:

La respuesta al primer apartado puede encontrarse en cualquier libro. Vamos a resolver la segunda cuestión.

Es una integral en la que habrá que aplicar la integral por parte dos veces. En ambos casos derivaremos el polinomio e integraremos la función trigonométrica.

$$u = x^2 \quad \Rightarrow \quad du = 2xdx$$

$$dv = cosxdx \quad \Rightarrow \quad v = senx$$

Sustituyendo tenemos:

$$\int x^2 cosxdx = x^2 senx - \int 2xsenxdx = x^2 senx - 2\int xsenxdx = (*)$$

Volvemos a aplicar la integración por partes.

$$u = x \quad \Rightarrow \quad du = dx$$

$$dv = senxdx \quad \Rightarrow \quad v = -cosx$$

Sustituyendo, de nuevo, tenemos.

$$(*) = x^2 senx - 2\left[-xcosx - \int -cosxdx\right] = x^2 senx - 2\left[-xcosx + \int cosxdx\right]$$

$$= x^2 senx + 2xcosx - 2senx + k$$

3.39. Dada la parábola de ecuación $y = -x^2 - 2x + 3$, sea r su recta tangente en $x = -1$ y sea s su recta tangente en $x = 1$.

a) Calcule las ecuaciones de r y de s.

b) Represente, de forma aproximada, el recinto plano limitado por la parábola, la recta r y la recta s.

c) Calcule el área de dicho recinto.

(Septiembre 09)

- Solución:

Vamos a empezar por calcular las rectas r y s. Comencemos por r. Para ello vamos a calcular la pendiente (que será el valor de la derivada en $x = -1$) y el punto por el que pasa $P(-1, y(1))$.

$$y'(x) = -2x - 2 \Rightarrow y'(-1) = 2 - 2 = 0$$

A su vez tenemos que $y(1) = -1 + 2 + 3 = 4$. Por tanto $m_r = 0$ y $P(-1, 4)$.
En consecuencia la ecuación de la recta r es:

$$y - 4 = 0(x + 1) \Rightarrow y = 4$$

Vamos a calcular ahora la ecuación de s. Análogamente a la recta r tenemos:

$$y'(1) = -2 - 2 = -4$$

y tenemos que $y(1) = 1 - 2 + 3 = 0$. Luego $m_s = -4$ y $Q(1, 0)$.

Por tanto la ecuación de la recta s es:

$$y - 0 = -4(x - 1) \Rightarrow y = -4x + 4$$

Pasemos al segundo apartado. Vamos a representar el recinto que nos piden. Para representar la parábola vamos a calcular la coordenada x del vértice:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{-2} = -1$$

Vamos a calcular una tabla de valores:

x	-1	0	-2	1	-3
y	4	3	3	0	0

Para las rectas basta con una tabla de valores con sólo dos valores:

- Recta r:
  La tabla de valores podría ser

x	-1	1
y	4	4

- Recta s:
  La tabla de valores podría ser

x	-1	1
y	8	0

Luego la zona pedida la podemos ver en la figura 3.21.

Vamos a calcular el área que nos piden en el último apartado. Si observamos la gráfica antes citada podemos ver que hay dos zonas delimitadas.

Una en el intervalo $[-1, 0]$ y definida por las funciones $y = -x^2 - 2x + 3$ y por la función $y = 4$. A esta zona la llamaremos A_1.

La otra en el intervalo $[0, 1]$ y definida por las funciones $y = -x^2 - 2x + 3$ y por la función $y = -4x + 4$. A esta zona la llamaremos A_2.

Vamos a ver los puntos de corte que observamos gráficamente.

- Puntos de corte de las funciones $y = -x^2 - 2x + 3$ e $y = 4$.

  $$-x^2 - 2x + 3 = 4 \Rightarrow -x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x + 1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1$$

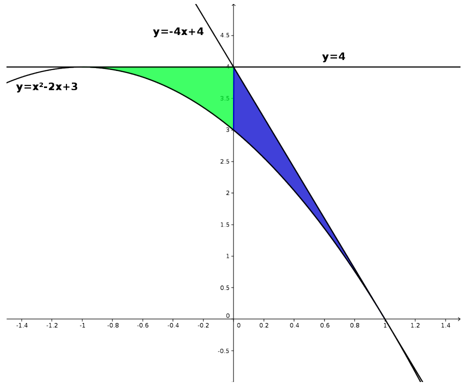


Figura 3.21: Representación gráfica del área buscada.

- Puntos de corte de las funciones $y = -x^2 - 2x + 3$ e $y = -4x + 4$.

$$-x^2-2x+3 = -4x+4 \Rightarrow -x^2+2x+1 = 0 \Rightarrow x^2-2x+1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

- Puntos de corte de las funciones $y = 4$ e $y = -4x + 4$.

$$-4x + 4 = 4 \Rightarrow -4x = 0 \Rightarrow x = 0$$

El área que queremos calcular es $A = A_1 + A_2$. Vamos a calcular A_1 y A_2.

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{-1}^{0} \left[4 - \left(-x^2 - 2x + 3\right)\right] dx = \int_{-1}^{0} \left(x^2 + 2x + 1\right) dx = \\ &= \left[\frac{x^3}{3} + x^2 + x\right]_{-1}^{0} = 0 - \left(-\frac{1}{3} + 1 - 1\right) = \frac{1}{3}u^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_{-1}^{0} \left[-4x + 4 - \left(-x^2 - 2x + 3\right)\right] dx = \int_{-1}^{0} \left(x^2 - 2x + 1\right) dx = \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right]_{-1}^{0} = \left(\frac{1}{3} - 1 + 1\right) - 0 = \frac{1}{3}u^2 \end{aligned}$$

Luego:

$$A = A_1 + A_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}u^2$$

3.40.

a) **Calcule una primitiva de la función racional**

$$f(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

b) **Calcule la integral** $\int \frac{1}{cosx}dx$ **(puede utilizarse el cambio de variable** $t = senx$**).**

(Septiembre 09)

- Solución:

Vamos a calcular la integral de esa función. Es obvio que se trata de la integral de una función racional con raices simples $\left[1 - x^2 = (1-x)(1+x)\right]$.

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} = \frac{A(1+x)+B(1-x)}{1-x^2}$$

Luego:

$$A(1+x)+B(1-x) = 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Por tanto, dando a x los valores 1 y -1 tenemos:

$$\begin{aligned} x &= 1 \Rightarrow 2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2} \\ x &= -1 \Rightarrow -2B = 1 \Rightarrow B = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

En consecuencia:

$$\int \frac{1}{1-x^2}dx = \int \frac{\frac{1}{2}}{1-x}dx + \int \frac{-\frac{1}{2}}{1+x}dx = -\frac{1}{2}ln|1-x| - \frac{1}{2}ln|1+x| + k$$

La primitiva que nos piden podría ser:

$$F(x) = -\frac{1}{2}ln|1-x| - \frac{1}{2}ln|1+x|$$

Vamos a calcular la otra integral que nos piden aplicando el cambio aconsejado:

$$\begin{aligned} t &= senx \Rightarrow t^2 = sen^2x \Rightarrow 1-t^2 = cos^2x \Rightarrow cosx = \sqrt{1-t^2} \\ dt &= cosxdx \Rightarrow dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \end{aligned}$$

Luego:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{1}{1-t^2}dt$$

Ahora bien, $1 - t^2 = (1-t)(1+t)$. Por tanto:

$$A(1+t) + B(1-t) = 1 \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Sustituyendo $t = 1$ y $t = -1$, tenemos:

$$\begin{aligned} t &= 1 \Rightarrow 2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2} \\ t &= -1 \Rightarrow -2B = 1 \Rightarrow b = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

En consecuencia:

$$\int \frac{1}{1-t^2} dt = \int \frac{\frac{1}{2}}{1-t} dt + \int \frac{-\frac{1}{2}}{1+t} dt = -\frac{1}{2} ln|1-t| - \frac{1}{2} ln|1+t| + k$$

Si deshacemos el cambio tendremos:

$$\int \frac{1}{cosx} dx = -\frac{1}{2} ln|1 - senx| - \frac{1}{2} ln|1 + senx| + k$$

3.41.

a) Represente, de forma aproximada, la recta $x = 1$ y las curvas $y = \frac{x^2}{2}$, $y = \frac{4}{x}$, y señale el recinto plano limitado por ellas.

b) Calcule el área de dicho recinto.

(Junio 10 - Fase general)

- Solución:

a) La primera curva es una parábola cuyo vértice tiene abcisa 0. Haciendo una tabla de valores como la que sigue tendremos bastante para su representación:

x	0	-1	1	-2	2
y	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2	2

La segunda curva es una hipérbola. Haciendo, igualmente, una tabla de valores bastaría.

x	$0'5$	$-0'5$	1	-1	2	-2
y	8	-8	4	-4	2	-2

Vamos a representar la recta y las dos curvas, resultando el recinto pedido como podemos ver en la gráfica:

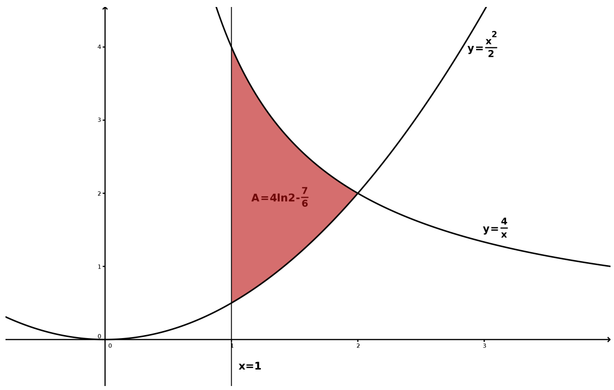


Figura 3.22: Representación gráfica de las funciones $\dfrac{x^2}{2}$ y $\dfrac{4}{x}$

b) El punto de corte de las dos curvas podemos observarlo en la gráfica anterior, así como en las dos tablas de valores, pero vamos a calcularlo analíticamente.

$$\frac{x^2}{2} = \frac{4}{x} \Longrightarrow x^3 = 8 \Longrightarrow x = 2$$

Por tanto el área buscada es:

$$\begin{aligned} A &= \int_1^2 \left(\frac{4}{x} - \frac{x^2}{2}\right) dx = \left[4lnx - \frac{x^3}{6}\right]_1^2 = \left(4ln2 - \frac{8}{6}\right) - \left(4ln1 - \frac{1}{6}\right) = \\ &= 4ln2 - \frac{8}{6} + \frac{1}{6} = 4ln2 - \frac{7}{6}u^2 \end{aligned}$$

3.42.

a) Diga cuándo una función $F(x)$ es primitiva de otra función $f(x)$.

b) Calcule una primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = xe^{x^2}$ que cumpla $F(0) = 0$.

(Junio 10 - Fase general)

- Solución:

El primer apartado lo podemos encontrar en cualquier libro.

Para resolver el segundo vamos a comenzar por resolver la integral indefinida y posteriormente calcularemos la constante para que $F(0) = 0$.

Es una integral prácticamente inmediata, aunque podemos resolverla haciendo el cambio de variable $u = x^2$.

$$u = x^2 \Longrightarrow du = 2xdx \Longrightarrow xdx = \frac{du}{2}$$

Tenemos que

$$\int xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int e^u du = \frac{1}{2}e^u + k$$

Deshaciendo el cambio obtenemos

$$G(x) = \frac{1}{2}e^{x^2} + k$$

Por último vamos a encontrar el valor de k que buscamos para que se cumpla que $F(0) = 0$.

$$F(0) = \frac{1}{2}e^0 + k = \frac{1}{2} + k = 0 \Longrightarrow k = -\frac{1}{2}$$

En consecuencia, la primitiva buscada es:

$$G(x) = \frac{1}{2}e^{x^2} - \frac{1}{2}$$

3.43. **Calcule, utilizando la fórmula de integración por partes, una primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = x^2e^{-x}$ que cumpla $F(0) = 0$.**

(Junio 10 - Fase específica)

- Solución:

Vamos a resolver primero la integral indefinida y luego ya calcularemos la que cumple que $F(0) = 0$. Para ello vamos a aplicar la integración por partes dos veces.

$$\left.\begin{array}{lcl} u = x^2 & \Longrightarrow & du = 2xdx \\ dv = e^{-x}dx & \Longrightarrow & v = -e^{-x} \end{array}\right. \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{lcl} u = x & \Longrightarrow & du = dx \\ dv = e^{-x}dx & \Longrightarrow & v = -e^{-x} \end{array}\right. \quad (2)$$

Tenemos aplicando la integración

$$\begin{aligned}
\int x^2e^{-x}dx &\overset{(1)}{=} -x^2e^{-x} - \int -2xe^{-x}dx = -x^2e^{-x} + 2\int xe^{-x}dx = \\
&\overset{(2)}{=} -x^2e^{-x} + 2\left(-xe^{-x} - \int -e^{-x}dx\right) = -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} + \\
&+ 2\int e^{-x}dx = -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + k = \\
&= e^{-x}\left(-x^2 - 2x - 2\right) + k
\end{aligned}$$

Estas son todas las primitivas. Vamos a buscar aquella que cumpla que $F(0) = 0$.

$$F(0) = e^0(0 - 0 - 2) + k = -2 + k = 0 \Longrightarrow k = 2$$

En consecuencia la función buscada es

$$F(x) = e^{-x}\left(-x^2 - 2x - 2\right) + 2$$

3.44.

a) **Represente, de forma aproximada, la curva $y = x^4 + 2x^2 + 1$ y la recta tangente a dicha curva en el punto $Q_0 = (-1, 4)$.**

b) **Señale el recinto plano limitado por el eje OY y por la curva y la recta del apartado anterior, y calcule el área de dicho recinto.**

(Junio 10 - Fase específica)

- Solución:

Vamos a empezar calculando la recta tangente. Sabemos que la fórmula para hallarla es:

$$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$$

Calculemos ahora el valor de la derivada de la función en $x = -1$.

$$f'(x) = 4x^3 + 4x \Longrightarrow f'(-1) = -4 - 4 = -8$$

Luego la recta tangente pedida es:

$$y - 4 = -8(x + 1) \Longrightarrow y - 4 = -8x - 8 \Longrightarrow y = -8x - 4$$

Para representar la función podemos estudiar su monotonía, sus extremos relativos y sus cortes con los ejes.

- Corte con los ejes:
  - Eje X $\Longrightarrow y = 0$. Tenemos que $x^4 + 2x^2 + 1 = 0$ es una ecuación bicuadrada. En consecuencia:

$$x^2 = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = -1$$

    Por tanto no corta al eje X.
  - Eje Y $\Longrightarrow x = 0$
    En este caso corta en el punto $(0, 1)$
- Vamos a estudiar la derivada:

$$\begin{aligned} y' = 4x^3 + 4x &\Longrightarrow x\left(4x^2+1\right) = 0 \Longrightarrow x = 0 \\ y'' = 12x^2 + 4 &\Longrightarrow y''(0) = 4 > 0 \end{aligned}$$

  Luego hay un mínimo relativo en $(0, 1)$
  Vamos a estudiar la monotonía:

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$4x^3 + 4x$	$-$	$+$
	$\searrow$	$\nearrow$

  Luego crece en $(0, +\infty)$ y decrece en $(-\infty, 0)$.

Para poder completar la gráfica sería bueno hacer una tabla de valores, que aquí omitimos por su facilidad.

Vamos a hacer la representación que nos piden en el segundo apartado y de esa forma hacemos las dos que nos piden. La gráfica pedida podemos verla en la figura 3.23

Vista la gráfica tenemos que el área buscada es:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{0} \left[\left(x^4+2x^2+1\right) - (-8x-4)\right]\, dx = \int_{-1}^{0} \left(x^4+2x^2+8x+5\right)\, dx = \\ &= \left[\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + 4x^2 + 5x\right]_{-1}^{0} = 0 - \left(-\frac{1}{5} - \frac{2}{3} + 4 - 5\right) = \\ &= \frac{1}{5} + \frac{2}{3} - 4 + 5 = \frac{3+10-60+75}{15} = \frac{28}{15}u^2 \end{aligned}$$

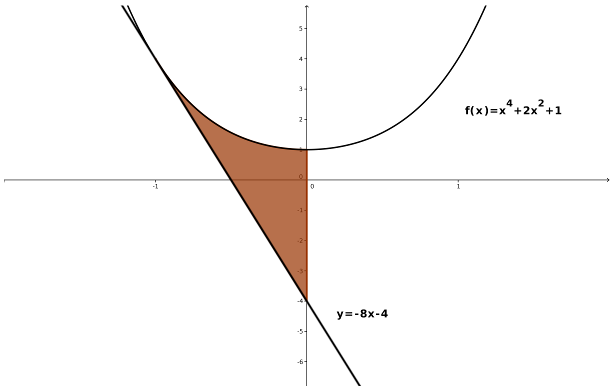


Figura 3.23: Representación del área requerida

3.45. Calcule el valor de la integral

$$\int_1^2 \left(\frac{x-1}{8}\right)^{2/3} dx$$

(Septiembre 10 - Fase general)

- Solución:

Esta integral es inmediata. Vamos a resolverla:

$$\begin{aligned}\int_1^2 \left(\frac{x-1}{8}\right)^{\frac{2}{3}} dx &= 8\int_1^2 \frac{1}{8}\left(\frac{x-1}{8}\right)^{\frac{2}{3}} dx = 8\left[\frac{3}{5}\left(\frac{x-1}{8}\right)^{\frac{5}{3}}\right]_1^2 = \\ &= 8\left(\frac{3}{5}\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{5}{3}} - 0\right) = \frac{24}{5}\sqrt[3]{\left(\frac{1}{8}\right)^5} = \frac{24}{5}\cdot\frac{1}{32} = \frac{3}{20}\end{aligned}$$

3.46.

a) **Representa, de forma aproximada, el recinto plano limitado por la parábola $y = 2x^2$ y la parábola $y = x^2 + 4$.**

b) **Calcule el área de dicho recinto.**

(Septiembre 10 - Fase general)

- Solución:

Representaremos primero las dos parábolas. Para hacerlo vamos a calcular sus vértices y dos tablas de valores:

- $y = 2x^2 \Longrightarrow x_v = \dfrac{-b}{2a} = 0$

x	0	−1	1	−2	2
y	0	2	2	8	8

- $y = x^2 + 4 \Longrightarrow x_v = \dfrac{-b}{2a} = 0$

x	0	−1	1	−2	2
y	0	5	5	8	8

La representación gráfica pedida es

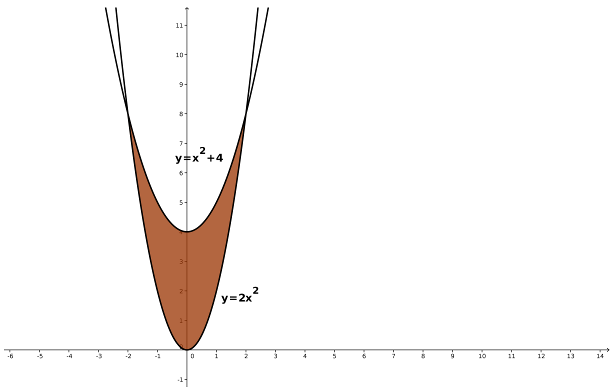


Figura 3.24: Representación de la región requerida

Calculemos ahora el área que nos piden. En la propia gráfica y en las tablas vemos los puntos de corte, pero vamos a calcularlos.

$$2x^2 = x^2 + 4 \Longrightarrow x^2 = 4 \Longrightarrow x = \pm 2$$

Luego el área es:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{2} \left(x^2 + 4 - 2x^2\right)\, dx = \int_{-2}^{2} \left(-x^2 + 4\right)\, dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 4x\right]_{-2}^{2} = \\ &= \left(-\frac{8}{3} + 8\right) - \left(\frac{8}{3} - 8\right) = -\frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} + 8 = \frac{-8 + 24 - 8 + 24}{3} = \frac{32}{3} u^2 \end{aligned}$$

3.47. **Considere las funciones $f(x) = sen^2 x$ y**

$$g(x) = \int_0^x \frac{1}{2(1-t)}\, dt,\ 0 < x < 1$$

Calcule la derivada de la función $F(x) = g(f(x))$, $\frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. Simplifique en lo posible dicha derivada.

(Septiembre 10 - Fase específica)

- Solución:

Vamos a encontrar primero $g(x)$.

$$g(x) = \left[-\frac{1}{2} ln\,|1-t| \right]_0^x = -\frac{1}{2} ln\,|1-x| \qquad 0 < x < 1$$

Por tanto

$$F(x) = g(f(x)) = g\left(sen^2 x\right) = -\frac{1}{2} ln\left(1 - sen^2 x\right) = -\frac{1}{2} ln\left(cos^2 x\right) = -ln\ cosx$$

3.48.

a) **Represente, de forma aproximada, la figura plana limitada por la hipérbola $xy = 1$, su recta tangente en el punto $(1, 1)$ y la recta $x = 2$**

b) **Calcule el área de dicha región plana.**

(Septiembre 10 - Fase específica)

- Solución:

La función dada es $y = \dfrac{1}{x}$. La recta tangente la calcularemos usando la fórmula

$$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$$

Ahora bien

$$y' = -\frac{1}{x^2} \Longrightarrow y'(-1) = -1$$

Por tanto la citada recta tangente es

$$y - 1 = -1(x-1) \Longrightarrow y = -x + 1 + 1 \Longrightarrow y = -x + 2$$

La representación que nos piden la podemos ver en la figura 3.25.

Para hallar el área tenemos que el único punto de corte es donde la recta es tangente

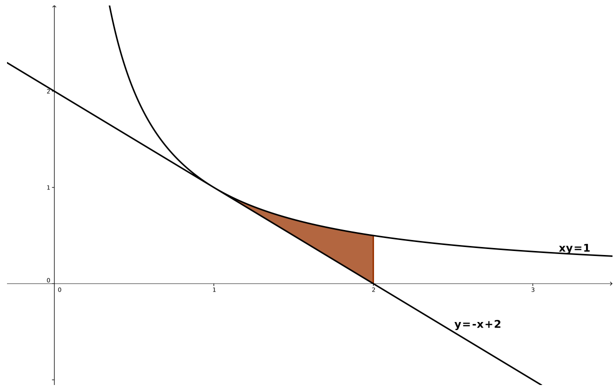


Figura 3.25: Representación de la región requerida

a la hipérbola, es decir, en $x = 1$. Si observamos la gráfica 3.25 el área buscada es:

$$\begin{aligned} A &= \int_1^2 \left[\frac{1}{x} - (-x+2)\right] dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} + x - 2\right) dx = \left[lnx + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_1^2 = \\ &= (ln2 + 2 - 4) - \left(ln1 + \frac{1}{2} - 2\right) = ln2 - 2 - \frac{1}{2} + 2 = \left(ln2 - \frac{1}{2}\right)\ u^2 \end{aligned}$$

3.49. Calcule las primitivas de la función

$$f(x) = \frac{1}{e^x - e^{-x}},\ x > 0$$

(Puede utilizarse el cambio de variable $t = e^x$.)

(Septiembre 10 - Fase específica)

- Solución:

Vamos a prepararla un poco antes de resolverla por sustitución.

$$\int \frac{1}{e^x - e^{-x}}\, dx = \int \frac{1}{e^x - \frac{1}{e^x}}\, dx = \int \frac{1}{\frac{(e^x)^2 - 1}{e^x}} = \int \frac{e^x}{(e^x)^2 - 1}\, dx$$

Hacemos el cambio $t = e^x \Longrightarrow dt = e^x dx$. Luego:

$$\int \frac{e^x}{(e^x)^2 - 1} = \int \frac{1}{t^2 - 1}\, dt$$

Hay que resolverla por fracciones simples:

$$\frac{1}{t^2-1} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t-1} = \frac{A(t-1)+B(t+1)}{(t+1)(t-1)}$$

luego,

$$A(t-1)+B(t+1) = 1 \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\text{Si } t = 1 \implies 2B = 1 \implies B = \frac{1}{2}$$

$$\text{Si } t = -1 \implies -2A = 1 \implies A = -\frac{1}{2}$$

luego:

$$\int \frac{1}{t^2-1}\,dt = \int \frac{-\frac{1}{2}}{t+1}\,dt + \int \frac{\frac{1}{2}}{t-1}\,dt = -\frac{1}{2} ln\,|t+1| + \frac{1}{2} ln\,|t-1| + k$$

Deshaciendo el cambio tenemos:

$$\int \frac{1}{e^x - e^{-x}}\,dx = -\frac{1}{2} ln\,|e^x+1| + \frac{1}{2} ln\,|e^x-1| + k$$