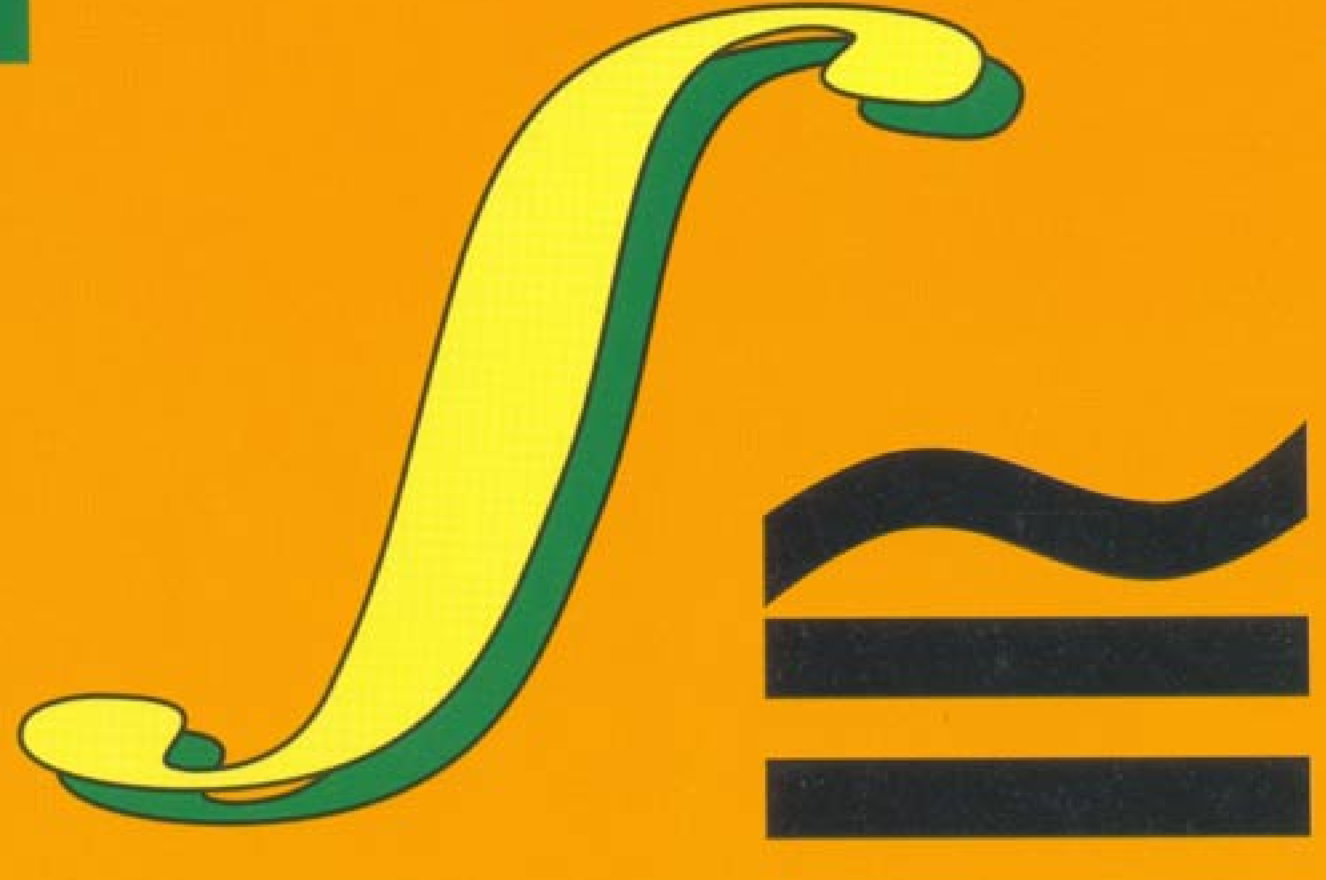
# MATEMATICAS II
# SELECTIVIDAD

PROYECTO SUR DE EDICIONES

2º BACHILLERATO LOGSE



FRANCISCO FERNÁNDEZ MORALES

*Contiene todas las pruebas planteadas en Andalucía en las convocatorias de Junio y Septiembre, y los modelos de examen propuestos por los Coordinadores, resueltos razonadamente.*

| UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA<br>PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD | L.O.G.S.E.<br>MATEMÁTICAS II |
|---|---|

**Instrucciones**: a) **Duración**: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) La puntuación de cada pregunta está indicada en las mismas.
d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
e) Puedes usar calculadora (puede ser programable o tener pantalla gráfica), pero todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

# MODELO 27 DE EXAMEN

## Opción A

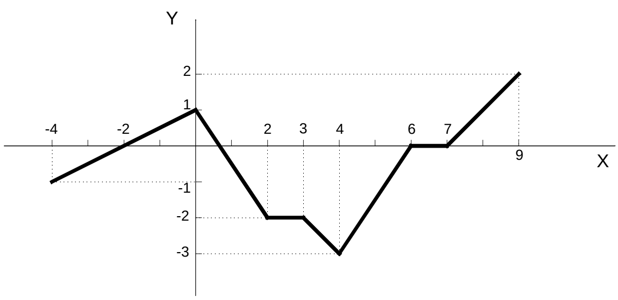
**EJERCICIO 1**. Sea $f$ la función definida para cada $x \in \mathbb{R}$, $x \neq -2$, por $f(x)=\dfrac{|x^2-4|}{x+2}$

**(1)** Determina si existen y, en ese caso, el valor de los límites

$$\lim_{x\to -2} f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 2} f(x)$$

**(2)** Representa gráficamente la función *f*.

**EJERCICIO 2**.La gráfica de la función derivada de una función $f : [-4, 9] \to \mathbb{R}$ es:




Responde a las siguientes preguntas de manera razonada:

**(1)** ¿Dónde es $f$ creciente?, dónde es decreciente y dónde es constante?

**(2)** ¿Dónde tiene $f$, si los tiene, sus máximos locales, sus mínimos locales y sus puntos de inflexión?

**EJERCICIO 3**. **(1)** ¿Es posible determinar una circunferencia conociendo las coordenadas de dos puntos diametralmente opuestos? En caso afirmativo, describe un procedimiento.

**(2)** Calcula la ecuación de una circunferencia sabiendo que los puntos A=(1, 2) y B=(3, 4) son diametralmente opuestos.

**EJERCICIO 4**. Sabiendo que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{vmatrix} = 5,$$

calcula razonadamente el valor de los siguientes determinantes

**(1)** $\begin{vmatrix} 2a & 3b & 4c \\ 2x & 3y & 4z \\ 2u & 3v & 4w \end{vmatrix}$ **(2)** $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+x & b+y & c+z \\ 2a+u & 2b+v & 2c+w \end{vmatrix}$ **(3)** $\begin{vmatrix} x & z & y \\ a & c & b \\ u & w & v \end{vmatrix}$

---

**Opción B**

**EJERCICIO 1**. Halla $b$ sabiendo que la recta $y = b$ divide en dos partes que tienen la misma área la región acotada por la curva de ecuación $y = 9 - x^2$ y el eje de abscisas.

**EJERCICIO 2**. De la función $f$ se sabe que su función derivada tiene como representación gráfica la recta de ecuación $3x - 2y + 1 = 0$.

**(1)** ¿Tiene $f$ algún extremo local? Si la respuesta es afirmativa, indica si se trata de un máximo o de un mínimo y en qué valor de $x$ se alcanza.

**(2)** Si es $f(0) = 1$, encuentra la expresión analítica de $f$ (es decir, dado $x \in \mathbb{R}$, determina el valor de $f(x)$ ).

**EJERCICIO 3**. Mezclando tres productos, digamos X, Y y Z, debemos obtener 10 kg de pienso que contenga 19 unidades de hidratos de carbono y 12 unidades de grasa. Sabiendo que cada kilo del producto X contiene una unidad de hidratos de carbono y dos unidades de grasa, cada kilo del producto Y contiene dos unidades de hidratos de carbono y una unidad de grasa, y cada kilo del producto Z contiene cuatro unidades de hidratos de carbono y nada de grasa, ¿cuántos kilos de cada producto debemos poner?

**EJERCICIO 4**. Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ se considera el plano $\pi_\lambda$ de ecuación

$$\pi_\lambda \equiv (1 + 2\lambda)\,x + (1 - \lambda)\,y + (1 + 3\lambda)\,z + (2\lambda - 1) = 0.$$

**(1)** Prueba que todos los planos $\pi_\lambda$ pasan por una misma recta $r$.

**(2)** Estudia la posición relativa de las rectas $r$ y $s$, siendo $s$ la recta dada por

$$s \equiv \frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{-3}$$

**(3)** Describe un procedimiento para hallar la distancia entre ambas rectas.

**SOLUCIONES Opción A**

## SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

**(1)** Expresemos *f(x)* como una función a trozos, teniendo en cuenta la definición de función valor absoluto:

$$f(x)=\frac{\left|x^2-4\right|}{x+2}=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x+2} & \text{si} \quad x^2-4\geq 0 \quad \text{y} \quad x\neq -2\\[2mm] \dfrac{-x^2+4}{x+2} & \text{si} \quad x^2-4<0 \quad \text{y} \quad x\neq -2\end{cases}$$

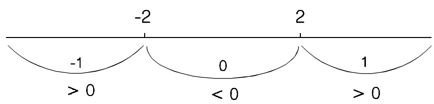
Simplifiquemos las dos expresiones:

$$f(x)=\begin{cases}x-2 & \text{si} \quad x^2-4\geq 0 \quad \text{y} \quad x\neq -2\\ -x+2 & \text{si} \quad x^2-4<0 \quad \text{y} \quad x\neq -2\end{cases}$$

Resolvamos las inecuaciones $x^2 - 4 \geq 0$ y $x^2 - 4 < 0$, para ello obtengamos en primer lugar las soluciones de la ecuación $x^2 - 4 = 0$.

$$x^2-4=0 \quad \Rightarrow \quad x=\sqrt{4} \quad \Rightarrow \quad x= \begin{matrix}\nearrow & 2\\ \searrow & -2\end{matrix}$$

estos valores los situamos ordenadamente en la recta real y construimos los posibles intervalos de solución de las inecuaciones, $(-\infty, -2)$, $(-2, 2)$ y $(2, \infty)$, elegimos valores intermedios de los mismos, por ejemplo, $-1$, 0 y 1, y los probamos en las inecuaciones, viendo qué intervalos satisfacen a una u otra inecuación.




A la vista de estos intervalos, la función quedará finalmente así

$$f(x)=\begin{cases}x-2 & \text{si} \quad x<-2\\ -x+2 & \text{si} \quad -2<x\leq 2\\ x-2 & \text{si} \quad 2<x\end{cases}$$

La función tendrá límite en el punto $-2$, si los límites laterales en dicho punto existen y coinciden, calculémoslos:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to -2^-\\ x<-2}} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^-}(x-2)=-4\\ \lim\limits_{\substack{x\to -2^+\\ x>-2}} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+}(-x+2)=4\end{array}\right\} \Rightarrow \quad \lim_{x\to -2^-} f(x)\neq \lim_{x\to -2^+} f(x) \quad \Rightarrow \quad -4\neq 4$$

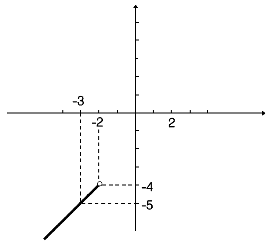
los límites laterales existen pero no coinciden, luego la función no tiene límite en el punto -2.

Procedamos de forma similar en el punto 2:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to 2^-\\ x<2}} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(-x+2)=0\\ \lim\limits_{\substack{x\to 2^+\\ x>2}} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)=0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x) \Rightarrow 0=0 \Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x)=0$$

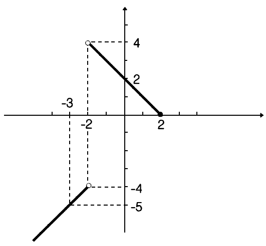
en el punto 2 la función tiene límite y vale cero.

**(2)** Teniendo en cuenta que la función *f(x)* es una función lineal a trozos (tres en concreto), y según lo estudiado en el apartado anterior, tendremos que

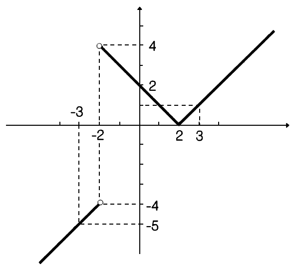



- Para $x < -2$, un punto de la gráfica sería, por ejemplo, el $(-3, -5)$, siendo la gráfica de este trozo la situada al lado.

- Para $-2 < x \leq 2$, un punto de la gráfica sería, por ejemplo, el (0, 2), y la gráfica de este otro trozo junto a la anterior es la situada abajo a la izquierda.




- Para $2 < x$, un punto de la gráfica sería, por ejemplo, el (3, 1), siendo la gráfica de *f(x)* finalmente:




## SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

**(1)** La función $f$ es derivable en el intervalo $[-4, 9]$, luego es continua en él. Los intervalos de monotonía son:

* $f'(x) > 0$ en los intervalos $]-2, 2/3[$ y $]7, 9]$, luego *f(x)* es creciente en ellos.
* $f'(x) < 0$ en los intervalos $[-4, -2[$ y $]2/3, 6[$, luego *f(x)* es decreciente en ellos.
* $f'(x) = 0$ en el intervalo $]6, 7[$, luego *f(x)* es constante en él.

**(2)** Como la función *f(x)* es continua y derivable en el intervalo $[-2, 9]$, los extremos relativos o locales los encontraremos sólo entre los puntos de derivada cero, pero según lo obtenido en el apartado anterior, tendremos:

* La derivada de la función $f$ en el punto $-2$ es cero, $f'(-2) = 0$, y como la función $f$ pasa de decreciente a creciente en dicho punto, la función en $-2$ presenta un mínimo local.

* La derivada de la función $f$ en el punto $2/3$ es cero, $f'(2/3) = 0$, y como la función $f$ pasa de creciente a decreciente en dicho punto, la función en $2/3$ presenta un máximo local.

* En el intervalo $]6, 7[$ aunque la derivada es cero en todos sus puntos, la función es constante y no hay extremos locales. En los extremos del intervalo tampoco, a pesar de que también la derivada es cero, pero en el punto 6 la función pasa de decreciente a constante, y en el 7 de constante a creciente, luego en ninguno de los dos hay extremo local.

Para localizar los puntos de inflexión, calcularemos los puntos en los que $f''(x)$ es cero, los puntos en los que la función $f'(x)$ presenta extremos locales y los intervalos en los que se produzca un cambio en el comportamiento de la concavidad, es decir, los intervalos en los que *f´´(x)* sea >0 y en los que *f´´(x)* sea < 0, para ello observamos la gráfica de *f´(x)* y deduciremos dónde la función *f´(x)* es creciente o decreciente, o lo que es lo mismo, dónde su primera derivada, *f´´(x),* es positiva o negativa:

* *f´(x)* es creciente en [-4, 0[, luego *f´´(x)* > 0, por tanto, *f(x)* es convexa en [-4, 0[

* *f´(x)* es decreciente en ]0, 2[, luego *f´´(x)* < 0, por tanto, *f(x)* es cóncava en ]0, 2[

* En $x = 0$, la función *f´(x)* presenta un máximo local, y la función *f(x)* pasa de convexa a cóncava, luego *f(x)* presenta un punto de inflexión en $x = 0$.

* *f´(x)* es constante en ]2, 3[, luego *f´´(x)*=0, es decir, *f(x)* no tiene concavidad en ]2, 3[, o sea, no hay puntos de inflexión ni en $x$=2, ni en $x$=3.

* *f´(x)* es decreciente en ]3, 4[, luego *f´´(x)* < 0, por tanto, *f(x)* es cóncava en ]3, 4[.

* *f´(x)* es creciente en ]4, 6[, luego *f´´(x)* > 0, por tanto, *f(x)* es convexa en ]4, 6[.

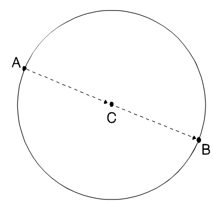
* En $x = 4$, *f´(x)* presenta un mínimo local, y la función *f(x)* pasa de cóncava a convexa, luego *f(x)* presenta un punto de inflexión en $x$=4.

* *f´(x)* es constante en ]6, 7[, luego *f´´(x)*=0, es decir, *f(x)* no tiene concavidad en ]6, 7[, o sea, no hay puntos de inflexión ni en $x$=6, ni en $x$=7.

* *f´(x)* es creciente en ]7, 9[, luego *f´´(x)* > 0, por tanto, *f(x)* es convexa en ]7, 9[. No puede haber más puntos de inflexión.

## SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

**(1)** Sí es posible determinar una circunferencia conociendo las coordenadas de dos puntos diametralmente opuestos, ya que las coordenadas el centro de la circunferencia las podemos obtener calculando las del punto medio del segmento que determinan los dos puntos diametralmente opuestos. El radio de la circunferencia se obtendría mediante la distancia entre los dos puntos diametralmente opuestos y dividiéndola por dos, o también mediante la distancia del centro a uno de los puntos diametralmente opuestos.




**(2)** Sea C($a$, $b$) el centro de la circunferencia, nos dan los puntos A(1, 2) y B(3, 4) diametralmente opuestos.

Los puntos A y C determinan un vector que es igual que el que determinan los puntos C y B, es decir: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.

$$\overrightarrow{AC} = (a,\ b) - (1,\ 2) = (a-1,\ b-2)$$
$$\overrightarrow{CB} = (3,4) - (a,b) = (3-a,\ 4-b)$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB} \ \Rightarrow\ (a-1,\ b-2) = (3-a,\ 4-b) \ \Rightarrow \begin{cases} a-1 = 3-a \ \Rightarrow\ a=2 \\ b-2 = 4-b \ \Rightarrow\ b=3 \end{cases}$$

El radio de la circunferencia es:

$$r = \text{dist}(A,C) = \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(2-1)^2+(3-2)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

luego la ecuación de la circunferencia es:

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0 \ \Rightarrow\ x^2+y^2-4x-6y+2^2+3^2-\left(\sqrt{2}\right)^2=0 \ \Rightarrow$$
$$x^2+y^2-4x-6y+11=0$$

## SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

**(1)** Calculemos el valor del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 2a & 3b & 4c \\ 2x & 3y & 4z \\ 2u & 3v & 4w \end{vmatrix} = 2\bullet 3\bullet 4\bullet \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{vmatrix} = 2\bullet 3\bullet 4\bullet 5 = 120$$

Hemos utilizado la propiedad de los determinantes que dice: "Si todos los elementos de una fila o columna de un determinante están multiplicados por un mismo número, éste podemos sacarlo fuera del símbolo del determinante como factor común".

**(2)** Calculemos el valor de este otro

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+x & b+y & c+z \\ 2a+u & 2b+v & 2c+w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ 2a+u & 2b+v & 2c+w \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 2a+u & 2b+v & 2c+w \end{vmatrix} =$$

$$= 0 + \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 2a+u & 2b+v & 2c+w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 2a+u & 2b+v & 2c+w \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 2a & 2b & 2c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{vmatrix} = 0+5 = 5$$

En primer lugar hemos utilizado la propiedad de los determinantes que dice: "Si los elementos de cualquier fila o columna de un determinante son sumas de igual nº de términos, entonces el determinante es igual a la suma de tantos determinantes como sumandos figuren en dicha fila o columna, de tal manera que en esos determinantes el resto de las filas o columnas permanecen inalteradas, excepto la que está formada por sumandos, la cual es reemplazada por los primeros sumandos para el primer determinante, por los segundos para el 2º determinante y así sucesivamente, hasta el último sumando".

En segundo lugar hemos usado la propiedad que dice: "Si dos filas o columnas son iguales o proporcionales, el determinante vale cero".

En tercer término hemos vuelto a utilizar las dos propiedades anteriormente citadas, para finalmente sustituir el último determinante por 5, ya que coincide con el que nos da el ejercicio.

**(3)** Calculemos este determinante:

$$\begin{vmatrix} x & z & y \\ a & c & b \\ u & w & v \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & c & b \\ x & z & y \\ u & w & v \end{vmatrix} = -(-)\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{vmatrix} = 5$$

La propiedad que hemos usado por dos veces es: "Si intercambiamos entre sí dos filas o dos columnas, el determinante cambia de signo".

**SOLUCIONES Opción B**

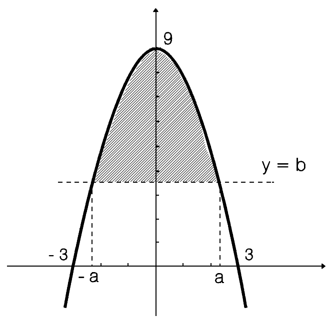
## SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

Dibujemos, en primer lugar, la curva de ecuación $y = 9 - x^2$.
Calculemos los puntos de corte con los ejes, así como el vértice V.
* Punto de corte con el eje de ordenadas: $x = 0 \Rightarrow y(0) = 9 - 0 = 9 \Rightarrow$ A(0, 9).
* Puntos de corte con el eje de abscisas:

$$y = 0 \Rightarrow 9 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{9} = \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases} \Rightarrow \text{B}(-3, 0) \text{ y } \text{C}(3, 0).$$

* Coordenadas del vértice V:
$x = -b/2a = 0 \Rightarrow y(0)=9 \Rightarrow$ V(0, 9).

La gráfica es la situada al lado, y la recta $y = \text{b}$, divide a la región acotada por dicha curva y el eje de abscisas en dos partes que tienen la misma área, siendo una de ellas la sombreada del dibujo.




El área de la región acotada por la curva y el eje de abscisas es:

$$\int_{-3}^{3} \left(9 - x^2\right) dx = \left[ 9x - \frac{x^3}{3} \right]_{-3}^{3} = (27-9) - (-27+9) = 36$$

El área de la región sombreada valdrá la mitad, es decir, 18 y es:

$$\int_{-\text{a}}^{\text{a}} \left(9 - x^2 - \text{b}\right) dx = \left[ 9x - \frac{x^3}{3} - \text{b}x \right]_{-\text{a}}^{\text{a}} =$$

$$= 9\text{a} - \frac{\text{a}^3}{3} - \left(9 - \text{a}^2\right)\text{a} - \left( -9\text{a} + \frac{\text{a}^3}{3} + \left(9 - \text{a}^2\right)\text{a} \right) = \frac{4}{3}\text{a}^3 = 18 \Rightarrow \text{a} = \frac{3}{\sqrt[3]{2}} \approx 2'38$$

Para calcular el valor de "b" sustituiremos el que hemos calculado de "a" en la función:

$$y = 9 - x^2 \Rightarrow \text{b} = 9 - \text{a}^2 \Rightarrow \text{b} = 9 - \left(\frac{3}{\sqrt[3]{2}}\right)^2 \Rightarrow \text{b} = 9 - \frac{9}{\sqrt[3]{4}} \approx 3'33$$

## SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

**(1)** Si la función *f(x)* es una función polinómica y su función derivada tiene como gráfica la recta $3x - 2y + 1 = 0$, significa que al despejar $y$ obtendremos la función derivada, es decir:

$$3x - 2y \Rightarrow \quad +100 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$$

al ser la función $f$ polinómica, es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$, luego sus extremos locales se encuentran en los puntos de derivabilidad cero, o sea:

$$f'(x) = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$$

se da la condición necesaria para que halla un extremo relativo, distinguiremos si es máximo o mínimo estudiando el comportamiento de la segunda derivada en dicho punto

$$f'(x)=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad f''(x)=\frac{3}{2} \quad\Rightarrow\quad f''\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}>0$$

hay un mínimo local en el punto de abscisa $x = 3/2$.

**(2)** Para encontrar la expresión analítica de $f$ integraremos la función derivada:

$$f'(x)=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad \int\left(\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\right)dx=\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\mathrm{C}$$

como además $f(0) = 1$, tendremos:

$$f(x)=\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\mathrm{C} \quad\Rightarrow\quad f(0)=\frac{3}{4}\bullet 0^2+\frac{1}{2}\bullet 0+\mathrm{C}=1 \quad\Rightarrow\quad \mathrm{C}=1$$

la función $f(x)$ finalmente será: $f(x)=\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{2}x+1$

## SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

Llamemos $x, y, z$ a las cantidades, expresadas en kilos, que hay que poner de cada uno de los productos X, Y, Z, respectivamente. Traduciendo al lenguaje algebraico lo que nos dice el ejercicio, tendremos:

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 10\\ x + 2y + 4z &= 19\\ 2x + y &= 12\end{aligned}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo mediante el método de reducción de Gauss Jordan.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10\\ 1 & 2 & 4 & 19\\ 2 & 1 & 0 & 12\end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - 2 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10\\ 0 & 1 & 3 & 9\\ 0 & -1 & -2 & -8\end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10\\ 0 & 1 & 3 & 9\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right)$$

Triangulemos ahora superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 3 · [3ªf.]
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] - [3ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 9\\ 0 & 1 & 0 & 6\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] - [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 0 & 6\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado. La solución es:

$x = 3$, $y = 6$, $z = 1$.

Es decir, hemos de poner del producto X, 3 kilos, del Y , 6, y del Z, 1 kilo.

## SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

**(1)** Expresemos los planos $\pi_\lambda \equiv (1+2\lambda)\,x + (1-\lambda)\,y + (1+3\lambda)\,z + (2\lambda-1) = 0$, de la siguiente forma:

$$\pi_\lambda \equiv x + 2\lambda x + y - \lambda y + z + 3\lambda z + 2\lambda - 1 = 0 \quad \Rightarrow$$
$$\pi_\lambda \equiv x + y + z - 1 + \lambda\,(2x - y + 3z + 2) = 0$$

luego los planos $\pi_\lambda$ los hemos expresado como un haz de planos determinado por los planos

$$x + y + z - 1 = 0 \qquad \text{y} \qquad 2x - y + 3z + 2 = 0$$

si estos dos planos se cortan en una recta $r$, habremos demostrado que todos los planos $\pi_\lambda$ pasan por esa misma recta $r$, comprobémoslo

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 1 \\ 2x - y + 3z = -2 \end{array}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y discutámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 2 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -4 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado inferiormente. Hay dos ecuaciones y tres incógnitas, se trata de un sistema compatible indeterminado uniparamétrico, cuya solución es una recta $r$, que es precisamente en la que se cortan los dos planos, luego todos los planos $\pi_\lambda$ se cortan en una recta.

**(2)** Calculemos, en primer lugar, la ecuación de la recta $r$ en forma paramétrica, para ello terminemos de resolver el sistema al que habíamos llegado en el apartado anterior

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -4 \end{array}\right)$$

La incógnita que nos sobra, la $z$, la pasamos al segundo miembro como incógnita secundaria.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1-z \\ 0 & -3 & -4-z \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -3 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: 3 · [1ªf.] + [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & -1-4z \\ 0 & -3 & -4-z \end{array}\right)$$

La solución es la recta $r$ cuyas ecuaciones paramétricas

$$r \equiv \begin{cases} x = -\dfrac{1}{3} - \dfrac{4}{3}\mu \\ y = \dfrac{4}{3} + \dfrac{1}{3}\mu \\ z = \mu \end{cases}$$

Expresemos también en paramétricas la ecuación de la recta $s$:

$$s \equiv \begin{cases} x = 1 + 4\alpha \\ y = -1 - \alpha \\ z = 2 - 3\alpha \end{cases}$$

Estudiemos la posición relativa de ambas rectas, para lo cual, identificamos entre sí las $x$, las $y$, y las $z$, de ambas rectas:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{3}-\frac{4}{3}\mu &= 1+4\alpha \\ \frac{4}{3}+\frac{1}{3}\mu &= -1-\alpha \\ \mu &= 2-3\alpha \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 4\alpha+\frac{4}{3}\mu &= -\frac{4}{3} \\ \alpha+\frac{1}{3}\mu &= -\frac{7}{3} \\ 3\alpha+\mu &= 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 12\alpha+4\mu &= -4 \\ 3\alpha+\mu &= -7 \\ 3\alpha+\mu &= 2 \end{aligned}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 12 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & -7 \\ 3 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 12 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: $4 \cdot$ [2ªf.] - [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: $4 \cdot$ [3ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 12 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & -24 \\ 0 & 0 & 12 \end{array}\right)$$

Hemos obtenido dos ecuaciones absurdas, por lo tanto el sistema es incompatible, y consecuentemente las dos rectas se cruzan en el espacio

**(3)** Elegimos dos puntos genéricos, uno $P = \left(-\frac{1}{3}-\frac{4}{3}\mu,\ \ \frac{4}{3}+\frac{1}{3}\mu,\ \ \mu\right)$ de la recta *r*, y otro $H = (1+4\alpha,\ \ -1-\alpha,\ \ 2-3\alpha)$ de la recta *s*. Construimos el vector $\overrightarrow{PH}$ que determinan ambos puntos:

$$\overrightarrow{PH} = (1+4\alpha,\ \ -1-\alpha,\ \ 2-3\alpha) - \left(-\frac{1}{3}-\frac{4}{3}\mu,\ \ \frac{4}{3}+\frac{1}{3}\mu,\ \ \mu\right) =$$

$$= \left(\frac{4}{3}+4\alpha+\frac{4}{3}\mu,\ \ -\frac{7}{3}-\alpha-\frac{1}{3}\mu,\ \ 2-3\alpha-\mu\right)$$

e imponemos la condición de que sea perpendicular a cada uno de los vectores de dirección de las rectas, es decir, que el producto escalar sea cero:

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{PH}\bullet\vec{u}_r &= 0 \\ \overrightarrow{PH}\bullet\vec{v}_s &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \left(\frac{4}{3}+4\alpha+\frac{4}{3}\mu,\ \ -\frac{7}{3}-\alpha-\frac{1}{3}\mu,\ \ 2-3\alpha-\mu\right)\bullet\left(-\frac{4}{3},\ \ \frac{1}{3},\ \ 1\right) &= 0 \\ \left(\frac{4}{3}+4\alpha+\frac{4}{3}\mu,\ \ -\frac{7}{3}-\alpha-\frac{1}{3}\mu,\ \ 2-3\alpha-\mu\right)\bullet(4,\ \ -1,\ \ -3) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Planteamos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, $\alpha$ y $\mu$, una vez resuelto, estaremos en condiciones de calcular el módulo del vector $\overrightarrow{PH}$, que coincidirá con la mínima distancia entre las dos rectas que se cruzan en el espacio

$$\text{dist}(r,s) = \left|\overrightarrow{PH}\right|$$

| UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA<br>PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD | L.O.G.S.E.<br>MATEMÁTICAS II |
|---|---|

**Instrucciones**: a) **Duración**: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) La puntuación de cada pregunta está indicada en las mismas.
d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
e) Puedes usar calculadora (puede ser programable o tener pantalla gráfica), pero todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

## MODELO 28 DE EXAMEN

### Opción A

**EJERCICIO 1**. **(a)** [1 PUNTO] Dibuja el recinto limitado por los semiejes positivos de coordenadas y las curvas

$$y = x^2 + 1, \quad y = \frac{2}{x} \quad \text{e} \quad y = x - 1$$

**(b)** [1´5 PUNTOS] Halla el área del recinto considerado en el apartado anterior.

**EJERCICIO 2**. [2´5 PUNTOS] Calcula $a$ y $b$ sabiendo que la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} a\,x + 5x^2 & \text{si} \quad x \le 2 \\ \dfrac{a}{x} + b\,x & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

es derivable

**EJERCICIO 3**. Sabiendo que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2$$

calcula los siguientes determinantes y enuncia las propiedades que utilices.

**(a)** [1 PUNTO]

$$\begin{vmatrix} 3\,a & 3\,b & 15\,c \\ d & e & 5\,f \\ g & h & 5\,i \end{vmatrix}.$$

**(b)** [1´5 PUNTOS]

$$\begin{vmatrix} a+2\,b & c & b \\ d+2\,e & f & e \\ g+2\,h & i & h \end{vmatrix}.$$

**EJERCICIO 4**. [2´5 PUNTOS] Halla la distancia entre el origen de coordenadas y la recta intersección de los planos de ecuaciones respectivas

$$x + y + 2z = 4 \quad \text{y} \quad 2x - y + z = 2.$$

**Opción B**

**EJERCICIO 1**. [2´5 PUTOS] De entre todos los rectángulos de 40 kilómetros de perímetro, calcula las dimensiones del que tiene área máxima.

**EJERCICIO 2**. **(a)** [1 PUNTO] Dibuja el recinto limitado por la curva $y = \dfrac{9-x^2}{4}$, la recta tangente a esta curva en el punto de abscisa $x = 1$ y el eje de abscisas.
**(b)** [1´5 PUNTOS] Calcula el área del recinto considerado en el apartado anterior

**EJERCICIO 3**. [2´5 PUNTOS] Calcula las coordenadas del punto simétrico del (1, -3, 7) respecto de la recta dada por las ecuaciones

$$x-1 = y+3 = \frac{z-4}{2}.$$

**EJERCICIO 4**. Considera el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda x + 2y & = & 3 \\ -x + 2\lambda z & = & -1 \\ 3x - y - 7z & = & \lambda + 1 \end{array}\right.$$

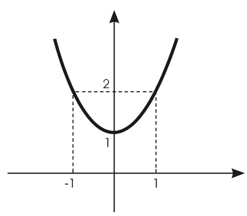
**(a)** [1 PUNTO] Halla todos los valores del parámetro λ para los que el sistema correspondiente tiene infinitas soluciones.
**(b)** [1 PUNTO] Resuelve el sistema para los valores de λ en el apartado anterior.
**(c)** [0´5 PUNTOS] Discute el sistema para los restantes valores de λ.

---

**SOLUCIONES Opción A**

## SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

**(a)** Representemos la función polinómica $y = x^2 + 1$, función cuya gráfica es una parábola, parábola que coincide con la de $x^2$ desplazando ésta una unidad hacia arriba, es decir que el vértice de la misma es el punto (0, 1). Otros dos puntos que nos ayudarán a representarla son el (-1, 2) y el (1, 2). La gráfica es la situada al lado.



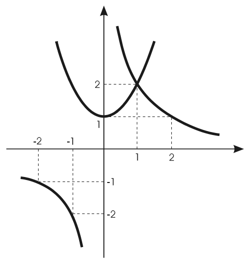

Representemos ahora la función de proporcionalidad inversa, $y = \dfrac{2}{x}$, cuya gráfica es una hipérbola equilátera; para ello calculemos los puntos de corte de ésta con la gráfica de la función anterior:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 + 1 \\ y = \dfrac{2}{x} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x^2 + 1 = \frac{2}{x} \quad \Rightarrow \quad x^3 + x = 2 \quad \Rightarrow \quad x^3 + x - 2 = 0$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0 | 1 | -2 |
| 1 | | 1 | 1 | 2 |
| | 1 | 1 | 2 | 0 |

$$\Rightarrow \quad x^2 + x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{2} \quad \Rightarrow \quad \text{no hay solución}$$

Por tanto, sólo se cortan en el punto de abscisa 1; si sustituimos ésta en cualquiera de las dos funciones obtendremos la ordenada, que es: $y = 1^2 + 1 \Rightarrow y = 2$, luego el punto es el (1, 2).



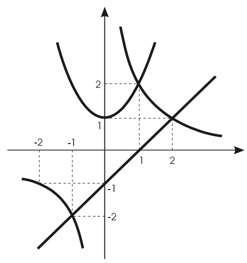

Otros puntos de la gráfica de la hipérbola pueden ser, por ejemplo, (2, 1), (-2, -1) y (-1, -2).

La gráfica de ésta nueva función dibujada sobre la que ya teníamos es la situada al lado

Representemos la última de las funciones, la $y=x-1$, función afín cuya gráfica es una recta que no pasa por el origen, sino que corta a los ejes de coordenadas en los puntos (0, -1) y (1, 0).

Ésta última función corta a la hipérbola en los puntos:

$$\left.\begin{array}{l} y = x - 1 \\ y = \dfrac{2}{x} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x - 1 = \frac{2}{x} \quad \Rightarrow \quad x^2 - x - 2 = 0 \quad \Rightarrow$$

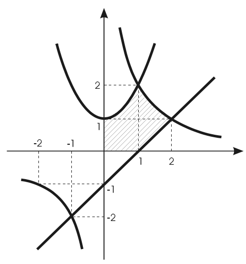



$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{array}{l} \nearrow \; 2 \\ \searrow \; -1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad (2,\ 1) \ \text{ y } \ (-1,\ -2)$$

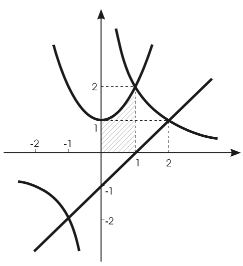
La función afín no corta a la función cuadrática:

$$\left.\begin{array}{l} y = x - 1 \\ y = x^2 + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x - 1 = x^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 - x + 2 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-8}}{2} \quad \Rightarrow \quad \text{no tiene solución.}$$




La representación gráfica de las tres funciones es la que se encuentra situada al lado, donde además se ha sombreado el recinto limitado por los semiejes positivos de coordenadas y las tres curvas.

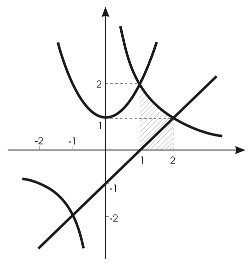


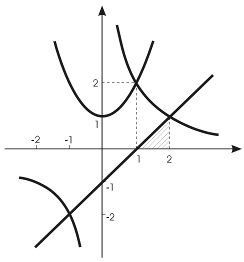

**(b)** Para calcular el área del recinto sombreado anterior, lo desdoblamos en trozos, el primero es el situado a la izquierda, cuya área es:

$$\text{A}_1 = \int_0^1 \left(x^2 + 1\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} + x\right]_0^1 = \left(\frac{1}{3} + 1\right) - 0 = \frac{4}{3}$$

El segundo trozo es el situado a la derecha y cuya área es:

$$A_2 = \int_1^2 \frac{2}{x}\,dx = \left[2\ Ln(x)\right]_1^2 = 2\ Ln(2) - 2\ Ln(1) = 2\ Ln(2)$$





El tercero y último trozo es el situado a la izquierda, y cuya área se corresponde con la de un triángulo, es decir:

$$A_3 = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{1\times 1}{2} = \frac{1}{2}$$

Finalmente el área del recinto pedido es:

$$\text{Área} = A_1 + A_2 - A_3 = \frac{4}{3} + 2\ Ln(2) - \frac{1}{2} = \frac{5}{6} + 2\ Ln(2)$$

## SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

Si la función *f(x)* es derivable en todo $\mathbb{R}$ tiene que ser continua también en $\mathbb{R}$.

Calculemos el valor de $a$ y de $b$ para que la función sea continua.

Para que la función *f* sea continua en un punto, los límites laterales en dicho punto deben coincidir y además coincidir también con el valor de la función en ese punto. Y para que lo sea en un intervalo lo ha de ser en todos los puntos del intervalo.

- El trozo de función para valores de *x* menores que 2, $x<2$, es una función polinómica, y las funciones polinómicas son continuas en todo $\mathbb{R}$, luego la función *f* es continua para $x<2$.

- El trozo de función para valores de *x* mayores que 2, $x>2$, es la suma de una función polinómica, *bx*, que es continua en todo $\mathbb{R}$, y de una función racional, *a*/*x*, que es continua en todo $\mathbb{R}$ salvo para el cero que es el valor que anula al denominador, pero este valor no pertenece al dominio que estamos considerando, luego la función *f* es continua para $x>2$, ya que la suma de funciones continuas es continua en el dominio común de las funciones suma.

- El problema de la continuidad está en el punto 2, donde hay un cambio en el comportamiento de la función.

Calculemos los límites laterales y el valor de la función en dicho punto, para ver si existen y coinciden.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 2^+\\ x>2}} \left(\frac{a}{x} + bx\right) = \frac{a}{2} + 2b \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 2^-\\ x<2}} \left(ax + 5x^2\right) = 2a + 20 \\ f(2) = 2a + 20 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = f(2) \\ \frac{a}{2} + 2b = 2a + 20 \ \Rightarrow\ 3a - 4b + 40 = 0 \end{array}\right.$$

Luego *f(x)* será continua en el punto 2, si se verifica que: $3a - 4b + 40 = 0$. [1]

En definitiva, la función *f(x)* es continua en $\mathbb{R}$, siempre y cuando se satisfaga [1]

Estudiemos ahora la derivabilidad para los diversos valores de *a* y de *b*.

Una función será derivable en un punto, si las derivadas laterales coinciden. Y para que lo sea en un intervalo lo ha de ser en todos los puntos del intervalo. Pero previamente debe ser continua para poder ser derivable, ya que la no continuidad implica la no derivabilidad.

- Para valores de $x<2$, $f$ es derivable, por ser una polinómica, siendo la derivada, $a+10x$.
- Para valores de $x>2$, $f$ es derivable, ya que la función derivada es $\frac{-a}{x^2}+b$, y esta función no está definida para el valor cero, pero este valor no pertenece al dominio que estamos considerando.

Una primera aproximación de la función derivada, donde ya sabemos que es derivable es

$$f'(x)=\begin{cases} a+10x & \text{si} \quad x<2 \\ \dfrac{-a}{x^2}+b & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$

- El problema está en el punto 2.

En el punto 2 será derivable, si las derivadas laterales coinciden y en este caso se debe satisfacer además la condición de continuidad [1].

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^+)=\lim\limits_{\substack{x\to 2^+ \\ x>2}}\left(\dfrac{-a}{x^2}+b\right)=\dfrac{-a}{4}+b \\ f'(2^-)=\lim\limits_{\substack{x\to 2^- \\ x<2}}(a+10x)=20+a \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f'(2^+)=f'(2^-) \quad \Rightarrow \\ \dfrac{-a}{4}+b=20+a \quad \Rightarrow \quad 5a-4b=80 \qquad [2] \end{array}\right.$$

luego la función $f(x)$ será derivable en $x = 2$ siempre y cuando se verifiquen las condiciones [1] y [2] simultáneamente, para lo cual resolveremos el sistema formado por ambas ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 5a-4b=-80 \\ 3a-4b=-40 \end{array}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & -4 & -80 \\ 3 & -4 & -40 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 5 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: $5 \cdot [2^a f.] - 3 \cdot [1^a f.]$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & -4 & -80 \\ 0 & -8 & 40 \end{array}\right)$$

Simplifiquemos la 2ª fila por $-8$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & -4 & -80 \\ 0 & 1 & -5 \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: $[1^a f.] + 4 \cdot [2^a f.]$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 0 & -100 \\ 0 & 1 & -5 \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado, la solución es:

$$5a=-100 \ \Rightarrow \ a=-20 \qquad ; \qquad b=-5.$$

Para $a=-20$ y $b=-5$, la función será derivable en todo su dominio.

La función derivada quedará finalmente, una vez sustituido $a$ por $-20$ y $b$ por $-5$, así:

$$f'(x)=\begin{cases} a+10x & \text{si} \quad x\le 2 \\ \dfrac{-a}{x^2}+b & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$

## SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

**(a)** Calculemos el valor del siguiente determinante $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 15c \\ d & e & 5f \\ g & h & 5i \end{vmatrix}$, sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2$ .

$$\begin{vmatrix} 3a & 3b & 15c \\ d & e & 5f \\ g & h & 5i \end{vmatrix} = 3\bullet \begin{vmatrix} a & b & 5c \\ d & e & 5f \\ g & h & 5i \end{vmatrix} = 3\bullet 5 \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 15\bullet 2 = 30$$

Hemos utilizado dos veces la propiedad de los determinantes que dice: "*Si todos los elementos de una fila o columna de un determinante están multiplicados por un mismo número, éste podemos sacarlo fuera del símbolo del determinante como factor común*".

Finalmente hemos sustituido el último determinante por 2, ya que coincide con el que nos da el ejercicio.

**(b)** Calculemos el valor de este otro determinante:

$$\begin{vmatrix} a+2b & c & b \\ d+2e & f & e \\ g+2h & i & h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c & b \\ d & f & e \\ g & i & h \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2b & c & b \\ 2e & f & e \\ 2h & i & h \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + 0 = -2$$

En primer lugar hemos utilizado la propiedad de los determinantes que dice: "*Si los elementos de cualquier fila o columna de un determinante son sumas de igual nº de términos, entonces el determinante es igual a la suma de tantos determinantes como sumandos figuren en dicha fila o columna, de tal manera que en esos determinantes el resto de las filas o columnas permanecen inalteradas, excepto la que está formada por sumandos, la cual es reemplazada por los primeros sumandos para el primer determinante, por los segundos para el 2º determinante y así sucesivamente, hasta el último sumando*".

En segundo lugar hemos usado la propiedad que dice: "*Si dos filas o columnas son iguales o proporcionales, el determinante vale cero*".

En tercer término, hemos utilizado la propiedad que dice: "*Si intercambiamos entre sí dos filas o dos columnas de un determinante, entonces el determinante cambia de signo*".

Finalmente hemos sustituido el último determinante por 2, ya que coincide con el que nos da el ejercicio.

## SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

Calculemos la recta intersección de los dos planos en forma paramétrica, para lo cual resolveremos el sistema formado por las ecuaciones de los dos planos:

$$\left.\begin{aligned} x + y + 2z &= 4 \\ 2x - y + z &= 2 \end{aligned}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial, y resolvámoslo mediante el método de reducción de Gauss - Jordan

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right)$ Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 2 · [1ªf.]

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \end{array}\right)$ Simplifiquemos la segunda fila por 3.

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right)$ Los elementos de la diagonal principal son distintos de cero. Tenemos dos ecuaciones y tres incógnitas, es un sistema compatible indeterminado uniparamétrico. Nos sobra una incógnita, la *z*, que la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria.

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4-2z \\ 0 & -1 & -2+z \end{array}\right)$ Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] + [2ªf.]

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2-z \\ 0 & -1 & -2+z \end{array}\right)$ El sistema está diagonalizado. La solución es:

$$x = 2 - z \quad ; \quad y = 2 - z$$

Sustituyamos la incógnita *z* por un parámetro, por ejemplo, λ, tendremos la ecuación de la recta intersección de los dos planos en forma paramétrica:

$$\begin{cases} x = 2-\lambda \\ y = 2-\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Para calcular la distancia del origen O=(0, 0, 0) a la recta, elegimos de la recta un punto genérico H=(2-λ, 2-λ, λ) y le imponemos la condición de que el vector $\overrightarrow{OH}$ sea perpendicular al vector $\vec{v} = (-1, -1, 1)$ de dirección de la recta.

$$\overrightarrow{OH} = (2-\lambda,\ 2-\lambda,\ \lambda) - (0,0,0) = (2-\lambda,\ 2-\lambda,\ \lambda)$$

$$\overrightarrow{OH} \perp \vec{v} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{OH} \bullet \vec{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad (2-\lambda,\ 2-\lambda,\ \lambda) \bullet (-1,-1,1) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$-2+\lambda-2+\lambda+\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad 3\lambda = 4 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{4}{3}$$

luego el vector $\overrightarrow{OH}$ tendrá de coordenadas:

$$\overrightarrow{OH} = (2-\lambda,\ 2-\lambda,\ \lambda) = \left(2-\frac{4}{3},\ 2-\frac{4}{3},\ \frac{4}{3}\right) = \left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{4}{3}\right)$$

y la distancia entre el origen O y la recta intersección es:

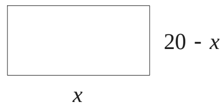
$$\text{dist}(O,r) = \left|\overrightarrow{OH}\right| = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{9}+\frac{4}{9}+\frac{16}{9}} = \sqrt{\frac{24}{9}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

---

**SOLUCIONES Opción B**

## SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

Como el perímetro es 40 kilómetros, el semiperímetro es 20, es decir, si a la base de los rectángulos la llamamos $x$ la altura lógicamente debe ser $20-x$.




La expresión de la función área es:

$A(x) = (20-x)x \quad \Rightarrow \quad A(x) = -x^2 + 20x$

El dominio de esta función área, $A(x)$, es el intervalo abierto (0, 20).

Calculemos el máximo absoluto de esta función, que al ser polinómica es continua y derivable en todo su dominio.

$A'(x) = -2x + 20 \quad \Rightarrow \quad -2x + 20 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 10.$

$A''(x) = -2 \quad \Rightarrow \quad A''(10) = -2 < 0 \quad \Rightarrow$ hay un máximo relativo en $x = 10$.

Estudiemos la monotonía de $A(x)$ en su dominio, es decir, en el intervalo (0, 20). Como la función derivada se anula en $x$=10, tendremos dos intervalos de monotonía, (0, 10) y (10, 20). Probemos valores intermedios, por ejemplo, 5 y 15, en la primera derivada:

* $A'(5)=-2\cdot 5+20=10 > 0 \quad \Rightarrow$ creciente en (0, 10)
* $A'(15)=-2\cdot 15+20=-10 < 0 \quad \Rightarrow$ decreciente en (10, 20)

luego el máximo relativo es máximo absoluto, por tanto, las dimensiones del rectángulo de área máxima son:

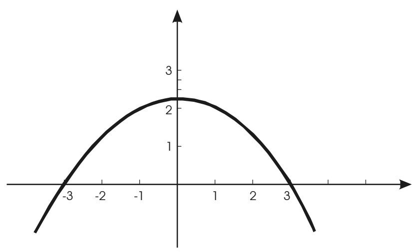
base = $x$ $\Rightarrow$ base = 10 kilómetros

altura = $20-x$ $\Rightarrow$ altura = 20 - 10 $\Rightarrow$ altura = 10 kilómetros.

## SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

**(a)** Representemos la función $y = \dfrac{9-x^2}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad y = \dfrac{9}{4} - \dfrac{x^2}{4}$, que es una parábola.




* Punto de corte con el eje de ordenadas:

$x = 0 \Rightarrow y(0) = 9/4 \Rightarrow$ A(0, 9/4).

* Puntos de corte con el eje de abscisas:

$y = 0 \Rightarrow 9 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = 3; \quad x = -3 \Rightarrow$ B(-3, 0); C(3, 0).

* Coordenadas del vértice V:

$$x = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x = -\frac{0}{2\bullet\left(-\frac{1}{4}\right)} = 0 \quad ; \quad y = \frac{9-0}{4} \Rightarrow y = \frac{9}{4} \Rightarrow \mathrm{V}\left(0, \frac{9}{4}\right)$$

La gráfica de esta función es la representada más arriba.

Para representar la recta tangente a la curva anterior en el punto de abscisa $x$=1, calculemos antes la ecuación de dicha recta tangente. Teniendo en cuenta que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f$ en un punto de abscisa $x_0$ es: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \quad \Rightarrow$

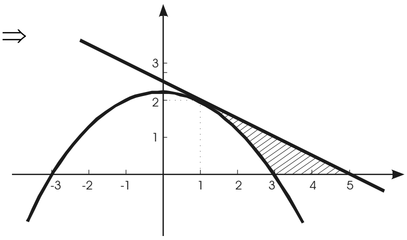
$$f(x) = \frac{9-x^2}{4} \Rightarrow f(x_0) = y_0 = \frac{9-x_0^2}{4} \quad ; \quad f'(x) = -\frac{x}{2} \Rightarrow f'(x_0) = -\frac{x_0}{2}$$

$$y - y_0 = -\frac{x_0}{2}(x - x_0) \qquad [1]$$

impongamos ahora la condición a esta recta tangente genérica, que pase por el punto de abscisa $x_0 = 1$, siendo la ordenada: $y_0 = \dfrac{9-1^2}{4} = 2$ . Sustituyendo este punto en [1] obtendremos:

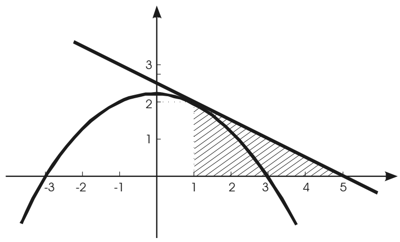
$$y - y_0 = -\frac{x_0}{2}(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 1) \quad \Rightarrow$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$



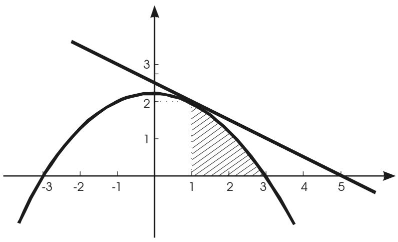
que es la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto de abscisa 1. La representación gráfica de esta recta junto a la curva anterior es la situada al lado. Finalmente, el recinto limitado por la curva, la tangente y el eje de abscisas es el rayado en el dibujo.

**(b)** Para calcular el área del recinto anterior, calcularemos antes el siguiente:



$$\mathrm{A}_1 = \frac{(5-1)\bullet 2}{2} = 4$$

Calculemos ahora este otro:



$$\mathrm{A}_2 = \int_1^3 \left(\frac{9}{4} - \frac{x^2}{4}\right) dx = \left[\frac{9}{4}x - \frac{x^3}{12}\right]_1^3 =$$

$$= \frac{27}{4} - \frac{27}{12} - \left(\frac{9}{4} - \frac{1}{12}\right) = \frac{81-27}{12} - \frac{27-1}{12} =$$

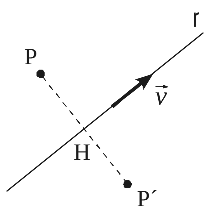
$$= \frac{54}{12} - \frac{26}{12} = \frac{28}{12} = \frac{7}{3}$$

Por último, el área del recinto pedido será:

$$\text{Área} = \mathrm{A}_1 - \mathrm{A}_2 = 4 - \frac{7}{3} = \frac{5}{3} \quad u^2.$$

## SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

Expresemos la ecuación de la recta $r$ en forma paramétrica:




$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3 + t \\ z = 4 + 2\,t \end{cases}$$

El vector de dirección de la recta $r$ es $\vec{v} = (1,\ 1,\ 2)$

Sea H la proyección del punto P = (1, -3, 7) sobre la recta $r$, se cumple la condición de que el vector $\overrightarrow{\mathrm{PH}}$ es perpendicular al vector $\vec{v}$ de dirección de la recta, luego el producto escalar de ambos vectores será cero.

El punto H por pertenecer a la recta tendrá de coordenadas $(1+t,\ -3+t,\ 4+2t)$ .

El vector $\overrightarrow{\mathrm{PH}}$ tendrá de coordenadas:

$$\overrightarrow{PH} = (1+t,\ -3+t,\ 4+2t) - (1,\ -3,\ 7) = (t,\ t,\ -3+2t)$$

El producto escalar de los vectores $\overrightarrow{PH}$ y $\vec{v}$ es cero:

$$\overrightarrow{PH}\bullet\vec{v}=0 \ \Rightarrow\ (t,\ t,-3+2t)\bullet(1,1,2)=0 \ \Rightarrow\ t+t-6+4t=0 \ \Rightarrow\ t=1$$

sustituyamos $t$ en el punto H y en el vector $\overrightarrow{PH}$ :

$$H=(1+t,\ \ -3+t,\ \ 4+2t)=\left(1+1,\ \ -3+1,\ \ 4+2\right)=\left(2,\ -2,\ \ 6\right)$$

$$\overrightarrow{PH}=(t,\ t,\ -3+2t)=(1,\ 1,-3+2)=(1,\ 1,\ -1)$$

El punto P´=($a$, $b$, $c$), simétrico del P respecto de la recta $r$, verifica que $\overrightarrow{PH}=\overrightarrow{HP'}$, es decir:

$$\overrightarrow{PH}=\overrightarrow{HP'} \ \Rightarrow\ (1,1,-1)=(a,b,c)-(2,-2,6) \ \Rightarrow\ (1,1,-1)=(a-2,b+2,\ c-6) \ \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 1=a-2 \\ 1=b+2 \\ -1=c-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\ 3 \\ b=-1 \\ c=\ 5 \end{cases} \Rightarrow \quad P'=(3,-1,5)$$

## SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

**(a)** Discutamos el siguiente sistema.

$$\begin{cases} \lambda x+2y = 3 \\ -x+2\lambda z = -1 \\ 3x-y-7z=\lambda+1 \end{cases}$$

Expresemos el sistema en forma matricial, y discutámoslo mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2\lambda & -1 \\ 3 & -1 & -7 & \lambda+1 \end{array}\right)$$

Intercambiemos entre sí las filas 1ª y 2ª; y después la 2ª con la 3ª.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2\lambda & -1 \\ 3 & -1 & -7 & \lambda+1 \\ \lambda & 2 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11}$ = -1 ≠ 0.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] + 3 · [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + λ · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 6\lambda-7 & \lambda-2 \\ 0 & 2 & 2\lambda^2 & 3-\lambda \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22}$ = -1 ≠ 0.
Sustituyamos la 2ª fila por: [3ªf.] + 2 · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 6\lambda-7 & \lambda-2 \\ 0 & 0 & 2\lambda^2+12\lambda-14 & -1+\lambda \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado inferiormente, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero salvo el $a_{33}$ que puede serlo o no. Discutamos los diferentes casos que pueden presentarse.

* Si $a_{33}$ = 0 ⇒ $2\lambda^2 + 12\lambda - 14 = 0$ ⇒ $\lambda^2 + 6\lambda - 7 = 0$ ⇒

$$\lambda=\frac{-6\pm\sqrt{36+28}}{2}= \begin{cases} 1 \\ -7 \end{cases}$$

** Si λ = 1 ⇒ la última ecuación será 0 = -1+1, es decir, 0 = 0, se trata de una ecuación trivial, la eliminamos, nos quedará un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas, o sea, un sistema compatible indeterminado uniparamétrico por lo que el sistema tiene infinitas soluciones.

** Si $\lambda = -7$ $\Rightarrow$ la última ecuación será $0 = -1-7$, es decir, $0 = -8$, que es una ecuación absurda, por lo que el sistema no tiene solución, es un sistema incompatible.

* Si $a_{33} \neq 0$ $\Rightarrow$ $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq -7$ $\Rightarrow$ la última ecuación no es ni absurda ni trivial, nos queda un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, el sistema es compatible determinado, tiene solución única.

**(b)** Resolvamos el sistema para $\lambda$=1, para ello sustituyamos este valor en la matriz triangulada inferior del apartado anterior.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 6\lambda-7 & \lambda-2 \\ 0 & 0 & 2\lambda^2+12\lambda-14 & -1+\lambda \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Al estar el sistema triangulado, y ser un sistema compatible indeterminado uniparamétrico, la incógnita que nos sobra, la $z$, la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & -1-2z \\ 0 & -1 & -1+z \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado. La solución es:

$$-x = -1 - 2z \quad ; \quad -y = -1 + z$$

o lo que es lo mismo:

$$x = 1 + 2z \quad ; \quad y = 1 - z$$

sustituyendo la incógnita $z$ por un parámetro $t$, tendremos la solución final:

$$x = 1 + 2t \quad ; \quad y = -1 - t \quad ; \quad z = t$$

**(c)** La discusión para los restantes valores de $\lambda$ se ha realizado en el apartado a).

| UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA<br>PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD | L.O.G.S.E.<br>MATEMÁTICAS II |
| --- | --- |

**Instrucciones**: a) **Duración**: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) La puntuación de cada pregunta está indicada en las mismas.
d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
e) Puedes usar calculadora (puede ser programable o tener pantalla gráfica), pero todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

## MODELO 29 DE EXAMEN

### Opción A

**EJERCICIO 1**. Considera la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+e^{1/x}} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

**(a)** [1´5 PUNTOS] Calcula los límites laterales de $f$ en $x = 0$. ¿Es $f$ continua en $x = 0$?
**(b)** [1 PUNTO] Calcula el valor de la derivada de $f$ en $x = 1$.

**EJERCICIO 2**. Considera la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (1 + x)\, e^{x}$.
**(a)** [1´5 PUNTOS] Calcula $\int f(x)\, dx$ .
**(b)** [1 PUNTO] Calcula una primitiva de $f$ cuya gráfica pase por el por el punto (0, 3).

**EJERCICIO 3**. [2´5 PUNTOS] Halla las ecuaciones de la recta que se apoya perpendicularmente en las rectas $r$ y $s$ definidas respectivamente por

$$x-1 = y-2 = \frac{z-1}{-2}, \qquad \frac{x-4}{-1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{2}.$$

**EJERCICIO 4**. Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad U = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

**(a)** [0´75 PUNTOS] Halla los valores de $x$ e $y$ tales que $A X = U$.
**(b)** [0´75 PUNTOS] Halla la matriz $A^{-1}$ y calcula $A^{-1}$ U.
**(c)** [1 PUNTO] Encuentra los posibles valores de $m$ para los que los vectores

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$$

son linealmente dependientes.

**Opción B**

**EJERCICIO 1**. [2´5 PUTOS] Determina una función polinómica de grado 3 sabiendo que verifica que alcanza un máximo en $x = 1$, que su gráfica pasa por el punto (1, 1) y que la recta de ecuación $y = x$ es tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x = 0$.

**EJERCICIO 2**. [2´5 PUNTOS] Calcula la siguiente integral definida

$$\int_0^2 \frac{dx}{x^2+4x+3}.$$

¿Qué representa geométricamente?

**EJERCICIO 3**. [2´5 PUNTOS] Calcula el volumen de un cubo sabiendo que dos de sus caras están, respectivamente, en los planos $2x - 2y + z - 1 = 0$ y $2x - 2y + z - 5 = 0$.

**EJERCICIO 4**. Considera el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rcr} x+\lambda y+(\lambda-1)z &=& 1 \\ y+z &=& 1 \\ 2x+y-z &=& -3 \end{array}\right.$$

**(a)** [1 PUNTO] Halla todos los posibles valores del parámetro $\lambda$ para los que el sistema correspondiente tiene al menos dos soluciones distintas.
**(b)** [1 PUNTO] Resuelve el sistema para los valores de $\lambda$ en el apartado anterior.
**(c)** [0´5 PUNTOS] Discute el sistema para los restantes valores de $\lambda$.

---

**SOLUCIONES Opción A**

## SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

**(a)** Calculemos los límites laterales de la función $f$ en el punto $x$=0:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{0^-}}} = \dfrac{1}{1+e^{-\infty}} = \dfrac{1}{1+0} = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{0^+}}} = \dfrac{1}{1+e^{\infty}} = \dfrac{1}{1+\infty} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} 1 \neq 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \end{array}$$

La función tiene límites laterales pero no coinciden, luego no tiene límite, por lo que no es continua en $x$=0, aunque el valor que toma la función en el punto $x$=0 coincide con el límite lateral por la derecha en dicho punto.

**(b)** Para que pueda ser derivable en $x=1$ ha de ser previamente continua, y lo es porque para valores menores que cero la función $\dfrac{1}{1+e^{1/x}}$ es un cociente de funciones continuas y no se anula para ningún valor del denominador, luego será continua en $x$=1.

La función derivada en $x$=1 es:

$$f'(x)=\frac{-e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2} \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}$$

$$f'(1)=\frac{e}{1\bullet(1+e)^2}=\frac{e}{(1+e)^2}$$

**SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-**

**(a)** Calculemos la siguiente integral mediante el método de integración por partes.

$$\int (1+x)e^x\,dx$$

$$u=1+x \qquad du=dx$$

$$dv=e^x\,dx \qquad v=\int e^x\,dx=e^x$$

$$\int (1+x)e^x\,dx=(1+x)e^x-\int e^x\,dx=(1+x)e^x-e^x=e^x+xe^x-e^x=x\,e^x+\mathrm{C}$$

**(b)** Una primitiva de $f$ cuya gráfica pase por el punto (0, 3) será:

$$F(x)=xe^x+\mathrm{C} \quad\Rightarrow\quad F(0)=0\bullet e^0+\mathrm{C} \quad\Rightarrow\quad 3=0\bullet 1+\mathrm{C} \quad\Rightarrow\quad \mathrm{C}=3 \quad\Rightarrow$$

$$F(x)=xe^x+3$$

que es la primitiva que nos piden.

**SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-**

Las ecuaciones de las rectas $r$ y $s$ en forma paramétrica son:

$$r=\begin{cases} x=1+\alpha \\ y=2+\alpha \\ z=1-2\alpha \end{cases} \qquad s=\begin{cases} x=4-\beta \\ y=-1+3\beta \\ z=2\beta \end{cases}$$

Elijamos de la recta $r$ un punto genérico, P, de coordenadas P(1+α, 2+α, 1-2α); y de la recta $s$ otro, H, de coordenadas H(4-β, -1+3β, 2β).

Se ha de verificar que el vector $\overrightarrow{PH}$ que determinan estos dos puntos genéricos, ha de ser perpendicular al vector de dirección de cada una de las rectas, y por tanto, los productos escalares respectivos serán cero:

$$\overrightarrow{PH} = (4-\beta,\ -1+3\beta,\ 2\beta) - (1+\alpha,\ 2+\alpha,\ 1-2\alpha) = (3-\beta-\alpha,\ -3+3\beta-\alpha,\ -1+2\beta+2\alpha)$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PH}\perp\vec{u}_r \Rightarrow \overrightarrow{PH}\bullet\vec{u}_r = 0 \Rightarrow (3-\beta-\alpha,\ -3+3\beta-\alpha,\ -1+2\beta+2\alpha)\bullet(1,1,-2) = 0 \\ \overrightarrow{PH}\perp\vec{v}_s \Rightarrow \overrightarrow{PH}\bullet\vec{v}_s = 0 \Rightarrow (3-\beta-\alpha,\ -3+3\beta-\alpha,\ -1+2\beta+2\alpha)\bullet(-1,3,2) = 0 \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} 3-\beta-\alpha-3+3\beta-\alpha+2-4\beta-4\alpha = 0 \\ -3+\beta+\alpha-9+9\beta-3\alpha-2+4\beta+4\alpha = 0 \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{r} -6\alpha-2\beta = -2 \\ 2\alpha+14\beta = 14 \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{r} -3\alpha-\beta = -1 \\ \alpha+7\beta = 7 \end{array}\right\}\Rightarrow$$

Expresemos el sistema de ecuaciones anterior en forma matricial:

$\left(\begin{array}{cc|c} -3 & -1 & -1 \\ 1 & 7 & 7 \end{array}\right)$ Resolvámoslo mediante el método de reducción de Gauss - Jordan.
Intercambiemos entre sí las dos filas.

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 7 & 7 \\ -3 & -1 & -1 \end{array}\right)$ Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] + 3 · [1ªf.]

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 7 & 7 \\ 0 & 20 & 20 \end{array}\right)$ Simplifiquemos la 2ª fila por 20.

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 7 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$ Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] - 7 · [2ªf.]

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$ El sistema está triangulado. La solución es:
$\alpha = 0 \quad ; \quad \beta = 1$

La ecuación de la recta que se apoya perpendicularmente en *r* y *s*, es la recta que pasa por el punto, por ejemplo, el P; y tiene como vector de dirección el vector $\overrightarrow{PH}$, es decir:

$$P(1+\alpha,\ 2+\alpha,\ 1-2\alpha) \Rightarrow P(1+0,\ 2+0,\ 1-2\cdot0) \Rightarrow P(1,\ 2,\ 1)$$

$$\overrightarrow{PH} = (3-\beta-\alpha,\ -3+3\beta-\alpha,\ -1+2\beta+2\alpha) = (3-1-0,\ -3+3-0,\ -1+2+0) = (2,\ 0,\ 1)$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1+2\lambda \\ y = 2 \\ z = 1+\lambda \end{array}\right.$$

**SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-**

**(a)** Para hallar los valores de *x* e *y* que satisfagan $A\,X = U$, comprobamos si la matriz A tiene inversa, y si la tiene la calculamos.

Lo haremos mediante el método de Gauss, que consiste en colocar a la derecha, por ejemplo, de la matriz A la matriz unidad e intentar, mediante el uso de diversas transformaciones elementales, que aparezca la matriz unidad a la izquierda de A, la matriz que queda a la derecha es la matriz inversa de A.

$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$ Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 3 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: 3 · [2ªf.] - 4 · [1ªf.]

$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \end{array}\right)$ La matriz A admite inversa. Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] - 2 · [2ªf.]

$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 9 & -6 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \end{array}\right)$ Simplificamos la 1ª fila por 3.

$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \end{array}\right)$ Hemos obtenido, a la izquierda, la matriz unidad y a la derecha, la matriz inversa de A., es decir:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Resolvamos la ecuación matricial que nos dice el problema:

$$A\,X = U \quad \Rightarrow \quad A^{-1} A\,X = A^{-1} U \quad \Rightarrow \quad I\,X = A^{-1} U \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1} U \quad \Rightarrow$$

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21-18 \\ -28+27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

luego $x = 3$ e $y = -1$.

**(b)** La matriz inversa de A, $A^{-1}$, la hemos calculado en el apartado anterior.

Igualmente, en el apartado anterior, también hemos calculado $A^{-1}$ U, que coincidía con el valor de la matriz $X$.

**(c)** Calculemos, en primer lugar, el vector $A \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$.

$$A \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2m \\ 4+3m \end{pmatrix}$$

Los vectores $\begin{pmatrix} 3+2m \\ 4+3m \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ serán linealmente dependientes si una combinación lineal de ellos nula, $\alpha \begin{pmatrix} 3+2m \\ 4+3m \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} = 0$, implica que al menos uno de los coeficientes, $\alpha$ o $\beta$, es distinto de cero. Esto implica a su vez que cualquiera de los vectores es igual a $\lambda$ veces el otro. Veámoslo.

$$\begin{pmatrix} 3+2m \\ 4+3m \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 3+2m \\ 4+3m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda\,m \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{matrix} 3+2m = \lambda \\ 4+3m = \lambda\,m \end{matrix}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{matrix} \lambda = 3+2m \\ \lambda\,m = 4+3m \end{matrix}\right\}$$

Expresemos el sistema anterior, de dos ecuaciones y una incógnita, $\lambda$, en forma matricial.

$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 3+2m \\ m & 4+3m \end{array}\right)$ Resolvámoslo mediante el método de reducción de Gauss - Jordan.
Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - $m$ · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 3+2m \\ 0 & 4-2m^2 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado inferiormente. La última ecuación ha de ser trivial, 0=0, para que el sistema sea compatible, es decir, para que podamos obtener un valor para λ; y deducir que los dos vectores son linealmente dependientes. Para ello se ha cumplir que $4 - 2m^2 = 0 \Rightarrow$

$$m = \sqrt{2} \quad ; \quad m = -\sqrt{2}$$

---

**SOLUCIONES Opción B**

**SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-**

Una función polinómica de grado tres tendrá el siguiente aspecto:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Tendremos en cuenta que las funciones polinómicas son continuas y derivables en todo ℝ.

Si el punto P(1, 1) es un punto de su gráfica, se verificará:

$$1 = a + b + c + d \qquad [1]$$

Si en el punto P(1, 1) la función alcanza un máximo:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \quad \Rightarrow \quad f'(1) = 3a + 2b + c \quad \Rightarrow \quad 0 = 3a + 2b + c \qquad [2]$$

$$f''(x) = 6ax + 2b \quad \Rightarrow \quad f''(1) = 6a + 2b \quad \Rightarrow \quad 6a + 2b < 0 \qquad [3]$$

Si la recta $y=x$ es tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $x = 0$, se verificará:

* que el punto (0, 0) es un punto de la gráfica, y por tanto:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad \Rightarrow \quad 0 = d \qquad [4]$$

* que la pendiente de la recta tangente, 1, es igual a la $f'(0)$, y por tanto:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \quad \Rightarrow \quad f'(0) = c \quad \Rightarrow \quad 1 = c \qquad [5]$$

Resolvamos el sistema formado por las condiciones [1], [2], [4] y [5], pero previamente sustituiremos las incógnitas que ya conocemos, $d$=0 y $c$=1, en las demás ecuaciones, nos quedará este sistema:

$$\left.\begin{array}{r} a+b+1+0 = 1 \\ 3a+2b+1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} a+b = 0 \\ 3a+2b = -1 \end{array}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo por el método de Gauss - Jordan.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 3 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] + [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

La solución del sistema es:

$$a = -1 \quad ; \quad b = 1$$

La función polinómica de grado tres es: $f(x) = -x^3 + x^2 + x$

## SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

Es una integral racional definida.

Calculamos las raíces del denominador:

$$x^2+4x+3=0 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{-4\pm\sqrt{16-12}}{2}= \begin{cases} -1 \\ -3 \end{cases}$$

Descompongamos la fracción del integrando en fracciones elementales:

$$\frac{1}{x^2+4x+3}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+3} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{x^2+4x+3}=\frac{A(x+3)+B(x+1)}{(x+1)(x+3)}$$

$$1=A(x+3)+B(x+1) \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x=-1 \quad\Rightarrow\quad 1=A(-1+3)+0 \quad\Rightarrow\quad A=\frac{1}{2} \\ x=-3 \quad\Rightarrow\quad 1=0+B(-3+1) \quad\Rightarrow\quad B=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\int_0^2 \frac{dx}{x^2+4x+3}=\int_0^2 \frac{1/2}{x+1}\,dx+\int_0^2 \frac{-1/2}{x+3}\,dx=\left[\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\,|x+1|\right]_0^2-\left[\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\,|x+3|\right]_0^2=$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\,|2+1|-\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\,|0+1|-\left[\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\,|2+3|-\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\,|0+3|\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}(3)-\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\,(1)-\left[\frac{1}{2}\mathrm{Ln}(5)-\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\,(3)\right]=\mathrm{Ln}\,(3)-\frac{1}{2}\mathrm{Ln}(5)$$

Geométricamente representa el área de la región limitada por la curva, el eje de abscisas y las ordenadas en los puntos de abscisa 0 y 2. En este caso es así, porque para los valores que van desde 0 a 2, la función se conserva positiva, es decir, su gráfica queda por encima del eje de abscisas, debido a que el denominador sólo toma valores positivos para dichos valores.

## SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

Si observamos los dos planos, vemos que ambos son paralelos, ya que se verifica la condición de paralelismo en sentido estricto:

$$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}\neq\frac{D}{D'} \qquad\Rightarrow\qquad \frac{2}{2}=\frac{-2}{-2}=\frac{1}{1}\neq\frac{-1}{-5}$$

Luego la distancia entre los dos planos nos dará el valor de la arista del cubo.

La distancia entre los dos planos coincidirá con la distancia de un punto cualquiera de uno de los dos planos al otro. Elegimos un punto cualquiera del plano $2x - 2y + z - 1 = 0$, por ejemplo, el P(0, 0 1) y calculamos la distancia de este punto al plano $2x - 2y + z - 5 = 0$.

Expresemos la ecuación de este último plano en forma paramétrica, para ello basta despejar una incógnita, por ejemplo, la $z$, en función de las demás:

$$z = 5 - 2x + 2y \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x=\alpha \\ y=\beta \\ z=5-2\alpha+2\beta \end{cases}$$

Un punto genérico, H, de este plano, tendrá de coordenadas, H = (α, β, 5 - 2α+2β).

Se ha de verificar que el vector $\overrightarrow{PH}$ es perpendicular a los dos vectores de dirección del plano, es decir, el producto escalar con cada uno de ellos será cero.

$$\overrightarrow{PH} = (\alpha,\ \beta,\ 5-2\alpha+2\beta) - (0,\ 0,\ 1) = (\alpha,\ \beta,\ 4-2\alpha+2\beta)$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PH} \perp \vec{u} \ \Rightarrow\ \overrightarrow{PH} \bullet \vec{u} = 0 \ \Rightarrow\ (\alpha,\ \beta,\ 4-2\alpha+2\beta)\bullet(1,\ 0,-2) = 0 \\ \overrightarrow{PH} \perp \vec{v} \ \Rightarrow\ \overrightarrow{PH} \bullet \vec{v} = 0 \ \Rightarrow\ (\alpha,\ \beta,\ 4-2\alpha+2\beta)\bullet(0,\ 1,\ 2) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha-8+4\alpha-4\beta = 0 \ \Rightarrow\ 5\alpha-4\beta = 8 \\ \beta+8-4\alpha+4\beta = 0 \ \Rightarrow\ -4\alpha+5\beta = -8 \end{array}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo mediante el método de reducción de Gauss - Jordan

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & -4 & 8 \\ -4 & 5 & -8 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 5 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: 5 · [2ªf.] + 4 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & -4 & 8 \\ 0 & 9 & -8 \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 9 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: 9 · [1ªf.] + 4 · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 45 & 0 & 40 \\ 0 & 9 & -8 \end{array}\right)$$

La solución es:

$\alpha = 40/45$ ; $\beta = -8/9$ $\Rightarrow$ $\alpha = 8/9$ ; $\beta = -8/9$

El vector $\overrightarrow{PH}$ tendrá de coordenadas:

$$\overrightarrow{PH} = (\alpha,\ \beta,\ 4-2\alpha+2\beta) = \left(\frac{8}{9},\ -\frac{8}{9},\ 4-\frac{16}{9}-\frac{16}{9}\right) = \left(\frac{8}{9},\ -\frac{8}{9},\ \frac{4}{9}\right)$$

La arista coincidirá con la distancia del punto P al plano, es decir, con el módulo del vector anterior:

$$a = \left|\overrightarrow{PH}\right| = \sqrt{\left(\frac{8}{9}\right)^2+\left(-\frac{8}{9}\right)^2+\left(\frac{4}{9}\right)^2} = \sqrt{\frac{64+64+16}{9^2}} = \sqrt{\frac{144}{9^2}} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

Finalmente, el volumen del cubo es:

$$\text{Volumen} = a^3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3$$

## SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

**(a)** Discutamos el sistema siguiente mediante el método de reducción de Gauss. Para ello expresemos dicho sistema en forma matricial.

$$\left.\begin{array}{r} x+\lambda y+(\lambda-1)z = 1 \\ y+z = 1 \\ 2x+y-z = -3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & \lambda-1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

Intercambiemos entre sí las filas 1ª y 3ª

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda-1 & 1 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 2 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: 2 · [3ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2\lambda-1 & 2\lambda-1 & 5 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - (2λ-1) · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6-2\lambda \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado, pero la última ecuación puede dar lugar a dos situaciones distintas, según se verifique o no, es decir, si el término independiente es o no cero. Veámoslo.

* $6 - 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 3 \Rightarrow$ La última ecuación será de la forma, 0 = 0, o sea, una ecuación trivial, la podemos eliminar; nos queda entonces un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas, se trata de un sistema compatible indeterminado uniparamétrico, con infinitas soluciones y, por tanto, tiene al menos dos soluciones distintas.

* $6 - 2\lambda \neq 0 \Rightarrow \lambda \neq 3 \Rightarrow$ La última ecuación será de la forma 0 = (nº ≠ 0), o sea, una ecuación absurda. El sistema no tiene solución, es un sistema incompatible.

**(b)** Resolvamos el sistema para $\lambda = 3$. Sustituiremos este valor en el sistema triangulado inferior obtenido al final del apartado anterior.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

La incógnita que nos sobra, la $z$, la pasamos al segundo miembro como incógnita secundaria o parámetro.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -3+z \\ 0 & 1 & 1-z \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] - [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & -4+2z \\ 0 & 1 & 1-z \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado, la solución es:

$$2x = -4 + 2z \quad ; \quad y = 1 - z \quad \Rightarrow \quad x = -2 + z \quad ; \quad y = 1 - z$$

Sustituyamos ahora la incógnita secundaria, la $z$, por un parámetro, por ejemplo, por $\alpha$:

$$x = -2 + \alpha \quad ; \quad y = 1 - \alpha \quad ; \quad z = \alpha.$$

**(c)** El sistema está discutido en el apartado a), es decir, para todos los valores de $\lambda \neq 3$, el sistema es incompatible, no tiene solución.

| UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA<br>PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD | L.O.G.S.E.<br>MATEMÁTICAS II |
|---|---|

**Instrucciones**: a) **Duración**: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) La puntuación de cada pregunta está indicada en las mismas.
d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
e) Puedes usar calculadora (puede ser programable o tener pantalla gráfica), pero todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

## MODELO 30 DE EXAMEN

### Opción A

**EJERCICIO 1**. [1´25 PUNTOS] Calcula el valor de la integral

$$\int_{-1}^{3} (x^2+5)\, e^{-x}\; dx .$$

**EJERCICIO 2**. Sea $f$ la función definida $x \neq -2$ por

$$f(x) = \frac{x^2}{x+2}$$

**(a)** [1 PUNTO] Halla las asíntotas de la gráfica de *f.*
**(b)** [1 PUNTO] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, y los extremos locales de *f.*
**(c)** [0´5 PUNTOS] Teniendo en cuenta los resultados de los apartados anteriores, haz un esbozo de la gráfica de *f.*

**EJERCICIO 3**. [2´5 PUNTOS] Discute y resuelve el sistema según los valores de λ:

$$\begin{cases} x+\lambda y+z = 0 \\ \lambda x+y+z = 0 \\ x+y+\lambda z = 0 \end{cases}$$

**EJERCICIO 4**. [2´5 PUNTOS] Halla las coordenadas del punto simétrico del punto P = (1, 2, -2) respecto al plano de ecuación $3x + 2y + z - 7 = 0$.

---

### Opción B

**EJERCICIO 1**. Se ha observado que en una carretera de salida de una gran ciudad la velocidad de los coches entre las 2h. y las 6h. de la tarde viene dada por

$$v(t) = t^3 - 15\,t^2 + 72\,t + 8 \qquad \text{para} \quad t \in [2, 6]$$

**(a)** [1´25 PUNTOS] ¿A qué hora circulan los coches con mayor velocidad? Justifica la respuesta.

**(b)** [1´25 PUNTOS] ¿A qué hora circulan los coches con menor velocidad? Justifica la respuesta.

**EJERCICIO 2**. Considera las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = 6 - x^2, \qquad g(x) = |x|, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

**(a)** [1 PUNTO] Dibuja el recinto limitado por las gráficas de $f$ y $g$.

**(b)** [1´5 PUNTOS] Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.

**EJERCICIO 3**. [2´5 PUNTOS] Resuelve la ecuación matricial $A^2 \cdot X = 2B$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

**EJERCICIO 4**. [2´5 PUNTOS] Halla la ecuación del plano cuyo punto más próximo al origen es $(-1, 2, 1)$.

---

**SOLUCIONES Opción A**

## SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

Para calcular la integral definida $\displaystyle\int_{-1}^{3} (x^2+5)\, e^{-x}\, dx$

calcularemos, en primer lugar la integral indefinida correspondiente mediante el método de la integración por partes.

$$\int (x^2+5)\, e^{-x}\, dx$$

$$u = x^2+5 \qquad du = 2x\, dx$$

$$dv = e^{-x}\, dx \qquad v = \int e^{-x}\, dx = -e^{-x}$$

$$\int (x^2+5)\, e^{-x}\, dx = -(x^2+5)\, e^{-x} + \int e^{-x}\, 2x\, dx = \qquad [1]$$

$$u = 2x \qquad du = 2\, dx$$

$$dv = e^{-x}\, dx \qquad v = \int e^{-x}\, dx = -e^{-x}$$

Continuando desde [1]:

$$= -(x^2+5)e^{-x} - 2xe^{-x} + 2\int e^{-x}\,dx = -(x^2+5)e^{-x} - 2x\,e^{-x} - 2e^{-x} = \left(-x^2-2x-7\right)e^{-x}$$

Finalmente la integral definida pedida será:

$$\int_{-1}^{3}(x^2+5)\,e^{-x}\,dx = \left[\left(-x^2-2x-7\right)e^{-x}\right]_{-1}^{3} = (-9-6-7)\,e^{-3} - (-1+2-7)\,e^{1} = -22e^{-3} + 6e$$

## SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

**(a)** Asíntotas Verticales.

Para que existan asíntotas verticales se ha de satisfacer que: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$

Comprobemos si existen; en principio, hay que buscarlas entre los valores que anulen al denominador, $x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -2$. Veámoslo.

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2}{x+2} = \frac{4}{-2+2} = \frac{4}{0} = \infty \qquad \Rightarrow \qquad \text{Hay un asíntota vertical: } x = -2.$$

Estudiemos la posición de la gráfica de $f$ respecto de esta asíntota vertical

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x\to -2^-\\ x<-2}}\dfrac{x^2}{x+2} = \dfrac{4}{-2^- + 2} = \dfrac{4}{-0} = -\infty \\[2ex] \lim\limits_{\substack{x\to -2^+\\ x>-2}}\dfrac{x^2}{x+2} = \dfrac{4}{-2^+ + 2} = \dfrac{4}{+0} = +\infty \end{array}\right\}\Rightarrow$$

La función $f(x)$ tiende a $-\infty$ cuando $x$ se acerca a $-2$ por la izquierda, y a $+\infty$ cuando lo hace por la derecha.

- Asíntotas horizontales.

Para que exista asíntota horizontal se ha de satisfacer que: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$

Comprobemos si existe.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x+2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{1} = \infty \qquad \Rightarrow \qquad \text{No existe asíntota horizontal.}$$

La indeterminación de infinito partido por infinito se ha destruido aplicando la Regla de L´Hôpital, que consiste en derivar el numerador y el denominador independientemente el uno del otro.

No existe asíntota horizontal, pero se da la condición necesaria para que pueda existir asíntota oblicua.

- Asíntotas Oblicuas.

Calculemos la ecuación de la posible asíntota oblicua: $y$ = m$x$ + n. Comencemos obteniendo el valor de m y después el de la n:

$$\text{m} = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x+2}}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x(x+2)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+2x} = 1$$

Calculemos ahora n:

$$n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+2} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2 - x^2 - 2x}{x+2} = \lim_{x\to\infty}\frac{-2x}{x+2} = -2$$

La asíntota oblicua, es: $y = x - 2$.

Estudiemos la posición de la gráfica de $f$ respecto de la asíntota oblicua.

* Para valores de $x$ muy grandes, por ejemplo, $x = 1000 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} f(1000) = \dfrac{1000^2}{1000+2} = 998.0039920 \\ y_{\text{asíntota}} = 1000 - 2 = 998 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f(1000) > y_{\text{asíntota}}$$

luego la gráfica de $f$, para $x \to +\infty$, va por encima de la asíntota oblicua.

* Para valores de $x$ muy pequeños, por ejemplo, $x = -1000 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} f(-1000) = \dfrac{(-1000)^2}{-1000+2} = -1002.004008 \\ y_{\text{asíntota}} = -1000 - 2 = -1002 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f(-1000) < y_{\text{asíntota}}$$

luego la gráfica de $f$, para $x \to -\infty$, va por debajo de la asíntota oblicua.

**(b)** Determinemos los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f$. Hallemos los valores que anulen a la función primera derivada de $f(x)$.

$$f'(x) = \frac{2x(x+2) - x^2}{(x+2)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^2 + 4x}{(x+2)^2} \Rightarrow x^2 + 4x = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} \nearrow x = 0 \\ \searrow x = -4 \end{array}$$

Con estos dos puntos, 0 y $-4$, y con el punto donde la función no existe, $-2$, los ordenamos y construimos los posibles intervalos de monotonía: $(-\infty, -4)$, $(-4, -2)$, $(-2, 0)$ y $(0, +\infty)$.

Probemos un valor intermedio de cada uno de los intervalos, por ejemplo, $-5$, $-3$, $-1$ y 1 respectivamente en la función primera derivada y según nos salga mayor o menor que cero, en el intervalo correspondiente la función será creciente o decreciente:

$$\left\{\begin{array}{lll} f'(-5) = \dfrac{(-5)^2 + 4(-5)}{(-5+2)^2} = \dfrac{5}{9} > 0 & \Rightarrow & \text{creciente en } (-\infty, -4) \\ f'(-3) = \dfrac{(-3)^2 + 4(-3)}{(-3+2)^2} = \dfrac{-3}{1} < 0 & \Rightarrow & \text{decreciente en } (-4\ \ -2) \\ f'(-1) = \dfrac{(-1)^2 + 4(-1)}{(-1+2)^2} = \dfrac{-3}{1} < 0 & \Rightarrow & \text{decreciente en } (-2,\ 0) \\ f'(1) = \dfrac{1^2 + 4 \bullet 1}{(1+2)^2} = \dfrac{5}{9} > 0 & \Rightarrow & \text{creciente en } (0,\ +\infty) \end{array}\right.$$

Estudiemos los extremos locales. Éstos sólo se podrán localizar en los puntos de derivada cero, ya que la función es continua y derivable en todo su dominio que es $\mathbb{R} - \{-2\}$.

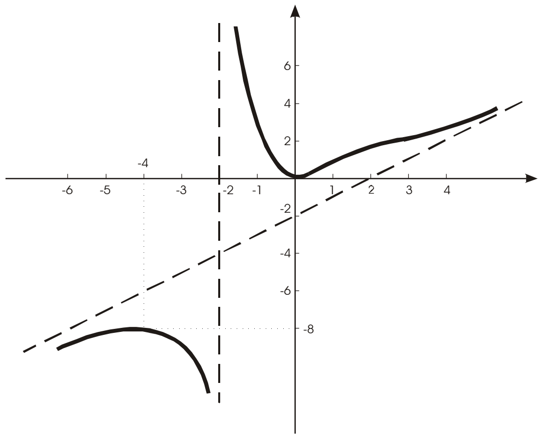
Teniendo en cuenta lo analizado hasta ahora podemos asegurar que hay un máximo local en $x = -4$, y un mínimo local en $x = 0$.

Las ordenadas de estos extremos son:

$f(-4) = \dfrac{(-4)^2}{-4+2} = \dfrac{16}{-2} = -8 \quad \Rightarrow \quad$ Máximo en (-4, -8).

$f(0) = \dfrac{0^2}{0+2} = \dfrac{0}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad$ Mínimo en (0, 0).

**(c)** Un esbozo de la gráfica según los resultados de los apartados anteriores es:




## SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

Discutiremos el sistema homogéneo mediante el método de reducción de Gauss, para lo cual lo expresamos en forma matricial.

$$\begin{cases} x+\lambda y+z = 0 \\ \lambda x+y+z = 0 \\ x+y+\lambda z = 0 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 1 & 0 \\ \lambda & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda & 0 \end{array}\right)$$

Pasemos la 3ª fila a la 1ª, la 1ª a la 2ª y la 2ª a la 3ª.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 0 \\ 1 & \lambda & 1 & 0 \\ \lambda & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - $\lambda \cdot$ [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 0 \end{array}\right)$$

Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^2-\lambda+2 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado inferiormente, pero no todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero. Analicemos los diferentes casos que pueden presentarse.

* $a_{33} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\lambda^2 - \lambda + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \dfrac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$

** Si $\lambda = 1 \quad \Rightarrow \quad$ La 3ª ecuación es trivial, 0 = 0, y la 2ª también, las eliminamos.

Nos queda un sistema de una ecuación con tres incógnitas, se trata de un sistema compatible indeterminado biparamétrico.

La solución será:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^2-\lambda+2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

nos sobran dos incógnitas, la $y$ y la $z$, las pasamos al segundo miembro como incógnitas no principales o secundarias.

$\left(\begin{array}{c|c} 1 & -y-z \end{array}\right)$ La solución es: $x = -y - z$. Llamando α y β a cada una de las incógnitas secundarias, tendremos finalmente la solución del sistema para $\lambda = 1$:

$$x = -\alpha - \beta \quad ; \quad y = \alpha \quad ; \quad z = \beta.$$

** Si $\lambda = -2 \Rightarrow$ La 3ª ecuación es trivial, 0 = 0, la eliminamos. El coeficiente $a_{22} = \lambda - 1$, para este valor de λ, es $a_{22} = -2-1 = -3 \neq 0$, luego nos queda un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas, es decir, un sistema compatible indeterminado uniparamétrico.

La solución será:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^2-\lambda+2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

Simplifiquemos la 2ª fila por $-3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

La incógnita que nos sobra, la $z$, la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2z \\ 0 & 1 & z \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] - [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & z \end{array}\right)$$

La solución del sistema es:

$$x = z \quad ; \quad y = z$$

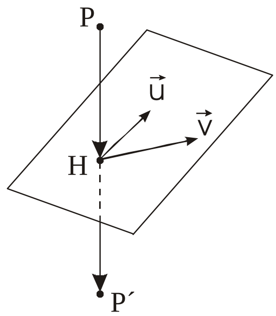
Llamando α a la incógnita secundaria $z$, tendremos finalmente la solución para $\lambda = -2$:

$$x = \alpha \quad ; \quad y = \alpha \quad ; \quad z = \alpha.$$

* $a_{33} \neq 0 \Rightarrow \lambda \neq 1$ y $\lambda \neq -2 \Rightarrow$ Todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero, nos queda un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas pero al ser un sistema homogéneo sólo admitiría la solución trivial, osea, $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$.

## SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

Expresemos la ecuación del plano, $3x + 2y + z - 7 = 0$, en forma paramétrica, para lo cual basta despejar una de las incógnitas, por ejemplo, la $z$, en función de las demás, $z = 7 - 3x - 2y$; y, por último, las incógnitas del segundo miembro se sustituyen por parámetros:




$$\pi \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 7 - 3\lambda - 2\mu \end{cases}$$

Un punto genérico, H, del plano π tendrá de coordenadas:

$$H = (\lambda, \mu, 7-3\lambda-2\mu)$$

El vector $\overrightarrow{PH}$ tiene de coordenadas:

$$\overrightarrow{PH} = (\lambda,\ \mu,\ 7-3\lambda-2\mu) - (1, 2, -2) = (\lambda-1,\ \mu-2,\ 9-3\lambda-2\mu)$$

este vector verifica la condición de ser perpendicular a los dos vectores, *u* y *v*, de dirección del plano, es decir:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PH} \perp \vec{u} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{PH} \bullet \vec{u} = 0 \\ \overrightarrow{PH} \perp \vec{v} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{PH} \bullet \vec{v} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} (\lambda-1,\ \mu-2,\ 9-3\lambda-2\mu) \bullet (1, 0, -3) = 0 \\ (\lambda-1,\ \mu-2,\ 9-3\lambda-2\mu) \bullet (0, 1, -2) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda - 1 - 27 + 9\lambda + 6\mu = 0 \\ \mu - 2 - 18 + 6\lambda + 4\mu = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 10\lambda + 6\mu = 28 \\ 6\lambda + 5\mu = 20 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 5\lambda + 3\mu = 14 \\ 6\lambda + 5\mu = 20 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

resolvamos este sistema mediante el método de reducción de Gauss-Jordan. Para ello expresemos dicho sistema en forma matricial.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 3 & 14 \\ 6 & 5 & 20 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 5 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: 5 · [2ªf.] - 6 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 3 & 14 \\ 0 & 7 & 16 \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 7 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: 7 · [1ªf.] - 3 · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 35 & 0 & 50 \\ 0 & 7 & 16 \end{array}\right)$$

Simplifiquemos la 1ª fila por 5.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 7 & 0 & 10 \\ 0 & 7 & 16 \end{array}\right)$$

La solución es:

$$\lambda = 10/7 \quad ; \quad \mu = 16/7$$

Luego el punto H y el vector $\overrightarrow{PH}$ tienen de coordenadas, respectivamente:

$$H = (\lambda,\ \ \mu,\ \ 7-3\lambda-2\mu) = \left(\frac{10}{7},\ \frac{16}{7},\ 7 - \frac{3\bullet 10}{7} - \frac{2\bullet 16}{7}\right) = \left(\frac{10}{7},\ \frac{16}{7},\ -\frac{13}{7}\right)$$

$$\overrightarrow{PH} = (\lambda-1,\ \mu-2,\ 9-3\lambda-2\mu) = \left(\frac{10}{7}-1,\ \frac{16}{7}-2,\ 9-\frac{3\bullet 10}{7}-\frac{2\bullet 16}{7}\right) = \left(\frac{3}{7},\ \frac{2}{7},\ \frac{1}{7}\right)$$

El punto P´, simétrico de P respecto del plano π, verificará que $\overrightarrow{PH} = \overrightarrow{HP'}$. Supongamos que P´tiene de coordenadas (*a*, *b*, *c*):

$$\overrightarrow{PH} = \overrightarrow{HP'} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{3}{7}, \frac{2}{7}, \frac{1}{7}\right) = (a, b, c) - \left(\frac{10}{7}, \frac{16}{7}, -\frac{13}{7}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\left(\frac{3}{7}, \frac{2}{7}, \frac{1}{7}\right) = \left(a - \frac{10}{7}, b - \frac{16}{7}, c + \frac{13}{7}\right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{7} = a - \frac{10}{7} \\ \frac{2}{7} = b - \frac{16}{7} \\ \frac{1}{7} = c + \frac{13}{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{13}{7} \\ b = \frac{18}{7} \\ c = -\frac{12}{7} \end{cases} \Rightarrow \quad P'\left(\frac{13}{7}, \frac{18}{7}, -\frac{12}{7}\right)$$

**SOLUCIONES Opción B**

## SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

**(a)** Como se trata de una función polinómica, es continua y derivable en todo su dominio, siendo éste el intervalo [2, 6].

La velocidad máxima absoluta puede ser alcanzada, en este caso, o en los máximos relativos (puntos de derivada cero) o en los extremos del intervalo.

$$v(t) = t^3 - 15\,t^2 + 72\,t + 8 \quad \Rightarrow \quad v'(t) = 3\,t^2 - 30\,t + 72$$

$$3\,t^2 - 30\,t + 72 = 0 \quad \Rightarrow \quad t^2 - 10\,t + 24 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{10 \pm \sqrt{100-96}}{2} = \frac{10 \pm 2}{2} = \begin{cases} 6 \\ 4 \end{cases}$$

$$v''(t) = 6\,t - 30$$

$$v''(6) = 6 \cdot 6 - 30 = 6 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{mínimo relativo en } (6, \ )$$

$$v''(4) = 6 \cdot 4 - 30 = -6 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{máximo relativo en } (4, \ )$$

Calculemos ahora el valor de la función en el máximo relativo, 4, y en los extremos del intervalo, en los puntos 2 y 6.

$$v(t) = t^3 - 15\,t^2 + 72\,t + 8$$

$$v(4) = 4^3 - 15 \cdot 4^2 + 72 \cdot 4 + 8 = 120$$

$$v(2) = 2^3 - 15 \cdot 2^2 + 72 \cdot 2 + 8 = 100$$

$$v(6) = 6^3 - 15 \cdot 6^2 + 72 \cdot 6 + 8 = 116$$

La velocidad máxima alcanzada tuvo lugar a las 4 horas.

**(b)** Teniendo en cuenta los resultados del apartado anterior, la hora a la que circulan los coches con menor velocidad es a las 2 horas.

## SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

**(a)** Dibujemos en primer lugar la gráfica de $f(x) = 6 - x^2$ que se corresponde con la de una parábola.

1.- El dominio de la función es $\mathbb{R}$ ya que se trata de una función polinómica.

2.- Puntos de corte con el eje de abscisas. Se resolverá el sistema formado por la función y la ecuación del eje de abscisas, $y = 0$.

$$\left.\begin{aligned} y &= 6 - x^2 \\ y &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad 0 = 6 - x^2 \quad \Rightarrow \quad 0 = \left(\sqrt{6} + x\right)\left(\sqrt{6} - x\right) \quad \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{6} \\ x = -\sqrt{6} \end{cases}$$

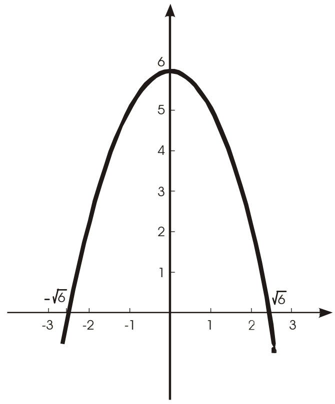
luego los puntos de corte con el eje de abscisas son: $A\left(-\sqrt{6}, 0\right)$ y $B\left(\sqrt{6}, 0\right)$

- Con el eje de ordenadas. Se resolverá el sistema formado por la función y la ecuación del eje de ordenadas, $x = 0$. Basta sustituir $x = 0$ en la función:

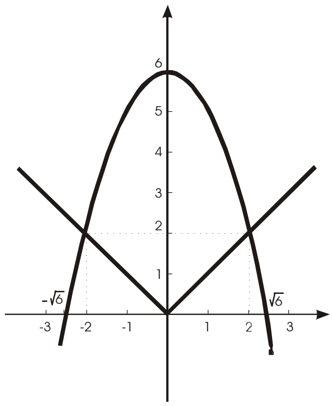
$$y = 6 - x^2 \quad \Rightarrow \quad y = 6 - 0 = 6 \quad \Rightarrow \quad \text{el punto es el } (0, 6).$$

3.- El máximo se encuentra en el punto de abscisa, $\frac{-b}{2a}$, es decir, $\frac{-0}{-2} = 0$, siendo la

ordenada: $y = 6 - x^2 \quad \Rightarrow \quad y = 6 - 0 = 6$, por tanto, el máximo es el punto (0, 6).
La gráfica es la situada al margen.




Representemos ahora la gráfica $g(x) = |x|$, que es la función valor absoluto de $x$, y cuya expresión analítica es:

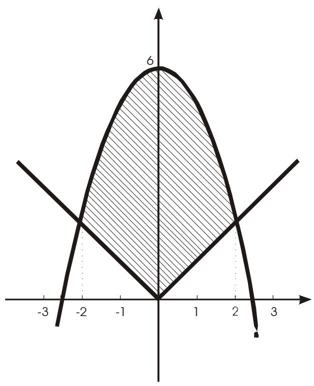



$$g(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \le 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

La gráfica de esta otra función, que se corresponde con las de las rectas bisectrices del segundo y primer cuadrante, la hemos representado junto a la que ya teníamos representada, y se encuentra situada a la izquierda.

Para una mayor precisión y porque los necesitaremos en el apartado siguiente, calculemos los puntos de corte de la primera gráfica con cada uno de los trozos de la gráfica de $g(x)$:

$$\left.\begin{array}{l} y = 6 - x^2 \\ y = -x \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 6 - x^2 = -x \quad \Rightarrow \quad x^2 - x - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{array}{l} \nearrow \ 3 \\ \searrow \ -2 \end{array}$$



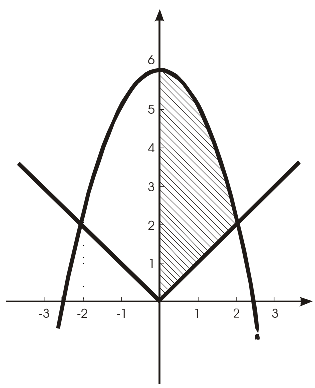

Con el trozo $y=x$ los puntos que obtendríamos serían $x=2$ y $x=-3$. En definitiva los puntos de corte de ambas gráficas son el (-2, 2) y el (2, 2), tal como están representados en la gráfica conjunta.

El recinto limitado por ambas gráficas se corresponde con la zona rayada en la gráfica situada al lado

**(b)** Para calcular el área del recinto anterior, calcularemos el de este otro recinto y el resultado lo multiplicamos por dos.

$$\int_0^2 \left(6 - x^2 - x\right) dx = \left[ 6x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = \left(12 - \frac{8}{3} - \frac{4}{2}\right) - 0 = \frac{22}{3}$$

El área será: $\frac{22}{3} \bullet 2 = \frac{44}{3} \quad u^2$.



## SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

Resolvamos la ecuación matricial: $A^2 \cdot X = 2B$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculemos en primer lugar $A^2$:

$$A^2 = A \bullet A \quad \Rightarrow \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$$

Veamos si esta matriz, $A^2$, que hemos calculado tiene inversa. Lo haremos mediante el método de Gauss, consistente en poner a la derecha de la matriz $A^2$, la matriz unidad e intentar, mediante el uso de diversas transformaciones elementales, que aparezca la matriz unidad a la izquierda, la parte que quede a la derecha es la matriz inversa de $A^2$, $(A^2)^{-1}$.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & 1 & 0 \\ -4 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Diagonalicemos.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = -1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 4 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] + 2 · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & -7 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

Multipliquemos la 1ª y 2ª fila por -1.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \end{array}\right)$$

En la parte de la izquierda hemos obtenido la matriz unidad, por lo que al no salirnos ninguna fila de ceros, la matriz $A^2$ tiene inversa, siendo la matriz inversa la matriz que queda a la derecha, es decir:

$$\left(A^2\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Multipliquemos por la izquierda en cada miembro de la ecuación por la matriz $\left(A^2\right)^{-1}$

$$A^2 \cdot X = 2B \;\Rightarrow\; \left(A^2\right)^{-1} \cdot A^2 \cdot X = \left(A^2\right)^{-1} \cdot 2B \;\Rightarrow\; I \cdot X = \left(A^2\right)^{-1} \cdot 2B \;\Rightarrow\; X = \left(A^2\right)^{-1} \cdot 2B$$

$$X = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \bullet 2 \bullet \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 & -2 & 8 \\ 0 & -6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -2 & 52 \\ 8 & -2 & 30 \end{pmatrix}$$

## SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

Si el punto P(-1, 2, 1) es el más próximo al origen O(0, 0, 0), el vector que determinan ambos puntos es un vector normal al plano.

$$\overrightarrow{OP} = (-1, 2, 1) - (0, 0, 0) = (-1, 2, 1)$$

Como los coeficientes A, B y C de la ecuación general del plano se corresponden con las componentes de un vector normal al plano, tendremos:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad \Rightarrow \quad -x + 2y + z + D = 0$$

Como el punto P es un punto del plano, sus coordenadas verificarán la ecuación del plano:

$$-x + 2y + z + D = 0 \;\Rightarrow\; -(-1) + 2 \cdot 2 + 1 + D = 0 \;\Rightarrow\; D = -6 \;\Rightarrow\; -x + 2y + z - 6 = 0$$

que es la ecuación del plano pedido.

| UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA<br>PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD | L.O.G.S.E.<br>MATEMÁTICAS II |
| --- | --- |

**Instrucciones**: a) **Duración**: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) La puntuación de cada pregunta está indicada en las mismas.
d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
e) Puedes usar calculadora (puede ser programable o tener pantalla gráfica), pero todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

## MODELO 31 DE EXAMEN

### Opción A

**EJERCICIO 1**. Sea $F:\mathbb{R}^{+}\to\mathbb{R}$ la función definida por

$$F(x)=\int_0^x\left(2\,t+\sqrt{t}\,\right)dt\,.$$

**(a)** [1´5 PUNTOS] Determina $F(1)$.
**(b)** [1 PUNTO] Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $F$ en el punto de abscisa $x = 1$

**EJERCICIO 2**. [2´5 PUNTOS] Una empresa quiere fabricar vasos de cristal de forma cilíndrica con una capacidad de 250 centímetros cúbicos. Para utilizar la mínima cantidad posible de cristal, se estudian las medidas apropiadas para que la superficie total del vaso sea mínima. ¿Cuáles deben ser dichas medidas? Justifica la respuesta.

**EJERCICIO 3**. [2´5 PUNTOS] Determina los puntos de la recta de ecuaciones

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+2}{2}$$

que equidistan de los planos de ecuaciones

$$3x + 4y - 1 = 0 \qquad \text{y} \qquad 4x - 3z - 1 = 0$$

**EJERCICIO 4**. Considera el sistema de ecuaciones escrito en forma matricial

$$\begin{pmatrix} b & 1 & b \\ 0 & b & 1 \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

**(a)** [1´5 PUNTOS] Discute el sistema según los valores del parámetro $b$.
**(b)** [1 PUNTO] Resuelve el sistema cuando sea compatible indeterminado.

**Opción B**

**EJERCICIO 1**. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida en la forma

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3-x+\frac{2}{3} & \text{si} \quad x\le -2\\ 0 & \text{si} \quad -2<x\le 1\\ \frac{1}{3}x^3-x+\frac{2}{3} & \text{si} \quad 1<x\end{cases}$$

Estudia la derivabilidad de $f$.

**EJERCICIO 2**. Considera las funciones $f, g : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = 2\,\mathrm{sen}(x), \qquad g(x) = \mathrm{sen}(2x).$$

**(a)** [1 PUNTO] Dibuja la región del plano limitada por las gráficas de $f$ y de $g$.
**(b)** [1´5 PUNTOS] Calcula el área de la región descrita en el apartado anterior.

**EJERCICIO 3**. [2´5 PUNTOS] Halla la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto de intersección de las rectas de ecuaciones respectivas

$$2x - y - 4 = 0 \qquad \text{y} \qquad x - 2y + 3 = 0$$

y es tangente a la recta $x - 3y + 3 = 0$. Calcula el punto de tangencia.

**EJERCICIO 4**. [2´5 PUNTOS] Un mayorista de café dispone de tres tipos de base, Moka, Brasil y Colombia, para preparar tres tipos de mezcla, A, B y C, que envasa en sacos de 60 kg. con los siguientes contenidos en kilos y precios del kilo en euros:

| | Mezcla A | Mezcla B | Mezcla C |
|---|---|---|---|
| Moka | 15 | 30 | 12 |
| Brasil | 30 | 10 | 18 |
| Colombia | 15 | 20 | 30 |
| Precio (cada kg.) | 4 | 4´5 | 4´7 |

Suponiendo que el preparado de las mezclas no supone coste alguno, ¿cuál es el precio de cada uno de los tipos base de café?

**SOLUCIONES Opción A**

## SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

**(a)** Teniendo en cuenta cómo está definida la función $F(x)$, calcularemos su expresión:

$$F(x)=\int_0^x\left(2t+\sqrt{t}\right)dt=\int_0^x\left(2t+t^{1/2}\right)dt=\left[2\frac{t^2}{2}+\frac{t^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right]_0^x=\left[t^2+\frac{2}{3}\,t^{3/2}\right]_0^x=x^2+\frac{2}{3}x^{3/2}$$

Determinemos ahora $F(1)$

$$F(1)=1^2+\frac{2}{3}1^{3/2}=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}.$$

**(b)** La ecuación de la recta tangente a la gráfica de *F(x)* en el punto de abscisa $x$=1 y ordenada $F(1)$ =5/3, es:

$$y - F(1) = F'(1)\cdot(x - 1)$$

Calculemos *F´(x).*

$$F'(x)=2x+\sqrt{x}\quad\Rightarrow\quad F'(1)=2\bullet 1+\sqrt{1}\quad\Rightarrow\quad F'(1)=3$$

La ecuación de la recta tangente será:

$$y-\frac{5}{3}=3\,(x-1)\quad\Rightarrow\quad y=3x-3+\frac{5}{3}\quad\Rightarrow\quad y=3x-\frac{4}{3}$$

## SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

Construyamos la función superficie que queremos minimizar, es decir, la lateral y la de la base del vaso, dicha función será:

$$S(r)=\pi r^2+2\pi r h \qquad [1]$$

donde *r* representa el radio de la base del vaso y *h* la altura del mismo. Expresemos la altura *h* en función de *r*, para lo cual tendremos en cuenta la capacidad del vaso que es de 250 c.c.:

$$V=\pi r^2 h\quad\Rightarrow\quad 250=\pi r^2 h\quad\Rightarrow\quad h=\frac{250}{\pi r^2}$$

Sustituyamos este valor de *h* en la expresión [1]:

$$S(r)=\pi r^2+2\pi r\frac{250}{\pi r^2}\quad\Rightarrow\quad S(r)=\pi r^2+\frac{500}{r}$$

El dominio de esta función superficie es (0, ∞), ya que el radio sólo puede tomar valores estrictamente mayores que cero. En consecuencia la función *S(r)* será continua y derivable en dicho dominio, pues el único valor donde no lo sería es en el cero (valor que anula al denominador), pero éste no pertenece al dominio de definición de la función, y es además el único punto en donde la función derivada tampoco existe.

El mínimo absoluto deberemos buscarlo entre los mínimos relativos:

$$S'(x)=2\pi r-\frac{500}{r^2}\quad\Rightarrow\quad 2\pi r-\frac{500}{r^2}=0\quad\Rightarrow\quad\frac{2\pi r^3-500}{r^2}=0\quad\Rightarrow\quad 2\pi r^3-500=0\quad\Rightarrow$$

$$r^3=\frac{500}{2\pi}\quad\Rightarrow\quad r^3=\frac{250}{\pi}\quad\Rightarrow\quad r=\sqrt[3]{\frac{250}{\pi}}\approx 4'30127$$

Comprobemos si este único valor que anula a la función primera derivada, es un máximo o un mínimo relativo, igualmente estudiaremos la monotonía de la función:

$$S''(x) = 2\pi + \frac{1000}{r^3} \quad \Rightarrow \quad S''(4'30127) = 2\pi + \frac{1000}{4'30127^3} \approx 18'8495559 > 0$$

luego hay un mínimo relativo en (4´30127, 174´3671027). El valor de la ordenada lo hemos obtenido sustituyendo el valor de $r$ = 4´30127 en la función $S(r)$:

$$S(r) = \pi r^2 + \frac{500}{r} \quad \Rightarrow \quad S(4'30127) = \pi\ 4'30127^2 + \frac{500}{4'30127} \approx 174'3671027$$

Para estudiar la monotonía de la función en su dominio, construiremos los dos posibles intervalos de monotonía, el (0, 4´30127) y el (4´30127, ∞), y comprobaremos el comportamiento de la función primera derivada para un valor intermedio de cada uno de estos intervalos:

$S'(1) = 2\pi \bullet 1 - \frac{500}{1^2} \approx -493'71 < 0 \quad \Rightarrow$ la función es decreciente en el intervalo (0, 4´30127).

$S'(10) = 2\pi \bullet 10 - \frac{500}{10^2} \approx 57'83 > 0 \quad \Rightarrow$ la función es creciente en el intervalo (4´30127, ∞).

Teniendo en cuenta todo lo analizado hasta ahora podemos concluir que el máximo relativo es el absoluto, y por tanto, las dimensiones del vaso para que su superficie sea mínima son:

$$r = 4'301270069 \qquad ; \qquad h = \frac{250}{\pi r^2} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{250}{\pi \bullet 4'301270069^2} \approx 4'301270069$$

## SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

Elijamos un punto genérico, P, de la recta; tendrá de coordenadas (1+2λ, -1+3λ, -2+2λ).

Impongamos la condición a este punto de estar a igual distancia de uno y otro plano:

$$\left| \frac{3(1+2\lambda)+4(-1+3\lambda)-1}{\sqrt{3^2+4^2+0^2}} \right| = \left| \frac{4(1+2\lambda)-3(-2+2\lambda)-1}{\sqrt{4^2+0^2+(-3)^2}} \right|$$

$$\left| \frac{3(1+2\lambda)+4(-1+3\lambda)-1}{\sqrt{25}} \right| = \left| \frac{4(1+2\lambda)-3(-2+2\lambda)-1}{\sqrt{25}} \right|$$

$$\left| 3(1+2\lambda)+4(-1+3\lambda)-1 \right| = \left| 4(1+2\lambda)-3(-2+2\lambda)-1 \right|$$

esta última ecuación, al ser en valor absoluto, da lugar a dos ecuaciones:

$$3(1+2\lambda)+4(-1+3\lambda)-1 = 4(1+2\lambda)-3(-2+2\lambda)-1 \qquad [1]$$

$$3(1+2\lambda)+4(-1+3\lambda)-1 = -\left(4(1+2\lambda)-3(-2+2\lambda)-1\right) \qquad [2]$$

Resolvamos la ecuación [1].

$$3+6\lambda-4+12\lambda-1 = 4+8\lambda+6-6\lambda-1 \quad \Rightarrow 16\lambda = 11 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{11}{16}$$

Luego un punto de la recta que esté a igual distancia de ambos planos será el

$$P\left(1+2\bullet\frac{11}{16},\ \ -1+3\bullet\frac{11}{16},\ \ -2+2\bullet\frac{11}{16}\right) \quad \Rightarrow \quad P\left(\frac{19}{8}, \frac{17}{16}, -\frac{5}{8}\right)$$

Resolvamos la ecuación [2]

$$3+6\lambda-4+12\lambda-1=-4-8\lambda-6+6\lambda+1 \quad \Rightarrow 20\lambda=-7 \quad \Rightarrow \quad \lambda=-\frac{7}{20}$$

Luego otro punto de la recta que esté a igual distancia de ambos planos será el

$$Q\left(1-2\bullet\frac{7}{20},\quad -1-3\bullet\frac{7}{20},\quad -2-2\bullet\frac{7}{20}\right) \quad \Rightarrow \quad Q\left(\frac{3}{10},-\frac{41}{20},-\frac{27}{10}\right)$$

## SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

**(a)** Expresemos el sistema en forma matricial para discutirlo mediante el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} b & 1 & b & -2 \\ 0 & b & 1 & 0 \\ 1 & b & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Intercambiemos entre sí las filas 1ª y 3ª.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 1 & -2 \\ 0 & b & 1 & 0 \\ b & 1 & b & -2 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - b · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 1 & -2 \\ 0 & b & 1 & 0 \\ 0 & 1-b^2 & 0 & -2+2b \end{array}\right)$$

Intercambiemos entre sí las columnas 2ª y 3ª, es decir, la de los coeficientes de la *y* y de la *z*

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (x) & (z) & (y) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & b & -2 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1-b^2 & -2+2b \end{array}\right) \end{array}$$

El sistema está triangulado inferiormente, pero no todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero.
El coeficiente $a_{33}$ puede serlo o no. Analicemos los casos que pueden presentarse:

* $a_{33} = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - b^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad b = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$

** Si $b = 1 \quad \Rightarrow$ La 3ª ecuación es 0 = 0, es decir, trivial; la eliminamos. Nos queda un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas, se trata de un sistema compatible indeterminado uniparamétrico.

** Si $b = -1 \quad \Rightarrow$ La 3ª ecuación es 0 = -4, es decir, absurda. El sistema es un sistema incompatible, no tiene solución.

* $a_{33} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad b \neq 1$ y $b \neq -1 \quad \Rightarrow$ El sistema es un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas, es por tanto un sistema compatible determinado.

**(b)** Resolvamos el sistema para el valor de $b = 1$, que es cuando es compatible indeterminado uniparamétrico.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (x) & (z) & (y) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & b & -2 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1-b^2 & -2+2b \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (x) & (z) & (y) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (x) & (z) & (y) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

El sistema que obtenemos al ser de dos ecuaciones y tres incógnitas, nos sobra una incógnita, la $y$, que la pasamos al segundo miembro como incógnita secundaria.

$$\begin{array}{cc} (x) & (z) \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -2-y \\ 0 & 1 & -y \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] - [2ªf.]

$$\begin{array}{cc} (x) & (z) \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -y \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado, la solución es:

$$x = -2 \quad ; \quad z = -y$$

Sustituyamos la incógnita secundaria $y$ por un parámetro $t$, tendremos finalmente:

$$x = -2 \quad ; \quad y = t \quad ; \quad z = -t$$

---

**SOLUCIONES Opción B**

## SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

Para estudiar la derivabilidad de la función *f(x)*, estudiemos previamente su continuidad.

Para que la función $f$ sea continua en un punto, los límites laterales en dicho punto deben coincidir y además coincidir también con el valor de la función en ese punto. Y para que lo sea en un intervalo lo ha de ser en todos los puntos del intervalo.

- El trozo de función para valores de $x$ menores que $-2$, $x < -2$, es una función polinómica, y las funciones polinómicas son continuas en todo $\mathbb{R}$, luego la función $f$ es continua para $x < -2$.

- El trozo de función para valores de $x$ comprendidos entre $-2$ y 1, $-2 < x < 1$, es una función constante, y las funciones constantes son continuas en todo $\mathbb{R}$, luego la función $f$ es continua para $-2 < x < 1$.

- El trozo de función para valores de $x$ mayores que 1, $x > 1$, es una función polinómica, y las funciones polinómicas son continuas en todo $\mathbb{R}$, luego la función $f$ es continua para $x > 1$.

- El problema de la continuidad está en los puntos $-2$ y 1, donde hay un cambio en el comportamiento de la función.

Estudiemos primeramente la continuidad en el punto $-2$.

Calculemos los límites laterales y el valor de la función en dicho punto, para ver si existen y coinciden.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -2^- \\ x < -2}} \left(\frac{1}{3}x^3 - x + \frac{2}{3}\right) = \frac{-8}{3} + 2 + \frac{2}{3} = 0 \\ \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -2^+ \\ x > -2}} 0 = 0 \\ f(-2) = \frac{1}{3}(-2)^3 - (-2) + \frac{2}{3} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^+} f(x) = f(-2) = 0$$

Luego *f(x)* es continua en el punto $-2$.

Estudiemos ahora la continuidad en el punto 1.

Calculemos los límites laterales y el valor de la función en dicho punto, para ver si existen y coinciden.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1^- \\ x<1}} 0 = 0 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1^+ \\ x>1}} \left(\frac{1}{3}x^3 - x + \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3} - 1 + \frac{2}{3} = 0 \\ f(1) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = 0$$

Luego *f(x)* es continua en el punto 1.

En definitiva, la función *f(x)* es continua en ℝ, luego puede ser derivable en su dominio

Estudiemos ahora la derivabilidad..

Una función será derivable en un punto, si las derivadas laterales coinciden. Y para que lo sea en un intervalo lo ha de ser en todos los puntos del intervalo. Pero previamente debe ser continua para poder ser derivable, ya que la no continuidad implica la no derivabilidad; en este caso se ha visto y demostrado que es continua.

- Para valores de $x < -2$, *f* es derivable, por ser una función polinómica, siendo la función derivada, $x^2 - 1$.

- Para valores de $-2 < x < 1$, *f* es derivable, por ser una función constante, siendo la función derivada, 0.

- Para valores de $x > 1$, *f* es derivable, por ser una función polinómica, siendo la función derivada, $x^2 - 1$.

Una primera aproximación de la función derivada, donde ya sabemos que es derivable es

$$f'(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si} \quad x < -2 \\ 0 & \text{si} \quad -2 < x < 1 \\ x^2 - 1 & \text{si} \quad 1 < x \end{cases}$$

- El problema está inicalmente en el punto $-2$.

En el punto $-2$ será derivable, si las derivadas laterales coinciden ya que es continua en dicho punto.

$$\left.\begin{array}{l} f'(-2^-) = \lim\limits_{\substack{x\to -2^- \\ x<-2}} \left(x^2 - 1\right) = 4 - 1 = 3 \\ f'(-2^+) = \lim\limits_{\substack{x\to -2^+ \\ x>-2}} 0 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} 3 \neq 0 \quad \Rightarrow \\ f'(-2^-) \neq f'(-2^+) \end{array}\right.$$

luego la función *f(x)* no es derivable en $x = -2$.

- Estudiemos la derivabilidad en el punto 1.

En el punto 1 será derivable, si las derivadas laterales coinciden, ya que es continua.

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-) = \lim\limits_{\substack{x\to 1^- \\ x<1}} 0 = 0 \\ f'(1^+) = \lim\limits_{\substack{x\to 1^+ \\ x>1}} \left(x^2 - 1\right) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} 0 = 0 \quad \Rightarrow \\ f'(1^-) = f'(1^+) \end{array}\right.$$

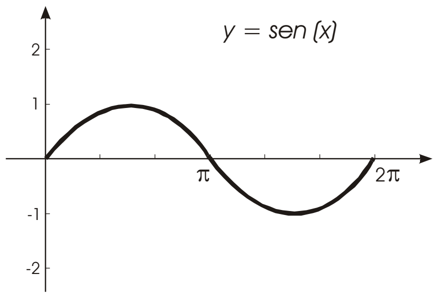
luego la función *f(x)* es derivable en $x = 1$.

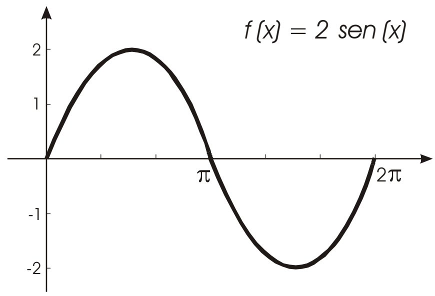
La función derivada quedará finalmente así:

$$f'(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si} \quad x < -2 \\ 0 & \text{si} \quad -2 < x \le 1 \\ x^2 - 1 & \text{si} \quad 1 < x \end{cases}$$

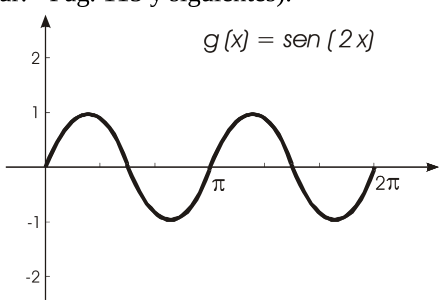
## SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

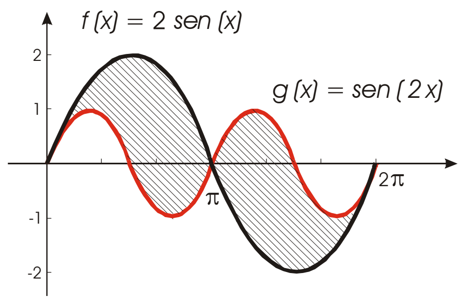
**(a)** La representación de la gráfica *f(x)* = 2 *sen(x)*, en cualquier punto *x* de su dominio, coincide con la de *sen(x)* en el mismo punto pero multiplicando la ordenada de esta función por 2 (*Composición de funciones*.- Fco. Fdez. Morales. - Proyecto Sur. - Pág. 85 y siguientes).




La representación gráfica de *g (x)* = *sen(*2*x)*, tiene la peculiaridad de que la ordenada de esta función en cualquier punto *x* de su dominio, coincide con la ordenada de la función *sen(x)* en el punto de abscisa 2*x*. O dicho de otra manera, los puntos de la gráfica de *g(x)* se obtienen a partir de los puntos de la de *sen(x)*, tomando los puntos medios de los segmentos que unen éstos con el eje OY, perpendicularmente, es decir, la gráfica de *g(x)* se obtiene por una contracción a la mitad de la gráfica de *sen(x)* (*Composición de funciones*.- Fco. Fdez. Morales. - Proyecto Sur. - Pág. 115 y siguientes).




En la última gráfica está representada la región del plano limitada por las gráficas *f* y *g*.

**(b)** Para calcular el área de la región descrita y dibujada en el apartado anterior, construimos la función diferencia, *h(x)* = *g(x)* - *f (x)*, es decir, *h(x)* = *sen(*2*x)* - 2 *sen(x)*, y a continuación calculamos los puntos de corte de esta nueva función con el eje de abscisas:

$sen(2x) - 2\,sen(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad sen(2x) = 2\,sen(x) \quad \Rightarrow \quad 2\,sen(x)\ cos(x) = 2\,sen(x) \quad \Rightarrow$
$2\,sen(x)\ cos(x) - 2\,sen(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\,sen(x)\,[\,cos(x) - 1] = 0 \quad \Rightarrow$

$\nearrow\ sen(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0,\ \ x = \pi,\ \ x = 2\pi.$

$\searrow\ cos(x) - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad cos(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 0,\ \ x = 2\pi.$

Como los puntos de corte de la función diferencia con el eje de abscisas son el 0, π y 2π, y teniendo en cuenta la gráfica realizada, para calcular el área de la región dibujada lo haremos desdoblándola en dos regiones:

$$\text{Área } = \left| \int_0^{\pi} \left( sen(2x) - 2\,sen(x) \right)\, dx \right| + \left| \int_{\pi}^{2\pi} \left( sen(2x) - 2\,sen(x) \right)\, dx \right| =$$

$$= \left| \left[ -\frac{1}{2}\, cos(2x) + 2\,cos(x) \right]_0^{\pi} \right| + \left| \left[ -\frac{1}{2}\, cos(2x) + 2\,cos(x) \right]_{\pi}^{2\pi} \right| =$$

$$= \left| -\frac{1}{2} cos(2\pi) + 2\,cos(\pi) - \left( -\frac{1}{2}\, cos(0) + 2\,cos(0) \right) \right| +$$

$$+ \left| -\frac{1}{2} cos(4\pi) + 2\,cos(2\pi) - \left( -\frac{1}{2}\, cos(2\pi) + 2\,cos(\pi) \right) \right| =$$

$$= \left| -\frac{1}{2} + 2(-1) - \left( -\frac{1}{2} + 2 \right) \right| + \left| -\frac{1}{2} + 2 - \left( -\frac{1}{2} + 2(-1) \right) \right| = |-4| + |4| = 8\ u^2.$$

## **SOLUCIÓN** EJERCICIO 3.-

Calculemos en primer lugar el centro de la circunferencia, resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de las dos rectas:

$$\left. \begin{array}{l} 2x - y = \ \ 4 \\ x - 2y = -3 \end{array} \right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo mediante el método de reducción de Gauss - Jordan

$$\left( \begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{array} \right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 2 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 2 · [1ªf.].

$$\left( \begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & -10 \end{array} \right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -3 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: 3 · [1ªf.] - [2ªf.].

$$\left( \begin{array}{cc|c} 6 & 0 & 22 \\ 0 & -3 & -10 \end{array} \right)$$

El sistema está diagonalizado, la solución es:
$6x = 22 \quad ; \quad -3y = -10$, es decir, $x = 11/3 \quad ; \quad y = 10/3$

Luego las coordenadas del centro de la circunferencia son:

$$C = \left( \frac{11}{3}, \frac{10}{3} \right)$$

Calculemos ahora el radio, que coincidirá con la distancia del centro C a la recta tangente $x - 3y + 3 = 0$. Expresemos esta recta tangente en forma paramétrica, para ello resolveríamos un sistema de una ecuación con dos incógnitas, la solución serían las ecuaciones paramétricas, aunque en este caso basta despejar una incógnita en función de la otra, y a ésta denominarla como un parámetro *t*:

$$x = -3 + 3y \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = -3+3t \\ y = t \end{cases}$$

Llamemos H al punto de tangencia, punto que tendrá de coordenadas, $(-3+3t,\ t)$. Se verificará que el vector que determinan los puntos C y H, $\overrightarrow{CH}$, y cuyas coordenadas son

$$\overrightarrow{CH} = (-3+3t,\ t) - \left(\frac{11}{3},\ \frac{10}{3}\right) = \left(-3+3t-\frac{11}{3},\ t-\frac{10}{3}\right) = \left(3t-\frac{20}{3},\quad t-\frac{10}{3}\right)$$

es perpendicular al vector de dirección, $\vec{v}\,(3,\ 1)$, de la recta tangente, es decir:

$$\overrightarrow{CH} \perp \vec{v} \ \Rightarrow\ \overrightarrow{CH} \bullet \vec{v} = 0 \ \Rightarrow\ \left(3t-\frac{20}{3},\ t-\frac{10}{3}\right) \bullet (3, 1) = 0 \ \Rightarrow\ 9t-20+t-\frac{10}{3} = 0 \ \Rightarrow\ t = \frac{7}{3}$$

Luego el vector $\overrightarrow{CH}$, será:

$$\overrightarrow{CH} = \left(3t-\frac{20}{3},\ t-\frac{10}{3}\right) = \left(\frac{21}{3}-\frac{20}{3},\quad \frac{7}{3}-\frac{10}{3}\right) = \left(\frac{1}{3},\ -1\right)$$

El radio, r, de la circunferencia es:

$$r = dist\,(C, H) = \left|\overrightarrow{CH}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{\frac{1}{9}+1} = \sqrt{\frac{10}{9}} = \frac{\sqrt{10}}{3}$$

La ecuación de la circunferencia es:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 - \frac{22}{3}x - \frac{20}{3}y + \left(\frac{11}{3}\right)^2 + \left(\frac{10}{3}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 - \frac{22}{3}x - \frac{20}{3}y + \frac{211}{9} = 0$$

Finalmente el punto de tangencia es:

$$H = \left(-3+3t,\ t\right) = \left(-3+\frac{21}{3},\ \frac{7}{3}\right) = \left(4,\ \frac{7}{3}\right)$$

## **SOLUCIÓN** EJERCICIO 4.-

Llamemos *x* al precio en euros del kilo de Moka, *y* al de Brasil y *z* al de Colombia.

Teniendo en cuenta la tabla, obtendremos tres ecuaciones, correspondientes a cada una de las mezclas:

$$\left.\begin{array}{l} 15x+30y+15z = 4\times 60 \\ 30x+10y+20z = 4'5\times 60 \\ 12x+18y+30z = 4'7\times 60 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 15x+30y+15z = 240 \\ 30x+10y+20z = 270 \\ 12x+18y+30z = 282 \end{array}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo mediante el método de reducción de Gauss - Jordan

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 15 & 30 & 15 & 240 \\ 30 & 10 & 20 & 270 \\ 12 & 18 & 30 & 282 \end{array}\right)$$

Simplifiquemos la 1ª fila por 15.
Simplifiquemos la 2ª fila por 10.
Simplifiquemos la 3ª fila por 6.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 16 \\ 3 & 1 & 2 & 27 \\ 2 & 3 & 5 & 47 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 3 · [1ªf.].
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - 2 · [1ªf.].

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 16 \\ 0 & -5 & -1 & -21 \\ 0 & -1 & 3 & 15 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -5 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: $-5 \cdot [3^a f.] + [2^a f.]$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 16 \\ 0 & -5 & -1 & -21 \\ 0 & 0 & -16 & -96 \end{array}\right)$$

Simplifiquemos la 3ª fila por $-16$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 16 \\ 0 & -5 & -1 & -21 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: $[2^a f.] + [3^a f.]$.
Sustituyamos la 1ª fila por: $[1^a f.] - [3^a f.]$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 10 \\ 0 & -5 & 0 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

Simplifiquemos la 2ª fila por $-5$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: $[1^a f.] - 2 \cdot [2^a f.]$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado, la solución es:

$$x = 4 \quad ; \quad y = 3 \quad ; \quad z = 6$$

El precio del kilo de Moka es de 4 euros, el de Brasil es de 3 euros, y el de Colombia, 6 euros.

| UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA<br>PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD | L.O.G.S.E.<br>MATEMÁTICAS II |
|---|---|

**Instrucciones**: a) **Duración**: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) La puntuación de cada pregunta está indicada en las mismas.
d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
e) Puedes usar calculadora (puede ser programable o tener pantalla gráfica), pero todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

## MODELO 32 DE EXAMEN

### Opción A

**EJERCICIO 1**. **(a)** [1´25 PUNTOS]. Determina el valor de las constantes $a$ y $b$ sabiendo que la gráfica de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases} e^{-x} & \text{si } x\le 0 \\ ax+b & \text{si } x>0 \end{cases}$ admite recta tangente en el punto (0,1).

**(b)** [1´25 PUNTOS]. ¿Existen constantes $c$ y $d$ para las cuales la gráfica de la función $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $g(x)=\begin{cases} e^{-x} & \text{si } x\le 0 \\ cx^2+d & \text{si } x>0 \end{cases}$ admite recta tangente en el punto (0, 1)? (Justifica la respuesta)

**EJERCICIO 2**. Calcula

**(a)** [1´25 PUNTOS]. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$ **(b)** [1´25 PUNTOS]. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2 e^{-3x}$

**EJERCICIO 3**. [2´5 PUNTOS]. Determina la matriz $X$ tal que $AX - 3B = 0$, siendo

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

**EJERCICIO 4**. [2´5 PUNTOS]. Halla las coordenadas del punto simétrico de A(0, -1, 1) con respecto a la recta

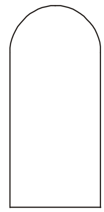
$$\frac{x-5}{2}=y=\frac{z-2}{3}.$$

**Opción B**

**EJERCICIO 1**. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=-2x^3-9x^2-12x$ .

**(a)** [1 PUNTO]. Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*.

**(b)** [1´5 PUNTOS]. Determina los extremos relativos α y β de *f* con α < β, y calcula $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$.



**EJERCICIO 2**. [2´5 PUNTOS]. Determina las dimensiones de una puerta formada por un rectángulo y un semicírculo (como en la figura), sabiendo que es la que tiene perímetro mínimo entre las que tienen área igual a 2 m$^2$.

**EJERCICIO 3**. Considera la matriz $A=\begin{pmatrix}1&0&-2\\1&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}$

**(a)** [1´5 PUNTOS]. Calcula el determinante de las matrices: 2A, $A^{31}$ y $\left(A^{31}\right)^{-1}$ .

**(b)** [1 PUNTO]. Halla la matriz $A^{-1}$

**EJERCICIO 4**. [2´5 PUNTOS]. Halla el punto de la recta $x=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-3}{-1}$ que equidista del punto A(1, 2, 1) y del origen de coordenadas.

---

**SOLUCIONES Opción A**

## SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

**(a)** Si la gráfica de *f(x)* admite recta tangente en (0, 1), es que es derivable en $x = 0$. Por tanto previamente ha de ser continua. Veámoslo.

Para que la función *f* sea continua en un punto, los límites laterales en dicho punto deben coincidir y además coincidir también con el valor de la función en ese punto. Y para que lo sea en un intervalo lo ha de ser en todos los puntos del intervalo.

- El trozo de función para valores de *x* menores que 0, $x<0$, es una función exponencial, que es continua en todo $\mathbb{R}$; luego la función *f* es continua para $x<0$.

- El trozo de función para valores de *x* mayores que 0, $x > 0$, es una función polinómica, y las funciones polinómicas son continuas en todo $\mathbb{R}$, luego la función *f* es continua para $x>0$.

- El problema de la continuidad está en el punto 0, donde hay un cambio en el comportamiento de la función. Estudiemos la continuidad en el punto 0.

Calculemos los límites laterales y el valor de la función en dicho punto, para ver si existen y coinciden.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0^- \\ x<0}} e^{-x} = e^{-0} = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0^+ \\ x>0}} (ax+b) = b \\ f(0) = e^{-0} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \quad \Rightarrow \\ \qquad\qquad b = 1 \end{array}\right.$$

Luego *f(x)* es continua en el punto 0 si $b = 1$.

En definitiva, la función *f(x)* es continua en $\mathbb{R}$ siempre que $b = 1$.

Estudiemos ahora la derivabilidad.

Una función será derivable en un punto, si las derivadas laterales coinciden. Y para que lo sea en un intervalo lo ha de ser en todos los puntos del intervalo. Pero previamente debe ser continua para poder ser derivable, ya que la no continuidad implica la no derivabilidad; en nuestro caso se ha visto y demostrado que es continua en su dominio, siempre que $b$=1.

- Para valores de $x < 0$, $f$ es derivable por ser una función exponencial elemental, que es derivable en todo $\mathbb{R}$, siendo la función derivada, $-e^{-x}$.

- Para valores de $x > 0$, $f$ es derivable, por ser una función polinómica, siendo la función derivada, $a$.

Una primera aproximación de la función derivada, donde ya sabemos que es derivable es

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & \text{si} \quad x < 0 \\ a & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

- El problema está inicalmente en el punto 0.

En el punto 0 será derivable, si las derivadas laterales coinciden ya que es continua en dicho punto.

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = \lim\limits_{\substack{x\to 0^- \\ x\,<\,0}} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \left(-e^{-x}\right) = -e^{-0} = -1 \\ f'(0^+) = \lim\limits_{\substack{x\to 0^- \\ x\,<\,0}} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} a = a \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f'(0^-) = f'(0^+) \quad \Rightarrow \\ \qquad -1 = a \end{array}\right.$$

luego la función *f(x)* es derivable en $x = 0$ si $a = -1$ y $b = 1$.

La función derivada quedará finalmente así:

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & \text{si} \quad x \le 0 \\ -1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

En consecuencia la gráfica de la función *f(x)* admite recta tangente en el punto (0, 1), para el valor de $a = -1$ y $b = 1$.

**(b)** Si la gráfica de *g(x)* admite recta tangente en (0, 1), es que es derivable en $x = 0$. Por tanto previamente ha de ser continua. Veámoslo.

Para que la función $g$ sea continua en un punto, los límites laterales en dicho punto deben coincidir y además coincidir también con el valor de la función en ese punto. Y para que lo sea en un intervalo lo ha de ser en todos los puntos del intervalo.

- El trozo de función para valores de $x$ menores que 0, $x < 0$, es una función exponencial, que es continua en todo $\mathbb{R}$; luego la función $g$ es continua para $x < 0$.

- El trozo de función para valores de $x$ mayores que 0, $x > 0$, es una función polinómica, y las funciones polinómicas son continuas en $\mathbb{R}$, luego la función $g$ es continua para $x > 0$.

- El problema de la continuidad está en el punto 0, donde hay un cambio en el comportamiento de la función. Estudiemos la continuidad en el punto 0.

Calculemos los límites laterales y el valor de la función en dicho punto, para ver si existen y coinciden.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0^- \\ x<0}} e^{-x} = e^{-0} = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0^+ \\ x>0}} (cx^2 + d) = d \\ g(0) = e^{-0} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = g(0) \quad \Rightarrow \\ \\ \qquad\qquad d = 1 \end{array}\right.$$

Luego $g(x)$ es continua en el punto 0 si $d = 1$.

En definitiva, la función $g(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ siempre que $d = 1$.

Estudiemos ahora la derivabilidad.

Una función será derivable en un punto, si las derivadas laterales coinciden. Y para que lo sea en un intervalo lo ha de ser en todos los puntos del intervalo. Pero previamente debe ser continua para poder ser derivable, ya que la no continuidad implica la no derivabilidad; en nuestro caso se ha visto y demostrado que es continua en su dominio, siempre que $d=1$.

- Para valores de $x < 0$, $g$ es derivable por ser una función exponencial elemental, que es derivable en todo $\mathbb{R}$, siendo la función derivada, $-e^{-x}$.

- Para valores de $x > 0$, $g$ es derivable, por ser una función polinómica, siendo la función derivada, $2cx$.

Una primera aproximación de la función derivada, donde ya sabemos que es derivable es

$$g'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & \text{si} \quad x < 0 \\ 2cx & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

- El problema está inicalmente en el punto 0.

En el punto 0 será derivable, si las derivadas laterales coinciden ya que es continua en dicho punto.

$$\left.\begin{array}{l} g'(0^-) = \lim\limits_{\substack{x\to 0^- \\ x<0}} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \left(-e^{-x}\right) = -e^{-0} = -1 \\ g'(0^+) = \lim\limits_{\substack{x\to 0^- \\ x<0}} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} 2cx = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} -1 \neq 0 \quad \Rightarrow \\ \\ f'(0^-) \neq f'(0^+) \end{array}\right.$$

luego la función $g(x)$ no es derivable en $x = 0$.

En consecuencia la gráfica de la función $g(x)$ no admite recta tangente en el punto (0, 1), ya que no existe ningún valor de $c$ que haga que las derivadas laterales en $x = 0$ coincidan, a pesar de ser continua en dicho punto para $d = 1$.

## SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

**(a)** Calculemos el siguiente límite.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2} = \frac{1-\sqrt{1-0}}{0} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}$$

La indeterminación de $\left[\frac{0}{0}\right]$ se ha destruido utilizando la Regla de L´Hôpital, que consiste en derivar el numerador y denominador independientemente el uno del otro.

**(b)** Calculemos el siguiente límite.

$$\lim_{x\to +\infty} \left(x^2 e^{-3x}\right) = \infty \bullet e^{-\infty} = \infty \bullet \frac{1}{e^{\infty}} = [\infty \bullet 0] = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{e^{3x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to +\infty} \frac{2x}{3e^{3x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{2}{9e^{3x}} = \frac{2}{\infty} = 0$$

La indeterminación de $\infty \cdot 0$ se ha destruido transformándola en otra de $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

La indeterminación de $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ se ha destruido utilizando la Regla de L´Hôpital, que consiste en derivar el numerador y denominador independientemente el uno del otro.

## SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

Resolvamos la ecuación matricial $AX - 3B = 0$.

$$AX - 3B = 0 \quad \Rightarrow \quad AX = 3B \quad \Rightarrow$$

si la matriz A tiene inversa podremos multiplicar a la izquierda por dicha inversa, $A^{-1}$,

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}(3B) \quad \Rightarrow \quad (A^{-1}A)X = 3A^{-1}B \quad \Rightarrow \quad IX = 3A^{-1}B \quad \Rightarrow \quad X = 3A^{-1}B.$$

Calculemos la inversa de A, si es que tiene, mediante el método de Gauss, consistente en poner a la derecha de la matriz A, la matriz unidad e intentar que aparezca, mediante el uso de diversas transformaciones elementales, la matriz unidad a la izquierda, la parte que quede a la derecha es la matriz inversa de A, $A^{-1}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Diagonalicemos.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 2 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 3 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: 3 · [3ªf.] - [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = -1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 5 · [3ªf.]
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] - [3ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & -12 & 6 & -15 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

Simplifiquemos la 2ª fila por 3.
Simplifiquemos la 3ª fila por -1.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

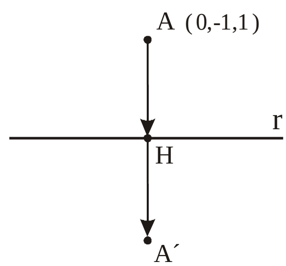
En la parte de la izquierda hemos obtenido la matriz unidad, por lo que al no salirnos ninguna fila de ceros, la matriz A tiene inversa, siendo la matriz inversa la matriz que queda a la derecha, es decir:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ -4 & 2 & -5 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Calculemos, finalmente, la matriz *X*.

$$X = 3 \cdot A^{-1}\, B = 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ -4 & 2 & -5 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 4 & -13 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -15 \\ 12 & -39 \\ 9 & -21 \end{pmatrix}$$

## SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-




Para obtener el simétrico del punto A respecto de la recta *r*, A´(a, b, c), tendremos que calcular un punto H de la recta de tal manera que el vector $\overrightarrow{AH}$ sea perpendicular al vector de dirección de la recta y además $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{HA'}$.

La ecuación de la recta *r* en forma paramétrica es:

$$r \equiv \begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$$

El punto genérico, H, tendrá de coordenadas H(5+2*t*, *t*, 2+3*t*) y el vector $\overrightarrow{AH}$:

$$\overrightarrow{AH} = (5+2t,\ t,\ 2+3t) - (0,\ -1,\ 1) = (5+2t,\ t+1,\ 1+3t)$$

Apliquemos la condición de que $\overrightarrow{AH}$ es perpendicular al vector de dirección de la recta:

$$\overrightarrow{AH} \perp \vec{v}_r \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AH} \cdot \vec{v}_r = 0 \quad \Rightarrow \quad (5+2t,\ \ t+1,\ \ 1+3t) \cdot (2,\ 1,\ 3) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$10 + 4t + t + 1 + 3 + 9t = 0 \quad \Rightarrow \quad 14t = -14 \quad \Rightarrow \quad t = -1$$

Luego el vector $\overrightarrow{AH}$ tendrá de coordenadas:

$$\overrightarrow{AH} = (5+2t,\ t+1,\ 1+3t) = (5-2,\ -1+1,\ 1-3) = (3,\ 0,\ -2)$$

y el punto H:

$$H\,(5+2t,\ t,\ 2+3t) \ \Rightarrow \ H(5-2,\ -1,\ 2-3) \ \Rightarrow \ H(3,\ -1,\ -1).$$

Impongamos la última condición $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{HA'}$

$$(3,\ 0,\ -2) = (a,\ b,\ c) - (3,\ -1,\ -1) \quad \Rightarrow \begin{cases} 3 = a - 3 \ \Rightarrow \ a = 6 \\ 0 = b + 1 \ \Rightarrow \ b = -1 \\ -2 = c + 1 \ \Rightarrow \ c = -3 \end{cases} \Rightarrow \quad A'\,(6,\ -1,\ -3)$$

**SOLUCIONES Opción B**

## SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

**(a)** Determinemos los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*. Hallemos los valores que anulen a la función primera derivada de *f(x)*.

$f(x) = -2x^3 - 9x^2 - 12x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -6x^2 - 18x - 12 \quad \Rightarrow \quad -6x^2 - 18x - 12 = 0 \quad \Rightarrow$

$-x^2 - 3x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \dfrac{-3 \pm 1}{2} = \begin{cases} -1 \\ -2 \end{cases}$

Con estos dos puntos, $-2$ y $-1$, construimos los posibles intervalos de monotonía:

$$(-\infty, -2), (-2, -1) \text{ y } (-1, +\infty)$$

Sustituyamos un valor intermedio de cada uno de los intervalos, por ejemplo, $-3$, $-1'5$ y 0, respectivamente, en la función primera derivada y según nos salga mayor o menor que cero, en el intervalo correspondiente la función será creciente o decreciente:

$$\begin{cases} f'(-3) = -6(-3)^2 - 18(-3) - 12 = -12 < 0 & \Rightarrow \text{ decreciente en } (-\infty,\ -2) \\ f'(-1'5) = -6(-1'5)^2 - 18(-1'5) - 12 = 1'5 > 0 & \Rightarrow \text{ creciente en } (-2\ \ -1) \\ f'(0) = -6 \bullet 0^2 - 18 \bullet 0 - 12 = -12 < 0 & \Rightarrow \text{ decreciente en } (-1,\ \infty) \end{cases}$$

**(b)** Determinemos los extremos relativos o locales. Éstos sólo se podrán localizar en los puntos de derivada cero, ya que la función es continua y derivable en todo su dominio que es $\mathbb{R}$ por tratarse de una función polinómica.

Teniendo en cuenta lo analizado en el apartado anterior podemos asegurar que hay un mínimo local en $x = -2$, y un máximo local en $x = -1$.

Las ordenadas de estos extremos son:

$f(-2) = -2(-2)^3 - 9(-2)^2 - 12(-2) = 4 \quad \Rightarrow \quad$ Mínimo en $(-2, 4)$.

$f(-1) = -2(-1)^3 - 9(-1)^2 - 12(-1) = 5 \quad \Rightarrow \quad$ Máximo en $(-1, 5)$.

Como los extremos relativos son $-2$ y $-1$, es decir, $\alpha$ y $\beta$, con $\alpha < \beta$, luego $\alpha = -2$ y $\beta = -1$.

Calculemos ahora la integral definida:

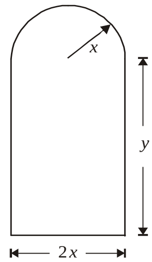
$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_{-2}^{-1} \left(-2x^3 - 9x^2 - 12x\right) dx = \left[\frac{-2x^4}{4} - \frac{9x^3}{3} - \frac{12x^2}{2}\right]_{-2}^{-1} = \left[\frac{-x^4}{2} - 3x^3 - 6x^2\right]_{-2}^{-1} =$$

$$= \left[\frac{-x^4}{2} - 3x^3 - 6x^2\right]_{-2}^{-1} = \left(\frac{-(-1)^4}{2} - 3(-1)^3 - 6(-1)^2\right) - \left(\frac{-(-2)^4}{2} - 3(-2)^3 - 6(-2)^2\right) = \frac{9}{2}$$

## SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

Construyamos la función perímetro, que es de la que me piden el mínimo; tomando como variable independiente el radio del semicírculo.

$$P(x) = 2x + 2y + \pi x \qquad [1]$$




Busquemos la relación existente entre la *x* y la *y*, es decir, la condición que nos da el problema y es que el área es 2:

$2\,x\,y+\dfrac{\pi\,x^2}{2}=2$ . Despejemos $y$ en función de la $x$

$$y=\frac{2-\dfrac{\pi\,x^2}{2}}{2x}\quad\Rightarrow\quad y=\frac{4-\pi\,x^2}{4\,x}$$ Sustituyamos este valor de *y* en [1]

$$P(x)=2x+2\,\frac{4-\pi x^2}{4x}+\pi x\quad\Rightarrow\quad P(x)=2x+\frac{4-\pi x^2}{2x}+\pi x$$

Calculemos el dominio de esa función. De entrada, los valores de *x* tendrán que ser mayores que cero, es decir, estrictamente positivos. Pero como los valores que puede tomar *y* son también mayores que cero, observando la relación entre *x* e *y*, deducimos que $4-\pi x^2$ también tiene que ser mayor que cero, luego:

$$4-\pi\,x^2>0\quad\Rightarrow\quad-\pi\,x^2>-4\quad\Rightarrow\quad x^2<\frac{4}{\pi}\quad\Rightarrow\quad-\sqrt{\frac{4}{\pi}}<x<\sqrt{\frac{4}{\pi}}$$

En definitiva, el dominio de *P(x)* serán los valores del intervalo $\left(0,\ \sqrt{\dfrac{4}{\pi}}\right)$.

La función es continua y derivable en este dominio, ya que se trata de la suma de funciones polinómicas, $2x$ y $\pi x$, y de una función racional que donde únicamente no existe es en el cero, pero este valor no pertenece al dominio de *P(x)*.

Calculemos los mínimos relativos o locales. Obtengamos la función primera derivada.

$$P'(x)=2+\frac{-2\pi\,x\bullet 2x-2\left(4-\pi\,x^2\right)}{4x^2}+\pi\quad\Rightarrow\quad P'(x)=\frac{8x^2-4\pi\,x^2-8+2\pi\,x^2+4\pi\,x^2}{4x^2}$$

$$P'(x)=\frac{(8+2\pi)\,x^2-8}{4x^2}\quad\Rightarrow\quad P'(x)=\frac{(4+\pi)\,x^2-4}{2x^2}$$

Calculemos los valores que anulan a la primera derivada.

$$\frac{(4+\pi)\,x^2-4}{2x^2}=0\quad\Rightarrow\quad(4+\pi)\,x^2-4=0\quad\Rightarrow\quad x^2=\frac{4}{4+\pi}\quad\Rightarrow\quad x=\pm\sqrt{\frac{4}{4+\pi}}$$

El único valor que anula a la derivada y pertenece al dominio es el $x=\sqrt{\dfrac{4}{4+\pi}}$ .

Comprobemos que es el mínimo relativo y absoluto, para lo cual estudiamos la monotonía.

Construimos los dos intervalos posibles de monotonía: $\left(0,\ \sqrt{\dfrac{4}{4+\pi}}\right)$ y $\left(\sqrt{\dfrac{4}{4+\pi}},\ \sqrt{\dfrac{4}{\pi}}\right)$.

Sustituyamos un valor intermedio de cada uno de los intervalos, por ejemplo, 0´1 y 1, respectivamente, en la función primera derivada y según nos salga mayor o menor que cero, en el intervalo correspondiente la función será creciente o decreciente:

$$P'(0'1)=\frac{(4+\pi)\ (0'1)^2-4}{2\,(0'1)^2}=-196'429<0\quad\Rightarrow\quad\text{Decreciente en }\left(0,\ \sqrt{\frac{4}{4+\pi}}\right).$$

$$P'(1)=\frac{(4+\pi)\bullet 1^2-4}{2\bullet 1^2}=1'57079>0\quad\Rightarrow\quad\text{Creciente en }\left(\sqrt{\frac{4}{4+\pi}},\ \sqrt{\frac{4}{\pi}}\right).$$

A la vista de todo lo anterior, el valor que anulaba a la primera derivada no sólo es mínimo relativo sino también mínimo absoluto. En definitiva las dimensiones de la puerta son:

* Radio del semicírculo, $x=\sqrt{\dfrac{4}{4+\pi}} \quad \Rightarrow \quad x=\dfrac{2\sqrt{4+\pi}}{4+\pi}$

* Base del rectángulo, $2x=2\bullet\sqrt{\dfrac{4}{4+\pi}} \quad \Rightarrow \quad 2x=\dfrac{4\sqrt{4+\pi}}{4+\pi}$

* Altura del rectángulo, $y=\dfrac{4-\pi x^2}{4x} \quad \Rightarrow \quad y=\dfrac{4-\pi\left(\sqrt{\dfrac{4}{4+\pi}}\right)^2}{4\sqrt{\dfrac{4}{4+\pi}}} \quad \Rightarrow \quad y=\dfrac{4-\dfrac{4\pi}{4+\pi}}{4\sqrt{\dfrac{4}{4+\pi}}} \quad \Rightarrow$

$$y=\dfrac{\dfrac{16}{4+\pi}}{\dfrac{8}{\sqrt{4+\pi}}} \quad \Rightarrow \quad y=\dfrac{2\sqrt{4+\pi}}{4+\pi}$$

La longitud del radio del semicírculo y la de la altura del rectángulo es la misma. La base del rectángulo es doble que la altura del mismo.

## SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

**(a)** Calculemos, en primer lugar, el determinante de la matriz A

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0+0-2-(-2+1+0) = -1$$

Calculemos ahora el determinante de la matriz 2A.

$$\left|2\,\mathrm{A}\right| = 2^3\bullet \mathrm{A} = 8\bullet(-1) = -8$$

El resultado anterior está basado en la propiedad de la multiplicación de un número por una matriz, que dice: *"que para multiplicar una matriz por un número hay que multiplicar todos los elementos de la matriz por dicho número"*; y en la propiedad de la multiplicación de un número por un determinante que dice: "*si multiplicamos los elementos de una fila o columna de un determinante por un número, el determinante queda multiplicado por dicho número"* , o bien *"que para multiplicar un determinante por un número basta multiplicar una fila o una columna del determinante por dicho número"*. Por tanto, al multiplicar por 2 la matriz cuadrada A, de orden tres, todos los elementos de A quedan multiplicados por 2, esto implica que en el determinante asociado correspondiente lo que realmente hemos hecho es multiplicar por dos las tres filas o columnas del mismo con lo que el determinante queda multiplicado por $2^3$.

Calculemos ahora el determinante de la matriz $\mathrm{A}^{31}$.

$$\left|\mathrm{A}^{31}\right| = \left|\mathrm{A}\right|^{31} = (-1)^{31} = -1$$

El resultado anterior está basado en la siguiente propiedad: "*el determinante de un producto de matrices cuadradas es igual al producto de los determinantes de cada una de las matrices*". En este caso al ¨tratarse de la misma matriz, la propiedad se transforma en esta otra: "*el determinante de la potencia de una matriz es igual al determinante de la matriz elevado a dicha potencia".*

Calculemos, finalmente el determinante de la matriz $\left(A^{31}\right)^{-1}$.

$$\left|\left(A^{31}\right)^{-1}\right| = \left|\left(A^{-1}\right)^{31}\right| = \left(\left|A^{-1}\right|\right)^{31} = \left(\frac{1}{|A|}\right)^{31} = \left(\frac{1}{-1}\right)^{31} = -1$$

Nos hemos basado en las propiedades siguientes: "*la inversa del producto de dos matrices cuadradas es igual al producto de las inversas en orden inverso*", pero en este caso al tratarse de la misma matriz se transforma en esta otra: "*la inversa de la potencia de una matriz cuadrada es igual a la potencia de la inversa de dicha matriz*"; también hemos hecho uso de esta otra: "*el determinante de la potencia de una matriz es igual al determinante de la matriz elevado a dicha potencia*"; y por último, de la propiedad que dice que: "*el determinante de una matriz cuadrada invertible es igual al inverso del determinante de la matriz inversa*".

**(b)** Calculemos la matriz inversa de A mediante el método de Gauss, consistente en poner a la derecha de la matriz A, la matriz unidad e intentar que aparezca, mediante el uso de diversas transformaciones elementales, la matriz unidad a la izquierda, la parte que quede a la derecha es la matriz inversa de A, $A^{-1}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Diagonalicemos.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = -1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] + 3 · [3ªf.]
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] - 2 · [3ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Multipliquemos la 3ª fila por -1.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

En la parte de la izquierda hemos obtenido la matriz unidad, por lo que la matriz A tiene inversa, siendo la matriz inversa la matriz que queda a la derecha, es decir:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

## SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

Expresemos la ecuación de la recta en forma paramétrica ya que viene dada en forma continua.

$$x = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-1} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = t \\ y = -2+2t \\ z = 3-t \end{cases}$$

Un punto genérico H de la recta tendrá de coordenadas H ($t$, -2+2$t$, 3-$t$). Impongamos a este punto la condición de estar a igual distancia de A(1, 2, 1) que del origen de coordenadas, O(0, 0, 0).

dist (H, A) = dist (H, O)

$$\sqrt{(t-1)^2+(-2+2t-2)^2+(3-t-1)^2} = \sqrt{t^2+(-2+2t)^2+(3-t)^2}$$

$$(t-1)^2+(-4+2t)^2+(2-t)^2 = t^2+(-2+2t)^2+(3-t)^2$$

$$t^2+1-2t+16+4t^2-16t+4+t^2-4t = t^2+4+4t^2-8t+9+t^2-6t$$

$$6t^2-22t+21 = 6t^2-14t+13$$

$$8 = 8t \quad \Rightarrow \quad t = 1$$

Luego el punto H de la recta que equidista de A y de O es:

H ($t$, -2+2$t$, 3-$t$) ⇒ H (1, -2+2·1, 3-1) ⇒ H (1, 0, 2)

| UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA<br>PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD | L.O.G.S.E.<br>MATEMÁTICAS II |
|---|---|

**Instrucciones**: a) **Duración**: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) La puntuación de cada pregunta está indicada en las mismas.
d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
e) Puedes usar calculadora (puede ser programable o tener pantalla gráfica), pero todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

## MODELO 33 DE EXAMEN

**Opción A**

**EJERCICIO 1**. [2´5 PUNTOS]. Calcula $\lim_{x\to 0} \dfrac{(e^x - 1)\operatorname{sen} x}{x^3 - x^2}$

**EJERCICIO 2**. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \left| x^2 - 1 \right|$

**(a)** [0´5 PUNTOS]. Esboza la gráfica de $f$.

**(b)** [1 PUNTO]. Estudia la derivabilidad de $f$.

**(c)** [1 PUNTO]. Calcula $\int_0^2 f(x)\, dx$.

**EJERCICIO 3**. Se sabe que la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 0 & -a \\ 0 & -1 & 0 \\ b & 0 & b \end{pmatrix}$ verifica que det (A)=1 y sus columnas son vectores perpendiculares dos a dos.

**(a)** [1´5 PUNTOS]. Calcula los valores de $a$ y $b$.

**(b)** [1 PUNTO]. Comprueba que para dichos valores se verifica que $A^{-1} = A^t$ donde $A^t$ denota la matriz traspuesta de A.

**EJERCICIO 4**. Considera los planos

$$\pi_1 \equiv 2x + 5 = 0 \qquad \text{y} \qquad \pi_2 \equiv 3x + 3y - 4 = 0$$

**(a)** [1´25 PUNTOS]. ¿Qué ángulo determinan ambos planos.

**(b)** [1´25 PUNTOS]. Halla el plano que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a los dos planos dados.

**Opción B**

**EJERCICIO 1**. Siendo Ln($x$) el logaritmo neperiano de $x$, considera la función $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} a(x-1) & \text{si} \quad -1<x\le 1 \\ x\,\text{Ln}(x) & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

**(a)** [1´25 PUNTOS]. Determina el valor de $a$ sabiendo que $f$ es derivable.

**(b)** [1´25 PUNTOS]. Calcula $\int_0^2 f(x)\,dx$.

**EJERCICIO 2**. [2´5 PUNTOS]. Determina la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sabiendo que su derivada segunda es constante e igual a 3 y que la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x$=1 es $5x-y-3=0$.

**EJERCICIO 3**. Considera el sistema

$$\left.\begin{array}{l} mx+y-z=1 \\ x-my+z=4 \\ x+y+mz=m \end{array}\right\}$$

**(a)** [1´5 PUNTOS]. Discútelo según los valores de $m$.

**(b)** [1 PUNTO]. ¿Cuál es, según los valores de $m$, la posición relativa de los planos cuyas ecuaciones respectivas son las tres que forman el sistema?

**EJERCICIO 4**. Sea $r$ la recta de ecuaciones $r\equiv\begin{cases} 3x+2y=0 \\ 3x+z=0 \end{cases}$

**(a)** [1´5 PUNTOS]. Halla los puntos de $r$ cuya distancia al origen es de 7 unidades.

**(b)** [1 PUNTO]. Halla la ecuación del plano perpendicular a $r$ que pasa por el punto P(1, 2, -1).

---

**SOLUCIONES Opción A**

## SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

Calculemos el siguiente límite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-1\right)\operatorname{sen}(x)}{x^3-x^2}=\frac{\left(e^0-1\right)\operatorname{sen}(0)}{0^3-0^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{e^x\operatorname{sen}(x)+\left(e^x-1\right)\cos(x)}{3x^2-2x}=$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^0 \operatorname{sen}(0) + \left(e^0 - 1\right)\cos(0)}{3\bullet 0^2 - 2\bullet 0} = \frac{1\bullet 0 + (1-1)\bullet 1}{0} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x \operatorname{sen}(x) + e^x \cos(x) + e^x \cos(x) - \left(e^x - 1\right)\operatorname{sen}(x)}{6x - 2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^0 \operatorname{sen}(0) + e^0\cos(0) + e^0\cos(0) - \left(e^0 - 1\right)\operatorname{sen}(0)}{6\bullet 0 - 2} = \frac{1\bullet 0 + 1\bullet 1 + 1\bullet 1 - (1-1)\bullet 0}{0-2} = \frac{2}{-2} = -1$$

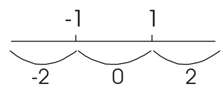
Las indeterminaciones de $\left[\frac{0}{0}\right]$ se han destruido utilizando la Regla de L´Hôpital, que consiste en derivar el numerador y denominador independientemente el uno del otro.

## SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

**(a)** Expresemos *f(x)* como una función a trozos, teniendo en cuenta la definición de función valor absoluto:

$$f(x) = \left|x^2 - 1\right| = \begin{cases} -\left(x^2 - 1\right) & \text{si} \quad x^2 - 1 \le 0 \\ x^2 - 1 & \text{si} \quad x^2 - 1 > 0 \end{cases}$$

Resolvamos las inecuaciones correspondientes a los dominios de cada trozo de función, para lo cual resolveremos, en primer lugar, la ecuación $x^2 - 1 = 0$.




$$x^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \begin{matrix} \nearrow & 1 \\ \searrow & -1 \end{matrix}$$

estos valores, -1 y 1, que anulan a la ecuación, los situamos ordenadamente en la recta real y construimos los posibles intervalos de solución, $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ y $(1, \infty)$, elegimos valores intermedios de los mismos, por ejemplo, -2, 0 y 2, y los probamos en las inecuaciones, viendo qué intervalos satisfacen a una u otra inecuación:

Si $x = -2 \Rightarrow (-2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3 > 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 1 > 0$, en $(-\infty, -1)$

Si $x = 0 \Rightarrow 0^2 - 1 = 0 - 1 = -1 < 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 1 > 0$, en $(-1, 1)$

Si $x = 2 \Rightarrow 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3 > 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 1 > 0$, en $(1, \infty)$

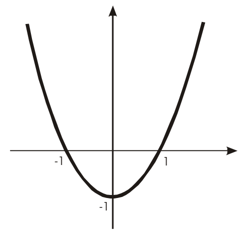
A la vista de estos intervalos, podemos definir la función más correctamente en función de los mismos:

$$f(x) = \left|x^2 - 1\right| = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si} \quad x < -1 \\ -x^2 + 1 & \text{si} \quad -1 \le x \le 1 \\ x^2 - 1 & \text{si} \quad 1 < x \end{cases}$$

La gráfica de esta función coincide con la de la función cuadrática, $x^2 - 1$, pero de manera que la parte de la gráfica que quede por debajo del eje de abscisas, por simetría con respecto a este eje, la dibujaremos por encima.

Representemos $y = x^2 - 1$, cuya gráfica es una parábola.

1.- Punto de corte con el eje de ordenadas:

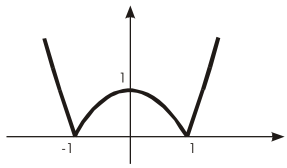


$x = 0 \;\Rightarrow\; y = -1 \;\Rightarrow\; (0, -1)$

2.- Puntos de corte con el eje de abscisas:
$y = 0 \;\Rightarrow\; x = -1;\; x = 1 \;\Rightarrow\; (-1, 0)$ y $(1, 0)$

3.- Coordenadas del vértice V:
$x = -b/(2a) = 0/(-2) = 0 \;\Rightarrow\; y = -1 \;\Rightarrow\; V(0, -1)$

La gráfica de la función $f(x)$ es:



**(b)** Esta función al ser el valor absoluto de una función polinómica, que es continua, es también una función continua en todo su dominio que es $\mathbb{R}$.

Estudiemos la derivabilidad.

El trozo de función definido para los valores de $x < -1$ es una función derivable por ser una función polinómica, ya que las funciones polinomicas lo son en todo $\mathbb{R}$, luego $f$ es derivable para valores de $x < -1$, siendo la función derivada, $2x$.

El trozo de función definido para los valores de $-1 < x < 1$ es una función derivable por idénticas razones a las anteriores, luego $f$ es derivable para valores de $-1 < x < 1$, siendo la función derivada, $-2x$.

El trozo de función definido para los valores de $x > 1$ es una función derivable por dénticas razones a las anteriores, luego $f$ es derivable para valores de $x > 1$, siendo la función derivada, $2x$.

El problema estaría en los puntos, $-1$ y $1$, por haber un cambio en el comportamiento de la función.

Obtengamos una primera aproximación de la función derivada, para todos aquellos valores de $x$ donde ya sabemos que es derivable:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x < -1 \\ -2x & \text{si} \quad -1 < x < 1 \\ 2x & \text{si} \quad 1 < x \end{cases} \qquad [1]$$

Veamos si es derivable en el punto $x = -1$. La derivada por la izquierda es:

$$f'\left(-1^-\right) = \lim_{\substack{x \to -1^- \\ x < -1}} f'(x) = \lim_{x \to -1^-} (2x) = -2$$

por la derecha:

$$f'\left(-1^+\right) = \lim_{\substack{x \to -1^+ \\ x > -1}} f'(x) = \lim_{x \to -1^+} (-2x) = 2$$

las derivadas laterales no coinciden, luego no es derivable en el punto $x = -1$.

Estudiemos la derivabilidad en el punto $x = 1$, sabiendo que es continua en dicho punto y pudiendo por tanto ser derivable.

Para que la función $f$ sea derivable en el punto, $x = 1$, las derivadas laterales deben coincidir. Calculémoslas:

$$f'\left(1^-\right) = \lim_{\substack{x\to 1^- \\ x<1}} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} (-2x) = -2$$

$$f'\left(1^+\right) = \lim_{\substack{x\to 1^+ \\ x>1}} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} (2x) = 2$$

como las derivadas laterales no coinciden, $f(x)$ no es derivable en $x = 1$.

La función derivada coincide con la primera aproximación que hicimos en [1].

**(c)** Calculemos la integral siguiente.

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 \left(-x^2+1\right) dx + \int_1^2 \left(x^2-1\right) dx = \left[\frac{-x^3}{3}+x\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3}-x\right]_1^2 =$$

$$= \left(\frac{-1^3}{3}+1-0\right) + \frac{2^3}{3} - 2 - \left(\frac{1^3}{3}-1\right) = \frac{2}{3}+\frac{8}{3}-2+\frac{2}{3} = \frac{6}{3}$$

## SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

**(a)** Si el det(A) = 1, se verificará que:

$$\begin{vmatrix} a & 0 & -a \\ 0 & -1 & 0 \\ b & 0 & b \end{vmatrix} = 1 \;\Rightarrow\; -ab-ab=1 \;\Rightarrow\; -2ab=1 \qquad [1]$$

Impongamos ahora la condición de que los vectores columnas de la matriz A son perpendiculares dos a dos, por tanto, su producto escalar es cero:

$(a, 0, b)\cdot(0, -1, 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 0$

$(0, -1, 0)\cdot(-a, 0, b) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 0$

$(a, 0, b)\cdot(-a, 0, b) = 0 \quad \Rightarrow \quad -a^2 + b^2 = 0$ [2]

Despejemos $a$ en [1] y sustituyámoslo en [2]:

$$a = -\frac{1}{2b} \;\Rightarrow\; -\left(-\frac{1}{2b}\right)^2 + b^2 = 0 \;\Rightarrow\; -\frac{1}{4b^2}+b^2 = 0 \;\Rightarrow\; \frac{-1+4b^4}{4b^2} = 0 \;\Rightarrow$$

$$-1+4b^4 = 0 \;\Rightarrow\; 4b^4 = 1 \;\Rightarrow\; b^4 = \frac{1}{4} \;\Rightarrow\; b^2 = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; b = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \;\Rightarrow$$

$$\begin{cases} \text{Si} \quad b = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \;\Rightarrow\; a = -\dfrac{1}{2\dfrac{\sqrt{2}}{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\[2ex] \text{Si} \quad b = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \;\Rightarrow\; a = -\dfrac{1}{2\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

**(b)** Comprobemos que $A^{-1} = A^t$, en el caso de $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y $b = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Calculemos a inversa de A, $A^{-1}$, mediante el método de Gauss, consistente en poner a la derecha de la matriz A, la matriz unidad e intentar que aparezca, mediante el uso de diversas transformaciones elementales, la matriz unidad a la izquierda, la parte que quede a la derecha es la matriz inversa de A, $A^{-1}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Diagonalicemos.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = \frac{\sqrt{2}}{2} \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = -\sqrt{2} \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: $-2 \cdot$ [1ªf.] + [3ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -\sqrt{2} & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Dividamos la 1ª fila por $-\sqrt{2}$
Dividamos la 2ª fila por $-1$
Dividamos la 3ª fila por $-\sqrt{2}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right)$$

En la parte de la izquierda hemos obtenido la matriz unidad, por lo que la matriz A tiene inversa, siendo la matriz inversa la matriz que queda a la derecha, es decir:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Calculemos la traspuesta de A:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Como puede comprobarse $A^{-1} = A^t$.

Comprobemos que $A^{-1} = A^t$, en el 2º caso, es decir, cuando $a = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ y $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Calculemos a inversa de A, $A^{-1}$, mediante el método de Gauss, consistente en poner a la derecha de la matriz A, la matriz unidad e intentar que aparezca, mediante el uso de diversas transformaciones elementales, la matriz unidad a la izquierda, la parte que quede a la derecha es la matriz inversa de A, $A^{-1}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Diagonalicemos.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] + [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = \sqrt{2} \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: $-2 \cdot$ [1ªf.] + [3ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \sqrt{2} & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Dividamos la 1ª fila por $\sqrt{2}$
Dividamos la 2ª fila por $-1$
Dividamos la 3ª fila por $\sqrt{2}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right)$$

En la parte de la izquierda hemos obtenido la matriz unidad, por lo que la matriz A tiene inversa, siendo la matriz inversa la matriz que queda a la derecha, es decir:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Calculemos la traspuesta de A:

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Como puede comprobarse $A^{-1} = A^t$.

## SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

**(a)** Sea α el ángulo que forman los planos $\pi_1$ y $\pi_2$, calculemos el coseno de dicho ángulo, que será el mismo que el coseno del ángulo que forman sus vectores normales:

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{n}_{\pi_1} \bullet \vec{n}_{\pi_2}}{\left|\vec{n}_{\pi_1}\right| \left|\vec{n}_{\pi_2}\right|} = \frac{(2,\ 0,\ 0)\bullet(3,\ 3,\ 0)}{\sqrt{2^2+0+0}\ \sqrt{3^2+3^2+0}} = \frac{6}{2\sqrt{18}} = \frac{6}{6\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

luego el ángulo que determinan ambos planos es $\alpha = 45°$.

**(b)** Si el plano que nos piden es perpendicular a los planos $\pi_1$ y $\pi_2$, se verificará que el producto vectorial de los vectores normales a cada uno de ellos será el vector normal al plano, π, que queremos calcular:

$$\vec{n}_{\pi} = \vec{n}_{\pi_1} \times \vec{n}_{\pi_2} = (2,\ 0,\ 0)\times(3,\ 3,\ 0) = \left( \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \right) = (0,\ 0,\ 6)$$

Sustituyamos los coeficientes A, B y C de la ecuación general del plano π por estas coordenadas del vector normal a dicho plano:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad \Rightarrow \quad 0\cdot x + 0\cdot y + 6\cdot z + D = 0 \quad \Rightarrow \quad 6\cdot z + D = 0$$

El plano que hemos obtenido sabemos que pasa por el origen de coordenadas, sustituyamos las coordenadas del origen en la ecuación del plano:

$$6\cdot z + D = 0 \quad \Rightarrow \quad 6\cdot 0 + D = 0 \quad \Rightarrow \quad D = 0 \quad \Rightarrow \quad 6\cdot z + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad 6\cdot z = 0 \quad \Rightarrow \quad z = 0$$

que es la ecuación del plano que nos piden.

---

**SOLUCIONES Opción B**

## SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

**(a)** Para determinar el valor de *a* de forma que *f* sea derivable, estudiaremos ante la continuidad, ya que la no continuidad implica la no derivabilidad.

Para que la función *f* sea continua en un punto, los límites laterales en dicho punto deben coincidir y además coincidir también con el valor de la función en ese punto. Y para que lo sea en un intervalo lo ha de ser en todos los puntos del intervalo.

- El trozo de función para valores de *x* comprendidos entre $-1$ y 1, $-1 < x < 1$, es una función polinómica y las funciones polinómicas son continuas en todo $\mathbb{R}$; luego la función *f* es continua para $-1 < x < 1$.

- El trozo de función para valores de *x* mayores que 1, $x > 1$, es el producto de una función polinómica y de la función elemental logaritmo neperiano, la primera continua en todo $\mathbb{R}$ y la segunda para valores mayores que cero, por tanto la función producto será continua para valores de *x* mayores que cero; luego la función *f* es continua para $x > 1$.

- El problema de la continuidad está en el punto 1, donde hay un cambio en el comportamiento de la función. Estudiemos la continuidad en el punto 1.

Calculemos los límites laterales y el valor de la función en dicho punto, para ver si existen y coinciden.

$$\left.\begin{array}{l}
\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1^- \\ x<1}} a(x-1) = a(1-1) = 0 \\
\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1^+ \\ x>1}} x\ \mathrm{Ln}(x) = 1\bullet \mathrm{Ln}(1) = 0 \\
f(1) = a(1-1) = 0
\end{array}\right\} \Rightarrow \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = 0$$

La función es continua en $x = 1$, para cualquier valor de $a$.

Luego $f(x)$ es continua en todo su dominio, $(-1, \infty)$, para todo valor de $a$.

Estudiemos la derivabilidad.

Una función será derivable en un punto, si las derivadas laterales coinciden. Y para que lo sea en un intervalo lo ha de ser en todos los puntos del intervalo. Pero previamente debe ser continua para poder ser derivable, ya que la no continuidad implica la no derivabilidad; en nuestro caso se ha justificado que es continua en su dominio para cualquier valor de $a$.

- Para valores de $x$ comprendidos entre $-1$ y 1, $-1 < x < 1$, es una función polinómica y las funciones polinómicas son derivables en todo $\mathbb{R}$; luego $f$ es derivable para $-1 < x < 1$, siendo la función derivada, $a$.

- Para valores de $x > 1$, $f$ es derivable, por ser el producto de una función polinómica y de la función elemental logaritmo neperiano, la primera derivable en todo $\mathbb{R}$ y la segunda para valores mayores que cero, por tanto la función producto será derivable para valores de $x$ mayores que cero; luego $f$ es derivable para $x > 1$, siendo la función derivada, $\mathrm{Ln}(x) + 1$.

Una primera aproximación de la función derivada, donde ya sabemos que es derivable es

$$f'(x) = \begin{cases} a & \text{si} \quad -1 < x < 1 \\ \mathrm{Ln}(x)+1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

- El problema está inicalmente en el punto 1.

En el punto 1 será derivable, si las derivadas laterales coinciden ya que es continua en dicho punto.

$$\left.\begin{array}{l}
f'(1^-) = \lim\limits_{\substack{x\to 1^- \\ x<1}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1^- \\ x<1}} a = a \\
f'(1^+) = \lim\limits_{\substack{x\to 1^+ \\ x>1}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1^+ \\ x>1}} \mathrm{Ln}(x) + 1 = \mathrm{Ln}(1) + 1 = 1
\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f'(1^-) = f'(1^+) \quad \Rightarrow \\ \qquad a = 1 \end{array}\right.$$

luego la función $f(x)$ es derivable en $x = 1$, si $a = 1$.

La función $f(x)$ es derivable en su dominio siempre que $a = 1$.

La función $f(x)$ y la función derivada, $f'(x)$, quedarán finalmente así:

$$f(x) = \begin{cases} (x-1) & \text{si} \quad -1 < x \le 1 \\ x\,\mathrm{Ln}(x) & \text{si} \quad x > 1 \end{cases} \qquad f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad -1 < x \le 1 \\ \mathrm{Ln}(x)+1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

**(b)** Calculemos la integral siguiente.

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 (x-1)\,dx + \int_1^2 x\,\mathrm{Ln}(x)\,dx = \qquad [1]$$

calculemos previamente la segunda integral, pero como integral indefinida, mediante el método de integración por partes.

$$\int x\,\mathrm{Ln}(x)\,dx = \qquad [2]$$

$$u = \mathrm{Ln}\,(x) \qquad du = \frac{1}{x}dx$$

$$dv = x\,dx \qquad v = \int x\,dx = \frac{x^2}{2}$$

continuando en [2]

$$= \frac{x^2}{2}\,\mathrm{Ln}(x) - \int \frac{x^2}{2}\,\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^2}{2}\,\mathrm{Ln}(x) - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{x^2}{2}\,\mathrm{Ln}(x) - \frac{1}{2}\,\frac{x^2}{2}\,.$$

sustituyendo este resultado en [1], tendremos:

$$= \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2}\,\mathrm{Ln}(x) - \frac{x^2}{4}\right]_1^2 = \frac{1^2}{2} - 1 - 0 \quad + \quad \left(\frac{2^2}{2}\,\mathrm{Ln}(2) - \frac{2^2}{4}\right) - \left(\frac{1^2}{2}\,\mathrm{Ln}(1) - \frac{1^2}{4}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2} + 2\,\mathrm{Ln}(2) - 1 - 0 + \frac{1}{4} = 2\,\mathrm{Ln}(2) - \frac{5}{4}$$

## SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

Si la segunda derivada de la función $f$ es 3, se verificará que:

$$f'(x) = \int f''(x)dx = \int 3\,dx = 3x + b \qquad [1]$$

Como la recta tangente en $x = 1$, es $5x - y - 3 = 0$, o lo que es lo mismo, $y = 5x - 3$, significa que la pendiente de la recta tangente, m=5, coincide con la derivada de la función en el punto 1, $f'(1) = \mathrm{m} = 5$, esto implica que:

$$f'(1) = 3\cdot 1 + b \quad \Rightarrow \quad 5 = 3 + b \quad \Rightarrow \quad b = 2.$$

Sustituyendo este valor de $b$ en [1], tendremos:

$$f'(x) = 3x + 2$$

Obtengamos ahora la función $f(x)$.

$$f(x) = \int (3x+2)\,dx = \frac{3x^2}{2} + 2x + c$$

Teniendo en cuenta que el punto de tangencia, T, tiene de abscisa $x = 1$, la ordenada será:

$$y = 5x - 3 \quad \Rightarrow \quad y = 5\cdot 1 - 3 \quad \Rightarrow \quad y = 2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{T}(1, 2)$$

Este punto pertenece a la función $f(x)$, sus coordenadas satisfacerán la función, es decir:

$$f(x) = \frac{3x^2}{2} + 2x + c \quad \Rightarrow \quad f(1) = \frac{3\bullet 1^2}{2} + 2\bullet 1 + c \quad \Rightarrow \quad 2 = \frac{3}{2} + 2 + c \quad \Rightarrow \quad c = -\frac{3}{2}$$

Finalmente, la expresión de la función *f(x)* es:

$$f(x)=\frac{3}{2}x^2+2x-\frac{3}{2}$$

## SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

**(a)** Discutamos el sistema según los valores de *m*, para ello lo expresamos en forma matricial y usamos el método de reducción de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -m & 1 & 4 \\ 1 & 1 & m & m \end{array}\right)$$

Intercambiemos entre sí las filas 1ª y 3ª

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & m \\ 1 & -m & 1 & 4 \\ m & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - $m$ · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & m \\ 0 & -m-1 & 1-m & 4-m \\ 0 & 1-m & -1-m & 1-m^2 \end{array}\right)$$

Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [3ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & m \\ 0 & -2 & m^2-m+2 & m^2-m+3 \\ 0 & 1-m & -1-m & 1-m^2 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -2 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: 2 · [3ªf.] + (1 - $m$) · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & m \\ 0 & -2 & m^2-m+2 & m^2-m+3 \\ 0 & 0 & -m^3+2m^2-5m & -m^3-4m+5 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero salvo el $a_{33}$ que puede ser cero o no. Veamos los diferentes casos que pueden presentarse.

* Si $a_{33} = 0 \Rightarrow -m^3 + 2m^2 - 5m = 0 \Rightarrow -m(m^2 - 2m + 5)= 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} m=0 \\ m^2-2m+5=0 \;\Rightarrow\; m=\dfrac{-2\pm\sqrt{4-20}}{2} = \text{no tiene solución} \end{cases}$$

Hemos obtenido un sólo valor de *m* que anula a $a_{33}$, el de $m = 0 \Rightarrow$ en este caso la última ecuación es del tipo, 0 = 5, es decir, una ecuación absurda, luego el sistema es incompatible.

* Si $a_{33} \neq 0 \Rightarrow -m^3 + 2m^2 - 5m \neq 0 \Rightarrow m \neq 0$, en este caso nos queda un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, es decir, un sistema compatible determinado, con solución única.

**(b)** Si $m \neq 0$, los tres planos se cortan en un punto, ya que hemos obtenido un sistema compatible determinado.

Si $m = 0$, los tres planos no tiene ningún punto en común, ya que hemos obtenido un sistema incompatible. No obstante, al salirnos sólo una ecuación absurda y no habiendo planos paralelos dos a dos, entonces los tres planos se cortan de dos en dos siendo las intersecciones respectivas tres rectas paralelas.

## SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

**(a)** Expresemos la ecuación de la recta *r* en forma paramétrica. Para ello resolveremos el sistema formado por las ecuaciones de la recta que viene dada como intersección de dos planos.

$$r \equiv \begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ 3x + z = 0 \end{cases}$$

Expresamos el sistema en forma matricial y lo resolvemos mediante el método de reducción de Gauss - Jordan.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 3 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - [1ªf.].

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado, nos sobra una incógnita, la *z*, la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -z \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -2 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] + [2ªf.].

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & -z \\ 0 & -2 & -z \end{array}\right)$$

El sistema está diagonalizado, la solución es:

$$3x = -z \quad ; \quad -2y = -z$$

terminemos de despejar las incógnitas, y a la incógnita secundaria, *z*, designémosla como un parámetro *t*.

$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{3}t \\ y = \dfrac{1}{2}t \\ z = t \end{cases}$$

Un punto H genérico de la recta tendrá de coordenadas $\left(-\frac{1}{3}t,\ \frac{1}{2}t,\ t\right)$. Calculemos qué puntos H son los que su distancia a O(0, 0, 0) es de 7 unidades.

$$\text{dist}(\text{O},\text{H}) = \sqrt{\left(-\frac{1}{3}t - 0\right)^2 + \left(\frac{1}{2}t - 0\right)^2 + (t-0)^2} = 7 \quad \Rightarrow \quad \frac{t^2}{9} + \frac{t^2}{4} + t^2 = 49 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{4t^2 + 9t^2 + 36t^2}{36} = 49 \quad \Rightarrow \quad \frac{49t^2}{36} = 49 \quad \Rightarrow \quad t^2 = 36 \quad \Rightarrow \begin{cases} t = 6 \\ t = -6 \end{cases}$$

luego obtenemos dos puntos: $\text{H}_1 = \left(-\frac{1}{3}t,\ \frac{1}{2}t,\ t\right) = \left(-\frac{6}{3}, \frac{6}{2}, 6\right) = (-2, 3, 6)$

$$\text{H}_2 = \left(-\frac{1}{3}t,\ \frac{1}{2}t,\ t\right) = \left(-\frac{-6}{3},\ \frac{-6}{2},\ -6\right) = (2, -3, -6)$$

**(b)** Si el plano es perpendicular a *r*, el vector de dirección de *r* es el normal al plano,

Sustituyamos los coeficientes A, B y C de la ecuación general del plano por las coordenadas del vector normal a dicho plano:

$$\text{A}x + \text{B}y + \text{C}z + \text{D} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y + z + D = 0$$

Este plano al pasar por el punto P(1, 2, -1), verificará lo siguiente:

$$-\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y + z + D = 0 \;\Rightarrow\; -\frac{1}{3}\bullet 1 + \frac{1}{2}\bullet 2 - 1 + D = 0 \;\Rightarrow\; D = \frac{1}{3} \;\Rightarrow\; -\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y + z = -\frac{1}{3}$$

| UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA<br>PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD | L.O.G.S.E.<br>MATEMÁTICAS II |
|---|---|

**Instrucciones**: a) **Duración**: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) La puntuación de cada pregunta está indicada en las mismas.
d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
e) Puedes usar calculadora (puede ser programable o tener pantalla gráfica), pero todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

## MODELO 34 DE EXAMEN

### Opción A

**EJERCICIO 1**. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{1-x} & \text{si} \quad x<0 \\ 1-mx-x^2 & \text{si} \quad x\geq 0 \end{cases}$$

**(a)** [1´25 PUNTOS]. Determina $m$ sabiendo que $f$ es derivable.

**(b)** [1´25 PUNTOS]. Calcula $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

**EJERCICIO 2**. [2´5 PUNTOS]. Un hilo de alambre de 1 m. de longitud se corta en dos trozos formando con uno de ellos una circunferencia y con el otro un cuadrado. Prueba que la suma de las áreas es mínima cuando el lado del cuadrado es el doble que el radio de la circunferencia.

**EJERCICIO 3**. [2´5 PUNTOS]. Resuelve el sistema de ecuaciones, dado en forma matricial, $A\,X = -A\,X + B$ siendo.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

**EJERCICIO 4**. Considera el plano $2x+y+2z-4=0$.

**(a)** [1´75 PUNTOS]. Halla el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte del plano dado con los ejes coordenados.

**(b)** [0´75 PUNTOS]. Calcula la distancia del origen al plano dado.

**Opción B**

**EJERCICIO 1**. Considera la función $f:[0,4]\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} 4x & \text{si} \quad 0\le x\le 1 \\ \dfrac{16}{(x+1)^2} & \text{si} \quad 1<x<3 \\ 4-x & \text{si} \quad 3\le x\le 4 \end{cases}$$

**(a)** [1 PUNTO]. Esboza la gráfica de $f$.
**(b)** [1´5 PUNTOS]. Halla el área del recinto limitado por la gráfica de $f$ y el eje de abscisas.

**EJERCICIO 2**. [2´5 PUNTOS]. Considera la función $f:[0,3]\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=3x-2$. Calcula el punto de la gráfica de $f$ más cercano al punto (2, 6) y calcula también el más alejado.

**EJERCICIO 3**. [2´5 PUNTOS]. Determina todos los puntos del plano $2x-y+2z-1=0$ que equidistan de los puntos A(3, 0, -2) y B(1, 2, 0). ¿Qué representan geométricamente?

**EJERCICIO 4**. Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$

**(a)** [1 PUNTO]. Determina para qué valores del parámetro $\lambda$ la matriz A no tiene inversa.
**(b)** [1´5 PUNTOS]. Calcula, si es posible, la matriz inversa de A para $\lambda=-2$.

---

**SOLUCIONES Opción A**

## SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

**(a)** Si la función *f(x)* es derivable en todo $\mathbb{R}$ tiene que ser continua también en $\mathbb{R}$.

Calculemos el valor de *m* para que la función sea continua.

Para que la función *f* sea continua en un punto, los límites laterales en dicho punto deben coincidir y además coincidir también con el valor de la función en ese punto. Y para que lo sea en un intervalo lo ha de ser en todos los puntos del intervalo.

**-** El trozo de función para valores de *x* menores que 0, $x<0$, es una función racional, que es continua en $\mathbb{R}$ salvo para el uno que es el valor que anula al denominador, pero este valor no pertenece al dominio que estamos considerando, luego la función es continua para $x<0$.

**-** El trozo de función para valores de *x* mayores que 0, $x>2$, es una función polinómica, que es continua en todo $\mathbb{R}$, luego la función es continua para $x>0$.

**-** El problema de la continuidad está en el punto 0, donde hay un cambio en el comportamiento de la función.

Calculemos los límites laterales y el valor de la función en dicho punto, para ver si existen y coinciden.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0^- \\ x>0}} \left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{1-0} = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0+ \\ x<0}} \left(1-mx-x^2\right) = 1-0-0 = 1 \\ f(0) = 1-0-0 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 1$$

Luego *f(x)* será continua en el punto 0, para cualquier valor de *m*.

En definitiva, la función *f(x)* es continua en ℝ, cualquiera que sea el valor de *m*.

Estudiemos ahora la derivabilidad.

Una función será derivable en un punto, si las derivadas laterales coinciden. Y para que lo sea en un intervalo lo ha de ser en todos los puntos del intervalo. Pero previamente debe ser continua para poder ser derivable, ya que la no continuidad implica la no derivabilidad, pero en nuestro caso es continua para todo valor de *m*.

- Para valores de $x<0$, $f$ al ser una función racional es derivable en ℝ salvo para el uno que es el valor que anula al denominador, pero este valor no pertenece al dominio que estamos considerando, luego la función es derivable para $x<0$., siendo la derivada, $\frac{1}{(1-x)^2}$ .

- Para valores de $x>0$, $f$ es derivable por ser una función polinómica, siendo la función derivada $-m-2x$.

Una primera aproximación de la función derivada, donde ya sabemos que es derivable es

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1-x)^2} & \text{si } x<0 \\ -m-2x & \text{si } x>0 \end{cases}$$

- El problema está en el punto 0.

En el punto 0 será derivable, si las derivadas laterales coinciden.

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = \lim\limits_{\substack{x\to 0^- \\ x>0}} \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-0)^2} = 1 \\ f'(0^+) = \lim\limits_{\substack{x\to 0^+ \\ x<0}} (-m-2x) = -m-0 = -m \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} f'(0^-) = f'(0^+) \Rightarrow \\ 1 = -m \Rightarrow m = -1 \end{cases}$$

luego la función *f(x)* será derivable en $x=0$ siempre y cuando $m=-1$.

En definitiva *f(x)* será derivable en ℝ cuando $m=-1$.

La función *f(x)* y su derivada serán:

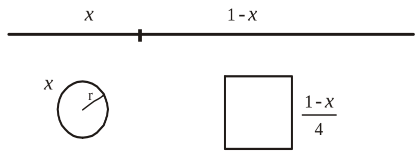
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & \text{si } x<0 \\ 1+x-x^2 & \text{si } x\geq 0 \end{cases} \qquad f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1-x)^2} & \text{si } x<0 \\ 1-2x & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$$

**(b)** Calculemos la siguiente integral definida.

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{1-x}\,dx + \int_{0}^{1} \left(1+x-x^2\right) dx = \Big[-\text{Ln}\,|1-x|\Big]_{-1}^{0} + \left[x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 =$$

$$= -\text{Ln}\,|1-0| - \left(-\text{Ln}\,|1+1|\right) + 1 + \frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3} - \left(0+0-0\right) = -\text{Ln}\,(1) + \text{Ln}\,(2) + 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \text{Ln}\,(2) + \frac{7}{6}$$

## SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-




Construimos la función área, que a su vez es la suma de las áreas de la circunferencia y del cuadrado.

$$A(x) = \pi r^2 + \left(\frac{1-x}{4}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad A(x) = \pi r^2 + \frac{1+x^2-2x}{16}$$

Expresemos el radio de la circunferencia en función de la longitud de la misma:

$$x = 2\pi r \quad \Rightarrow \quad r = \frac{x}{2\pi}$$

sustituyamos este valor de $r$ en la función área:

$$A(x) = \pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 + \frac{1+x^2-2x}{16} \quad \Rightarrow \quad A(x) = \pi\frac{x^2}{4\pi^2} + \frac{1+x^2-2x}{16} \quad \Rightarrow \quad A(x) = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{1+x^2-2x}{16}$$

El dominio de esta función es el intervalo abierto (0, 1); se trata de una función cuadrática (aunque no esté ordenada perfectamente), y por tanto es continua y derivable en su dominio.

Calculemos el mínimo absoluto de esta función, que coincidirá con el vértice de la parábola ya que el coeficiente de $x^2$ es positivo, y siempre que ese mínimo pertenezca al dominio.

$$A'(x) = \frac{2x}{4\pi} + \frac{2x-2}{16} \quad \Rightarrow \quad A'(x) = \frac{x}{2\pi} + \frac{x-1}{8}$$

$$\frac{x}{2\pi} + \frac{x-1}{8} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{4x+\pi x-\pi}{8\pi} = 0 \;\Rightarrow\; 4x+\pi x-\pi = 0 \;\Rightarrow\; (4+\pi)x = \pi \;\Rightarrow\; x = \frac{\pi}{4+\pi}$$

Este valor de $x$ pertenece al dominio, luego es el mínimo absoluto tal como hemos justificado anteriormente.

Comprobemos que para este valor de $x$ que hace mínima la suma de las áreas, el lado del cuadrado es doble que el radio de la circunferencia:

radio de la circunferencia $= r = \dfrac{x}{2\pi} = \dfrac{\frac{\pi}{4+\pi}}{2\pi} = \dfrac{1}{2(4+\pi)}$

lado del cuadrado $= \dfrac{1-x}{4} = \dfrac{1-\frac{\pi}{4+\pi}}{4} = \dfrac{4+\pi-\pi}{4(4+\pi)} = \dfrac{4}{4(4+\pi)} = \dfrac{1}{4+\pi}$

como puede observarse, el radio es la mitad del lado, o bien, el lado es doble que el radio.

## SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

Resolvamos el siguiente sistema de ecuaciones dado en forma matricial:

A$X$ = -A$X$ + B sumemos a los dos miembros la matriz A$X$

$A X + A X = A X - A X + B$ simplifiquemos

$2 A X = B$ multipliquemos a la izquierda por la matriz inversa de 2A, $(2A)^{-1}$. Más adelante justificaremos si existe esta matriz

$(2A)^{-1} (2A) X = (2A)^{-1} \cdot B$ simplifiquemos

$I X = (2A)^{-1} \cdot B \quad \Rightarrow \quad X = (2A)^{-1} \cdot B$

Antes de obtener la matriz $X$, comprobemos si existe $(2A)^{-1}$ y si existe la calcularemos mediante el método de Gauss, consistente en poner a la derecha de la matriz 2A, la matriz unidad e intentar que aparezca, mediante el uso de diversas transformaciones elementales, la matriz unidad a la izquierda, la parte que quede a la derecha es la matriz inversa de 2A, $(2A)^{-1}$.

$$2 \bullet A = 2 \bullet \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & 2 \\ 6 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Diagonalicemos.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 2 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] + [1ªf.]
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - 3 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 2 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & -4 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = -10 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: 5 · [2ªf.] + 3 · [3ªf.]
Sustituyamos la 1ª fila por: 5 · [1ªf.] + 2 · [3ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 10 & 0 & 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & 10 & 0 & -7 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -10 & -4 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Dividamos la 1ª y la 3ª fila por 10.
Dividamos la 3ª fila por -10.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-3}{10} & \frac{-2}{10} & \frac{2}{10} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-7}{10} & \frac{2}{10} & \frac{3}{10} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-4}{-10} & \frac{-1}{-10} & \frac{1}{-10} \end{array}\right)$$

En la parte de la izquierda hemos obtenido la matriz unidad, por lo que la matriz 2A tiene inversa, siendo la matriz inversa, $(2A)^{-1}$, la matriz que queda a la derecha.

Calculemos $X$.

$$X = (2A)^{-1} \bullet B = \begin{pmatrix} \frac{-3}{10} & \frac{-2}{10} & \frac{2}{10} \\ \frac{-7}{10} & \frac{2}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{4}{10} & \frac{1}{10} & \frac{-1}{10} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-9}{10} \\ \frac{4}{10} \\ \frac{7}{10} \end{pmatrix}$$

## SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

**(a)** Teniendo en cuenta que el *OX* tiene por ecuaciones, $y$=0 y $z$=0. El punto de corte del plano $2x + y + 2z - 4 = 0$ con dicho eje es:

$$\left.\begin{aligned} 2x+y+2z &= 4 \\ y &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad 2x = 4 \quad \Rightarrow \quad x = 2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{A}(2,\ 0,\ 0)$$

Con el eje *OY* es:

$$\left.\begin{aligned} 2x+y+2z &= 4 \\ x &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad y = 4 \quad \Rightarrow \qquad \mathrm{B}\ (0,\ 4,\ 0)$$

Con el eje *OZ* es:

$$\left.\begin{aligned} 2x+y+2z &= 4 \\ x &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad 2z = 4 \quad \Rightarrow \quad z = 2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{C}\ (0,\ 0,\ 2)$$

Calculemos las coordenadas de los siguientes vectores:

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (0,\ 4,\ 0) - (2,\ 0,\ 0) = (-2,\ 4,\ 0)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (0,\ 0,\ 2) - (2,\ 0,\ 0) = (-2,\ 0,\ 2)$$

EL área del triángulo ABC es:

$$\overset{\Delta}{\mathrm{ABC}} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right| = \frac{1}{2}\left|(-2,\ 4,\ 0)\times(-2,\ 0,\ 2)\right| = \frac{1}{2}\bullet\left|\left(\begin{vmatrix}4 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix}-2 & 0\\ -2 & 2\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}-2 & 4\\ -2 & 0\end{vmatrix}\right)\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\bullet\left|(8,\ 4,\ 8)\right| = \frac{1}{2}\bullet\sqrt{8^2+4^2+8^2} = \frac{1}{2}\bullet\sqrt{144} = 6\ \ \mathrm{u}^2.$$

**(b)** Expresemos la ecuación del plano, $2x + y + 2z - 4 = 0$, en forma paramétrica, para ello basta despejar una de las incógnitas, por ejemplo, la $y$, en función de las demás, $y = 4 - 2x - 2z$; y, por último, las incógnitas del segundo miembro se sustituyen por parámetros:

$$\pi \equiv \left\{\begin{aligned} x &= \lambda \\ y &= 4-2\lambda-2\mu \\ z &= \mu \end{aligned}\right.$$

Un punto genérico, H, del plano $\pi$ tendrá de coordenadas:

$$\mathrm{H} = (\lambda,\ 4-2\lambda-2\mu,\ \mu)$$

Si O es el origen de coordenadas, el vector $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ tiene de coordenadas:

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = (\lambda,\ 4-2\lambda-2\mu,\ \mu) - (0,0,0) = (\lambda,\ 4-2\lambda-2\mu,\ \mu)$$

este vector verifica la condición de ser perpendicular a los dos vectores, $\vec{u}$ y $\vec{v}$, de dirección del plano, es decir:

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\vec{u} \quad &\Rightarrow \quad \overrightarrow{\mathrm{OH}}\bullet\vec{u} = 0 \\ \overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\vec{v} \quad &\Rightarrow \quad \overrightarrow{\mathrm{OH}}\bullet\vec{v} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} (\lambda,\ 4-2\lambda-2\mu,\ \mu)\bullet(1,-2,0) &= 0 \\ (\lambda,\ 4-2\lambda-2\mu,\ \mu)\bullet(0,-2,1) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r}\lambda-8+4\lambda+4\mu\ =\ 0\\-8+4\lambda+4\mu+\mu\ =\ 0\end{array}\right\}\Rightarrow\quad\left.\begin{array}{r}5\lambda+4\mu\ =\ 8\\4\lambda+5\mu\ =\ 8\end{array}\right\}\Rightarrow$$

resolvamos este sistema mediante el método de reducción de Gauss-Jordan. Para ello expresemos dicho sistema en forma matricial.

$$\left(\begin{array}{cc|c}5&4&8\\4&5&8\end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 5 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: 5 · [2ªf.] - 4 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c}5&4&8\\0&9&8\end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 9 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: 9 · [1ªf.] - 4 · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c}45&0&40\\0&9&8\end{array}\right)$$

Simplifiquemos la 1ª fila por 5.

$$\left(\begin{array}{cc|c}9&0&8\\0&9&8\end{array}\right)$$

La solución es:

$$\lambda = 8/9 \quad ; \quad \mu = 8/9$$

Luego el vector $\overrightarrow{OH}$ tiene de coordenadas:

$$\overrightarrow{OH} = \left(\lambda,\ \ 4-2\lambda-2\mu,\ \ \mu\right) = \left(\frac{8}{9},\ 4-2\bullet\frac{8}{9}-2\bullet\frac{8}{9},\ \frac{8}{9}\right) = \left(\frac{8}{9},\ \frac{4}{9},\ \frac{8}{9}\right)$$

La distancia del origen al plano será:

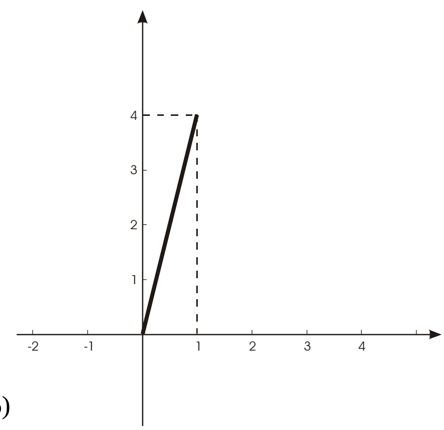
$$\text{dist }(O,\pi) = \text{dist }(O,H) = \left|\overrightarrow{OH}\right| = \left|\left(\frac{8}{9},\ \frac{4}{9},\ \frac{8}{9}\right)\right| = \sqrt{\left(\frac{8}{9}\right)^2+\left(\frac{4}{9}\right)^2+\left(\frac{8}{9}\right)^2} = \sqrt{\frac{144}{9^2}} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

---

**SOLUCIONES Opción B**

## SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

**(a)** Comencemos representando el trozo de función, $4x$, para los valores $0 \leq x \leq 1$. Se trata de una recta que pasa por el origen. Otro punto a tener en cuenta es el (1, 4). La gráfica es la situada al lado.




Representemos ahora el trozo $\dfrac{16}{(x+1)^2}$, para los valores $1 \leq x \leq 3$. Se trata de una función racional.Hagamos un estudio aproximado.

* Puntos de corte con los ejes.

Con el eje de ordenadas, $x$=0:

$$y = \frac{16}{(x+1)^2} \quad\Rightarrow\quad y = \frac{16}{(0+1)^2} = 16 \quad\Rightarrow\quad (0,\ 16)$$

Con el eje de abscisas, $y$=0:

$$y = \frac{16}{(x+1)^2} \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{16}{(x+1)^2} \quad \Rightarrow \quad 0 \neq 16 \quad \Rightarrow \quad \text{No hay puntos de corte.}$$

* Asíntotas Verticales.

Para que existan asíntotas verticales se ha de satisfacer que: $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$

Comprobemos si existen; en principio, hay que buscarlas entre los valores que anulen al denominador, $(x + 1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1$ (raíz doble). Veámoslo.

$$\lim_{x \to -1} \frac{16}{(x+1)^2} = \frac{16}{(-1+1)^2} = \frac{16}{0} = +\infty \quad \Rightarrow \quad \text{Hay un asíntota vertical doble: } x = -1.$$

Estudiemos la posición de la gráfica de la función respecto de esta asíntota vertical.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x \to -1^- \\ x<-1}} \dfrac{16}{(x+1)^2} = \dfrac{16}{(-1^- + 1)^2} = \dfrac{4}{+0} = +\infty \\ \lim\limits_{\substack{x \to -1^+ \\ x>-1}} \dfrac{16}{(x+1)^2} = \dfrac{16}{(-1^+ + 1)^2} = \dfrac{4}{+0} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow$$

La función tiende a $+\infty$ cuando $x$ se acerca a $-1$ por la izquierda, y también a $+\infty$ cuando lo hace por la derecha.

* Asíntotas horizontales.

Para que exista asíntota horizontal se ha de satisfacer que: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$

Comprobemos si existe.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{16}{(x+1)^2} = \frac{16}{\infty} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Hay una asíntota horizontal, } y = 0.$$

Estudiemos la posición de la gráfica de la función respecto de la asíntota oblicua.

** Para valores de $x$ muy grandes, por ejemplo, $x = 1000 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} y_{\text{funcion}}(1000) = \dfrac{16}{(1000+1)^2} = 0'0000159680 \\ y_{\text{asintota}}(1000) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad y_{\text{funcion}}(1000) > y_{\text{asintota}}(1000)$$

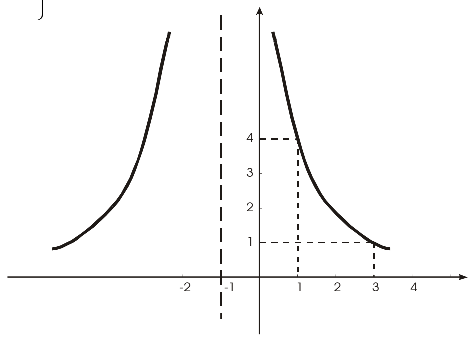
luego la gráfica de la función, para $x \to +\infty$, va por encima de la asíntota horizontal.

** Para valores de $x$ muy pequeños, por ejemplo, $x = -1000 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} y_{\text{funcion}}(-1000) = \dfrac{16}{(-1000+1)^2} = 0'000016032 \\ y_{\text{asintota}}(-1000) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad y_{\text{funcion}}(-1000) > y_{\text{asintota}}(-1000)$$

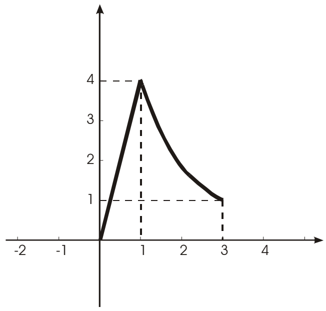
luego la gráfica de la función, para $x \to -\infty$, va por encima de la asíntota horizontal.

* Dos puntos inportantes son el (1, 4) y el (3, 1). Una aproximación de la gráfica es la situada al lado.

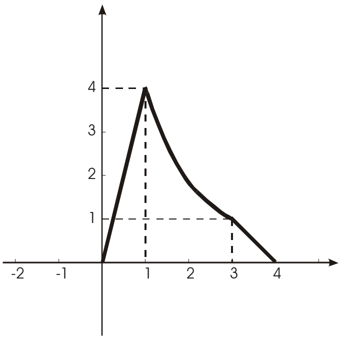



Pero de toda la gráfica sólo nos interesa la parte correspondiente al dominio particular o conjunto de valores comprendidos entre 1 y 3, $1 < x < 3$.

La gráfica del primer trozo y la de este segundo es la situada al lado.




Terminemos de representar el último trozo, $y = 4 - x$, trozo que se corresponde con el de una función afín, es decir, su gráfica es una recta que no pasa por el origen.




Dos puntos importantes son los que se encuentran en los extremos del intervalo donde está definida. O sea, el punto (3, 1) y el (4, 0).

Finalmente, la gráfica de *f(x)* es la situada al lado.

**(b)** El área que nos piden es:

$$\text{Área} = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^3 f(x)\,dx + \int_3^4 f(x)\,dx = \int_0^1 4x\,dx + \int_1^3 \frac{16}{(x+1)^2}\,dx + \int_3^4 (4-x)\,dx =$$

$$= \left[\frac{4x^2}{2}\right]_0^1 + 16\int_1^3 (x+1)^{-2}\,dx + \left[4x - \frac{x^2}{2}\right]_3^4 = \left[2x^2\right]_0^1 + 16\left[\frac{(x+1)^{-1}}{-1}\right]_1^3 + \left[4x - \frac{x^2}{2}\right]_3^4 =$$

$$= 2 - 0 + 16\left(-\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) + 16 - 8 - \left(12 - \frac{9}{2}\right) = 2 + 16 \bullet \frac{1}{4} + 8 - \frac{15}{2} = 14 - \frac{15}{2} = \frac{13}{2}\ .$$

## SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

Elijamos un punto cualquiera $X$ de la función $f(x) = 3x - 2$; dicho punto por pertenecer precisamente a la función tendrá de coordenadas, $(x, 3x - 2)$.

Construyamos la función distancia de P(2, 6) a $X$:

$$\text{dist (P, } X) = \sqrt{(x-2)^2 + (3x-2-6)^2} \quad \Rightarrow \quad \text{dist (P, } X) = \sqrt{x^2 + 4 - 4x + 9x^2 + 64 - 48x}$$

$$\text{dist (P, } X) = \sqrt{10x^2 - 52x + 68} \quad \Rightarrow \quad D(x) = \sqrt{10x^2 - 52x + 68}\ .$$

Calculemos el dominio de esta función, es decir, los valores que hagan al radicando mayor que cero. Veamos los que lo hagan cero:

$$10x^2 - 52x + 68 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{52 \pm \sqrt{2704 - 2720}}{20} = \frac{52 \pm \sqrt{-16}}{20} = \text{no hay ningún valor.}$$

Probamos con un valor cualquiera, por ejemplo, el 0, y observamos que el radicando es positivo, lo que significa que lo será para cualquier valor de $x$, por tanto, el dominio es $\mathbb{R}$. No obstante, en el contexto del problema, el dominio es el interavo cerrado [0, 3]. Se trata además de la funión raíz cuadrada de una función polinómica, lo que implica que es continua y derivable en en dicho dominio.

Calculemos los máximos y mínimos absolutos de esta función. En primer lugar, obtendremos los relativos que se encontrarán entre los que anulen a la primera derivada:

$$D'(x) = \frac{20x-52}{\sqrt{10x^2-52x+68}} \Rightarrow 20x-52=0 \Rightarrow x=\frac{52}{20} \Rightarrow x=\frac{13}{5}$$

Comprobemos que este único valor que anula a la derivada es el mínimo relativo, para lo cual estudiamos la monotonía.

Construimos los dos intervalos posibles de monotonía: $\left[0,\ \frac{13}{5}\right)$ y $\left(\frac{13}{5},\ 3\right]$.

Sustituyamos un valor intermedio de cada uno de los intervalos, por ejemplo, 1 y 2´9, respectivamente, en la función primera derivada y según nos salga mayor o menor que cero, en el intervalo correspondiente la función será creciente o decreciente:

$$D'(1) = \frac{20\bullet 1-52}{\sqrt{10\bullet 1^2-52\bullet 1+68}} = \frac{-32}{\sqrt{108}} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Decreciente en } \left[0,\ \frac{13}{5}\right).$$

$$D'(2'9) = \frac{20\bullet 2'9-52}{\sqrt{10\bullet 2'9^2-52\bullet 2'9+68}} = \frac{6}{\sqrt{1'3}} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Creciente en } \left(\frac{13}{5},\ 3\right].$$

A la vista de todo lo anterior, el valor que anulaba a la primera derivada no sólo es mínimo relativo sino también mínimo absoluto. Luego el punto de la gráfica de $f$ máscercano a P(2, 6) es el $\left(\frac{13}{5},\ \frac{\sqrt{10}}{5}\right)$. Donde la ordenada del punto la hemos obtenido sustituyendo la abscisa $\frac{13}{5}$ en la función $D(x)$, es decir,

$$D\left(\frac{13}{5}\right) = \sqrt{10\left(\frac{13}{5}\right)^2-52\bullet\frac{13}{5}+68} = \sqrt{\frac{1690}{25}-\frac{676}{5}+68} = \sqrt{\frac{1690-3380+1700}{25}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

Para calcular el máximo absoluto, lo localizaremos entre los relativos (que no hay) o en los extremos del intervalo [0, 3], calculemos el valor de la función $D(x)$ en los extremos de dicho intervalo:

$$D(0) = \sqrt{10\bullet 0^2-52\bullet 0+68} = \sqrt{68} = 8'246$$

$$D(3) = \sqrt{10\bullet 3^2-52\bullet 3+68} = \sqrt{2} = 1'4142$$

luego el máximo absoluto se da en el punto de abscisa 0, o lo que es lo mismo, el punto más alejado de la gráfica de $f$ es el $\left(0,\ \sqrt{68}\right)$. Donde la ordenada del punto la hemos obtenido anteriormente.

## SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

En primer lugar, determinaremos todos los puntos que equidistan de A y B, serán los puntos del plano mediador de ambos puntos. La intersección de este plano con el que nos da el problema nos permitirá conocer qué puntos de este plano son los que equidistan de A y de B.

El punto medio, M$(a, b, c)$, del segmento que determinan A y B es:

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} \quad \Rightarrow \quad (a,b,c) - (3,0,-2) = (1,2,0) - (a,b,c) \quad \Rightarrow \begin{cases} a-3 = 1-a & \Rightarrow \quad a = 2 \\ b-0 = 2-b & \Rightarrow \quad b = 1 \\ c+2 = 0-c & \Rightarrow \quad c = -1 \end{cases}$$

luego el punto M tiene de coordenadas (2, 1, -1).

El vector normal al plano mediador será:

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} = (1,2,0) - (3,0,-2) = (-2,2,2)$$

Sustituyamos los coeficientes A, B y C de la ecuación general del plano mediador por las coordenadas del vector normal a dicho plano:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad \Rightarrow \quad -2x + 2y + 2z + D = 0$$

Este plano al pasar por el punto M(2, 1, -1), verificará lo siguiente:

$$-2\cdot 2 + 2\cdot 1 + 2(-1) + D = 0 \quad \Rightarrow \quad -4 + 2 - 2 + D = 0 \quad \Rightarrow \quad D = 4$$

luego la ecuación del plano mediador es: $-2x + 2y + 2z + 4 = 0$.

La intersección de este plano mediador con el que nos da el problema nos permitirá conocer los puntos de este plano que equidistan de A y B. Resolvamos el sistema formado por las ecuaciones de ambos planos.

$$\left.\begin{array}{r} -2x+2y+2z+4 = 0 \\ 2x-y+2z-1 = 0 \end{array}\right\}$$

Resolvamos el sistema mediante el método de reducción de Gauss-Jordan. Expresemos dicho sistema en forma matricial.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = -2 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] + [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 4 & -3 \end{array}\right)$$

Simplifiquemos la 1ª fila por -2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -3 \end{array}\right)$$

El sistema está triangulado inferiormente, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero, es un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas, nos sobra una, por lo que el sistema es un sistema compatible indeterminado uniparamétrico, es decir los dos planos se cortan en una recta. Por tanto, los puntos del plano $2x - y + 2z - 1 = 0$ que equidistan de A y B representan a una recta que vamos a determinarla en forma paramétrica. La incógnita que nos sobra, la $z$, la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2+z \\ 0 & 1 & -3-4z \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] + [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1-3z \\ 0 & 1 & -3-4z \end{array}\right)$$

La solución es: $x = -1-3z$ ; $y = -3-4z$.
Sustituyamos la incógnita secundaria, la $z$, por el parámetro $t$, tendremos finalmente la ecuación de la recta en paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} x = -1-3t \\ y = -3-4t \\ z = t \end{cases}$$

## SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

**(a)** La matriz A no tendrá inversa para los valores de λ que hagan al determinate de A cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda & 1 \end{vmatrix} = 1+\lambda^2-\lambda^2-\lambda^2 = 1-\lambda^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = -1 \end{cases}$$

luego hay dos valores de λ para los que la matriz A no tiene inversa, $\lambda=1$ y $\lambda=-1$.

**(b)** Calculemos la matriz inversa para $\lambda = -2$. Lo haremos mediante el método de Gauss, consistente en poner a la derecha de la matriz A la matriz unidad e intentar, mediante el uso transformaciones elementales, que aparezca la matriz unidad a la izquierda de A, la parte que quede a la derecha es la matriz inversa de A, $A^{-1}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] + 2· [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -3 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: -3 · [3ªf.] + 2 · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & 2 & -3 \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = -3 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: 3 · [1ªf.] + [3ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -6 & 0 & 7 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & 2 & -3 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -3 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] - 2 · [3ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & 2 & -3 \end{array}\right)$$

Dividamos la 1ª fila por 3.
Dividamos la 2ª y 3ª fila por -3.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{array}\right)$$

La matriz situada a la izquierda es la matriz unidad, luego la matriz de la derecha es la inversa de la matriz A, la matriz $A^{-1}$, es decir:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

| UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA<br>PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD | L.O.G.S.E.<br>MATEMÁTICAS II |
|---|---|

**Instrucciones**: a) **Duración**: 1 HORA y 30 MINUTOS.
b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
c) La puntuación de cada pregunta está indicada en las mismas.
d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
e) Puedes usar calculadora (puede ser programable o tener pantalla gráfica), pero todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

## MODELO 35 DE EXAMEN

### Opción A

**EJERCICIO 1**. [2´5 PUNTOS]. Se quiere dividir la región plana encerrada entre la parábola $y=x^2$ y la recta $y=1$ en dos regiones de igual área mediante una recta $y=a$. Halla el valor de $a$.

**EJERCICIO 2**. Sea $f$ la función definida para $x \neq 1$ por $f(x) = \dfrac{2x^2}{x-1}$

**(a)** [1 PUNTO]. Determina las asíntotas de la gráfica de $f$.

**(b)** [1 PUNTO]. Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de $f$.

**(c)** [0´5 PUNTOS]. Esboza la gráfica de $f$.

**EJERCICIO 3**. [2´5 PUNTOS]. De las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

determina cuáles tienen inversa y en los casos en que exista, calcula el **determinante** de dichas inversas.

**EJERCICIO 4**. [2´5 PUNTOS]. Determina el centro y el radio de la circunferencia que pasa por el origen de coordenadas, tiene su centro en el semieje positivo de abscisas y es tangente a la recta de ecuación $x+y=1$.

---

### Opción B

**EJERCICIO 1**. Sea $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x)=\begin{cases} 5x+10 & \text{si} \quad x\le -1 \\ x^2-2x+2 & \text{si} \quad x>-1 \end{cases}$$

**(a)** [1 PUNTO]. Esboza la gráfica de $f$.

**(b)** [1´5 PUNTOS]. Calcula el área de la región limitada por la gráfica de $f$, el eje de abscisas y la recta $x = 3$.

**EJERCICIO 2**. [2´5 PUNTOS]. Siendo Ln($x$) el logaritmo neperiano de $x$, calcula

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\mathrm{Ln}(x)}\right)$$

**EJERCICIO 3**. Considera $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -3\\ 0 & a & 2\\ a & -1 & a-2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, y $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

**(a)** [1 PUNTO]. Determina el rango de A en función del parámetro $a$.

**(b)** [0´75 PUNTOS]. Discute en función de $a$ el sistema, dado en forma matricial, $AX = B$

**(c)** [0´75 PUNTOS]. Resuelve $AX = B$ en los casos en que sea compatible indeterminado.

**EJERCICIO 4**. Considera los puntos

A(1, 0, 3), B(3, -1, 0), C(0, -1, 2) y D($a$, $b$, -1).

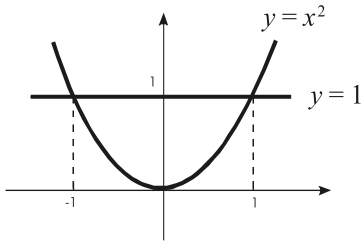
Halla $a$ y $b$ sabiendo que la recta que pasa por A y B corta perpendicularmente a la recta que pasa por C y D.

---

**SOLUCIONES Opción A**

## SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-

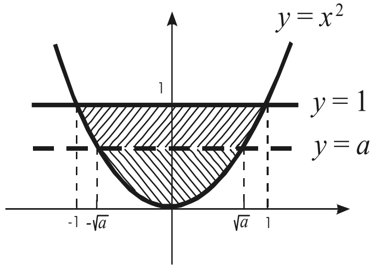
Representemos en primer lugar la gráfica de la función elemental $y = x^2$, que es una parábola, y la de la función $y = 1$, que es una recta paralela al eje de abscisas. Los puntos de corte de ambas funciones son:




$$\left.\begin{array}{l} y=x^2 \\ y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x^2=1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x=1 & \Rightarrow \quad (1,\ 1) \\ x=-1 & \Rightarrow \quad (-1,\ 1) \end{cases}$$

La gráfica de ambas funciones están representadas al lado. El problema es dividir el recinto que delimitan en dos regiones de igual área mediante la recta $y = a$.

Esta nueva situación la tenemos representada al lado. Los puntos de corte de esta recta y la de la función $y = x^2$ son:




$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = a \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 = a \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \sqrt{a} \Rightarrow (1, \sqrt{a}) \\ x = -\sqrt{a} \Rightarrow (-1, \sqrt{a}) \end{array}\right.$$

En el dibujo podemos observar las dos regiones diferentemente rayadas y que han tener igual área.

Calculemos el área encerrada por la curva $y = x^2$ y la recta $y = 1$, para ello integramos la función diferencia entre - 1 y 1:

$$\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right) dx = \left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = 1-\frac{1}{3}-\left(-1-\frac{(-1)^3}{3}\right) = \frac{2}{3}-\left(-1+\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

Calculemos ahora el área encerrada por la curva $y = x^2$ y la recta $y = a$, que será la mitad del área anterior, es decir, $\dfrac{2}{3}$ ; procederemos de forma análoga:

$$\int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}}\left(a - x^2\right) dx = \left[ax - \frac{x^3}{3}\right]_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} = a\sqrt{a} - \frac{\left(\sqrt{a}\right)^3}{3} - \left(-a\sqrt{a} - \frac{\left(-\sqrt{a}\right)^3}{3}\right) =$$

$$= a\sqrt{a} - \frac{a\sqrt{a}}{3} + a\sqrt{a} - \frac{a\sqrt{a}}{3} = \left(1-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3}\right) a\sqrt{a} = \frac{4}{3}a\sqrt{a}$$

pero como dijimos antes esta área es igual a $\dfrac{2}{3}$ , por tanto:

$$\frac{4}{3}a\sqrt{a} = \frac{2}{3} \Rightarrow a\sqrt{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{a^3} = \frac{1}{2} \Rightarrow a^3 = \frac{1}{4} \Rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} .$$

## SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

**(a)** Asíntotas Verticales.

Para que existan asíntotas verticales se ha de satisfacer que: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$

Comprobemos si existen; en principio, hay que buscarlas entre los valores que anulen al denominador, $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$. Veámoslo.

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x^2}{x-1} = \frac{2}{1-1} = \frac{2}{0} = \infty \qquad \Rightarrow \quad \text{Hay un asíntota vertical: } x = 1.$$

Estudiemos la posición de la gráfica de $f$ respecto de la asíntota vertical

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x \to 1^- \\ x<1}} \dfrac{2x^2}{x-1} = \dfrac{2}{1^- - 1} = \dfrac{2}{-0} = -\infty \\ \\ \lim\limits_{\substack{x \to 1^+ \\ x>1}} \dfrac{2x^2}{x-1} = \dfrac{2}{1^+ - 1} = \dfrac{2}{+0} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow$$

La función $f(x)$ tiende a $-\infty$ cuando $x$ se acerca a 1 por la izquierda, y a $+\infty$ cuando lo hace por la derecha.

- Asíntotas horizontales.

Para que exista asíntota horizontal se ha de satisfacer que: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$

Comprobemos si existe.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2}{x-1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{4x}{1} = \infty \quad \Rightarrow \quad \text{No existe asíntota horizontal.}$$

La indeterminación de infinito partido por infinito se ha destruido aplicando la Regla de L´Hôpital, que consiste en derivar el numerador y el denominador independientemente el uno del otro.

No existe asíntota horizontal, pero se da la condición necesaria para que pueda existir asíntota oblicua.

- Asíntotas Oblicuas.

Calculemos la ecuación de la posible asíntota oblicua: $y$ = m$x$ + n. Comencemos obteniendo el valor de m y después el de la n:

$$\text{m} = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2x^2}{x-1}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2}{x(x-1)} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2}{x^2 - x} = 2$$

Calculemos ahora n:

$$\text{n} = \lim_{x \to \infty} \big(f(x) - mx\big) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x^2}{x-1} - 2x\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 - 2x^2 + 2x}{x-1} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{x-1} = 2$$

La asíntota oblicua, es: $y = 2x + 2$.

Estudiemos la posición de la gráfica de $f$ respecto de la asíntota oblicua.

* Para valores de $x$ muy grandes, por ejemplo, $x$ = 1000 $\Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} f(1000) &= \frac{2 \bullet 1000^2}{1000-1} = 2002'002002 \\ y_{\text{asíntota}} &= 2 \bullet 1000 + 2 = 2002 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(1000) > y_{\text{asíntota}}$$

luego la gráfica de $f$, para $x \to +\infty$, va por encima de la asíntota oblicua.

* Para valores de $x$ muy pequeños, por ejemplo, $x$ = - 1000 $\Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} f(-1000) &= \frac{2 \bullet (-1000)^2}{-1000-1} = -1998'001998 \\ y_{\text{asíntota}} &= 2 \bullet (-1000) + 2 = -1998 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(-1000) < y_{\text{asíntota}}$$

luego la gráfica de $f$, para $x \to -\infty$, va por debajo de la asíntota oblicua.

**(b)** Determinemos los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f$. Hallemos los valores que anulen a la función primera derivada de $f(x)$.

$$f'(x) = \frac{4x(x-1) - 2x^2}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x^2 - 4x}{(x-1)^2} \Rightarrow 2x^2 - 4x = 0 \Rightarrow 2x(x-2) \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Con estos dos puntos, 0 y 2, y con el punto donde la función no existe, 1, los ordenamos y construimos los posibles intervalos de monotonía: (-∞, 0), (0, 1), (1, 2) y (2, +∞).

Probemos un valor intermedio de cada uno de los intervalos, por ejemplo, $-1$, $0'5$, $1'5$ y $3$ respectivamente en la función primera derivada y según nos salga mayor o menor que cero, en el intervalo correspondiente la función será creciente o decreciente:

$$\begin{cases} f'(-1) = \dfrac{2\bullet(-1)^2 - 4(-1)}{(-1-1)^2} = \dfrac{6}{4} > 0 & \Rightarrow \text{ creciente en } (-\infty,\ 0) \\ f'(0'5) = \dfrac{2\bullet 0'5^2 - 4\bullet 0'5}{(0'5-1)^2} = \dfrac{-1'5}{0'25} < 0 & \Rightarrow \text{ decreciente en } (0,\ 1) \\ f'(1'5) = \dfrac{2\bullet 1'5^2 - 4\bullet 1'5}{(1'5-1)^2} = \dfrac{-1'5}{0'25} < 0 & \Rightarrow \text{ decreciente en } (1,\ 2) \\ f'(3) = \dfrac{2\bullet 3^2 - 4\bullet 3}{(3-1)^2} = \dfrac{6}{4} > 0 & \Rightarrow \text{ creciente en } (2,\ +\infty) \end{cases}$$

Estudiemos los extremos locales. Éstos sólo se podrán localizar en los puntos de derivada cero, ya que la función es continua y derivable en todo su dominio que es $\mathbb{R} - \{1\}$.

Teniendo en cuenta lo analizado hasta ahora podemos asegurar que hay un máximo local en $x = 0$, y un mínimo local en $x = 2$.

Las ordenadas de estos extremos son:

$$f(0) = \frac{2\bullet 0^2}{0-1} = \frac{0}{-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Máximo en } (0, 0).$$

$$f(2) = \frac{2\bullet 2^2}{2-1} = \frac{8}{1} = 8 \quad \Rightarrow \quad \text{Mínimo en } (2, 8).$$

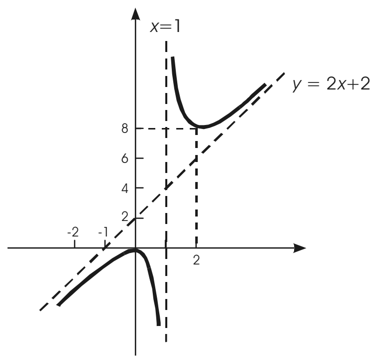
**(c)** Comprobemos si la asíntota oblicua y la función se cortan en algún punto.

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{2x^2}{x-1} \\ y = 2x+2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \frac{2x^2}{x-1} = 2x+2 \quad \Rightarrow$$

$$2x^2 = 2x^2 - 2x + 2x - 2 \quad \Rightarrow \quad 0 \neq -2$$

luego no hay ningún punto de corte.

Con todos los datos de los apartados anteriores podemos dibujar la gráfica de $f(x)$ que es la que está situada al lado (Se han usado distintas escalas en los ejes para una mejor visualización).




## SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

Para determinar si tiene o no matriz inversa una matriz A, lo haremos mediante el método de Gauss, consistente en poner a la derecha de la matriz A, la matriz unidad e intentar que aparezca, mediante el uso de diversas transformaciones elementales, la matriz unidad a la izquierda, si apareciese, la parte que quede a la derecha es la matriz inversa de A, $A^{-1}$.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Diagonalicemos.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 3 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = -2 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] + [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

Dividamos la 2ª fila por -2.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

En la parte de la izquierda hemos obtenido la matriz unidad, por lo que la matriz A tiene inversa, siendo la matriz inversa, $A^{-1}$, la matriz que queda a la derecha, es decir:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

El determinante de esta matriz es:

$$\left|A^{-1}\right| = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$$

La matriz B no tiene inversa porque de entrada no es ni siquiera una matriz cuadrada.

Veamos ahora la matriz C.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Diagonalicemos.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 3 · [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

En la parte de la izquierda **no** hemos obtenido la matriz unidad, sino que ha salido toda una fila de ceros, por lo que la matriz C **no** tiene inversa.

Esto mismo hubiésemos obtenido al observar la matriz C, ya que la 2ª fila es múltipla de la 1ª por lo que no tiene inversa, tal como hemos deducido anteriormente.

Analicemos, por último, la matriz D.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Al estar diagonalizada, sabemos ya que tiene inversa.
Calculémosla triangulando superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{33} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] - 2 · [3ªf.]
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] - 3 · [3ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: [1ªf.] - 2 · [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

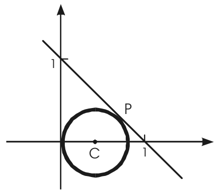
En la parte de la izquierda hemos obtenido la matriz unidad, por lo que la matriz D tiene inversa, siendo la matriz inversa, $D^{-1}$, la matriz que queda a la derecha, es decir:

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculemos el determinante de esta matriz inversa.

$$\left|D^{-1}\right| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

## SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-




Al estar el centro de la circunferencia en el semieje positivo de abscisas, las coordenadas del mismo serán C = $(a, 0)$, siendo $a > 0$. Como además la circunferencia pasa por el origen de coordenadas, el radio, $r$, de la misma coincide con el valor de la abscisa del centro, es decir con $a$, por tanto $r = a$.

La ecuación de la recta tangente en forma general es: $y + x - 1 = 0$.

Se verificará que la distancia de C a la recta tangente coincide con el radio y con $a$:

$$\text{dist (C, recta tangente)} = \left|\frac{a+0-1}{\sqrt{1^2+1^2}}\right| \quad \Rightarrow \quad a = \left|\frac{a-1}{\sqrt{2}}\right|$$

Si nos fijamos en los datos del problema y observamos la figura, deduciremos que la abscisa $a$ del centro de la circunferencia, es mayor que cero pero también menor que 1, por lo que $a - 1$ sería negativo; como tenemos que tomar el valor absoluto, escribiremos lo siguiente:

$$a = \frac{-(a-1)}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2}\,a = 1 - a \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2}\,a + a = 1 \quad \Rightarrow \quad (\sqrt{2}+1)a = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{1+\sqrt{2}}$$

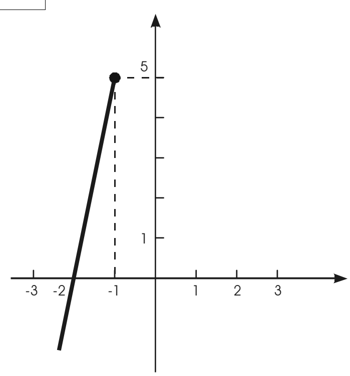
$$a = \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)\,(\sqrt{2}-1)} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{\sqrt{2}-1}{2-1} \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{2}-1 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{2}-1$$

luego el centro tiene de coordenadas $C = \left(\sqrt{2}-1,\ 0\right)$ y el radio vale $\sqrt{2}-1$.

---

**SOLUCIONES Opción B**

## SOLUCIÓN EJERCICIO 1.-




**(a)** Dibujemos el primer trozo, $5x + 10$, para los valores de $x \leq -1$. Se trata de una recta que pasa por los puntos, $(-2, 0)$ y $(-1, 5)$. La gráfica es la situada al lado.

Dibujemos el segundo trozo, $x^2 - 2x + 10$, para los valores de $x > -1$. Se trata de una parábola:

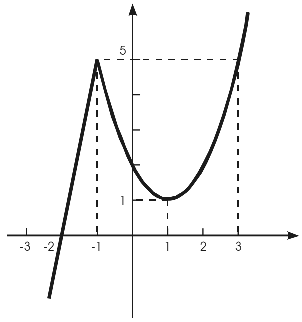
abscisa del vértice $= \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{2}{2} = 1$

ordenada del vértice $= 1^2 - 2 \cdot 1 + 2 = 1$

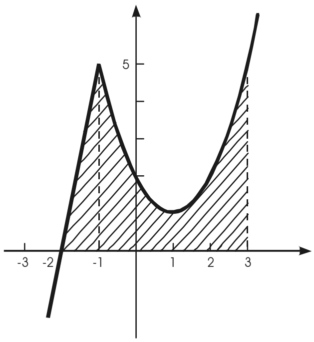
Luego el vértice V tiene de coordenadas (1, 1).

Otros puntos de interés son el (- 1, 5), (0, 2) y el (3, 5).

La gráfica de este trozo de función junto con la del primer trozo está representada al lado.




**(b)** El recinto cuya área nos pide el ejercicio, es el que se encuentra rayado en el gráfico adjunto.




Calculemos dicha área.

$$\text{Área} = \int_{-2}^{-1} (5x+10)\,dx \;+\; \int_{-1}^{3} \left(x^2 - 2x + 2\right) dx =$$

$$= \left[ 5\frac{x^2}{2} + 10x \right]_{-2}^{-1} + \left[ \frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^{3} =$$

$$= \frac{5}{2} - 10 - (10-20) + \left( \frac{27}{3} - 9 + 6 \right) - \left( -\frac{1}{3} - 1 - 2 \right) = \frac{71}{6}\,.$$

# SOLUCIÓN EJERCICIO 2.-

Calculemos el siguiente límite.

$$\lim_{x\to 1} \left( \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\mathrm{Ln}(x)} \right) = \left[ \frac{1}{0} - \frac{1}{0} \right] = [\infty - \infty] = \lim_{x\to 1} \left( \frac{x\,\mathrm{Ln}(x) - (x-1)}{(x-1)\,\mathrm{Ln}(x)} \right) = \lim_{x\to 1} \left( \frac{x\,\mathrm{Ln}(x) - x + 1}{(x-1)\ \mathrm{Ln}(x)} \right) =$$

$$= \frac{1 \bullet 0 - 1 + 1}{0} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x\to 1} \left( \frac{\mathrm{Ln}(x) + x \bullet \frac{1}{x} - 1}{\mathrm{Ln}(x) + (x-1)\frac{1}{x}} \right) = \lim_{x\to 1} \left( \frac{\mathrm{Ln}(x) + 1 - 1}{\mathrm{Ln}(x) + \frac{x-1}{x}} \right) = \lim_{x\to 1} \left( \frac{x\ \mathrm{Ln}(x)}{x\ \mathrm{Ln}(x) + x - 1} \right) =$$

$$= \frac{1 \bullet 0}{1 \bullet 0 + 1 - 1} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x\to 1} \left( \frac{\mathrm{Ln}(x) + \frac{x}{x}}{\mathrm{Ln}(x) + \frac{x}{x} + 1} \right) = \lim_{x\to 1} \left( \frac{\mathrm{Ln}(x) + 1}{\mathrm{Ln}(x) + 1 + 1} \right) = \frac{0+1}{0+1+1} = \frac{1}{2}\,.$$

# SOLUCIÓN EJERCICIO 3.-

**(a)** Determinaremos el rango de la matriz A mediante el método de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & a & 2 \\ a & -1 & a-2 \end{pmatrix}$$

Triangulemos inferiormente.

Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.

Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - $a$ · [1ªf.]

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & a & 2 \\ 0 & -1+2a & 4a-2 \end{pmatrix}$$

Intercambiemos entre sí las columnas 2ª y 3ª.

$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & a \\ 0 & 4a-2 & -1+2a \end{pmatrix}$ Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 2 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - $(2a-2)$ · [2ªf.]

$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & a \\ 0 & 0 & -2a^2+3a-1 \end{pmatrix}$ La matriz está triangulada inferiormente. Todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero, salvo el $a_{33}$ que puede serlo. Estudiemos los casos que pueden presentarse.

* Si $a_{33} = 0 \Rightarrow -2a^2 + 3a - 1 = 0 \Rightarrow a = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{-4} = \dfrac{-3 \pm 1}{-4} = \begin{cases} \dfrac{1}{2} \\ 1 \end{cases} \Rightarrow$

para estos dos valores de $a$, 1 y $\dfrac{1}{2}$, la última fila sería una fila de ceros, y la matriz A tendría de rango dos, R(A) = 2.

* Si $a_{33} \neq 0 \Rightarrow a \neq 1$ y $a \neq \dfrac{1}{2} \Rightarrow$ para cualquier valor de $a$ distinto de 1 y de $\dfrac{1}{2}$, todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero, y la matriz A tendrá de rango tres, R(A) = 3.

**(b)** Discutamos el siguiente sistema, según los valores de $a$.

$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & a & 2 \\ a & -1 & a-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Lo haremos mediante el método de reducción de Gauss. Expresemos el sistema en forma matricial.

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & a & 2 & 0 \\ a & -1 & a-2 & 1 \end{array}\right)$ Triangulemos inferiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - $a$ · [1ªf.]

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & a & 2 & 0 \\ 0 & -1+2a & 4a-2 & 1-a \end{array}\right)$ Intercambiemos entre sí las columnas 2ª y 3ª.

$\begin{array}{ccc} (x) & (z) & (y) \end{array}$
$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & a & 0 \\ 0 & 4a-2 & 2a-1 & 1-a \end{array}\right)$ Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 2 \neq 0$.
Sustituyamos la 3ª fila por: [3ªf.] - $(2a-2)$ · [2ªf.]

$\begin{array}{ccc} (x) & (z) & (y) \end{array}$
$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & a & 0 \\ 0 & 0 & -2a^2+3a-1 & 1-a \end{array}\right)$ La matriz está triangulada inferiormente. Todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero, salvo el $a_{33}$ que puede serlo. Estudiemos los diferentes casos que pueden presentarse.

* Si $a_{33} = 0 \Rightarrow -2a^2 + 3a - 1 = 0 \Rightarrow a = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{-4} = \dfrac{-3 \pm 1}{-4} = \begin{cases} \dfrac{1}{2} \\ 1 \end{cases}$

** Si $a = \frac{1}{2}$ , la última ecuación sería $0 = 1 - \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $0 = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ se trata de una ecuación absurda, por lo que el sistema es un sistema incompatible, no tiene solución.

** Si $a = 1$, la última ecuación sería $0 = 1 - 1$ $\Rightarrow$ $0 = 0$ $\Rightarrow$ se trata de una ecuación trivial, la eliminamos y nos queda un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas, es decir, un sistema compatible indeterminado uniparamétrico.

* Si $a_{33} \neq 0$ $\Rightarrow$ $a \neq 1$ y $a \neq \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ para cualquier valor de $a$ distinto de 1 y de $\frac{1}{2}$ , todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero, tendríamos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, el sistema es un sistema compatible determinado, con solución única.

**(c)** Resolvamos el sistema en el caso de compatible indeterminado, es decir, cuando $a$=1. Sustituyamos este valor en el sistema matricial que obtuvimos al final de la discusión del apartado anterior, recordando además que la última ecuación era trivial y la eliminamos.

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} (x) & (z) & (y) \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

La incógnita que nos sobra, la $y$, la pasamos al segundo miembro como incógnita no principal o secundaria.

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} (x) & (z) \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 1+2y \\ 0 & 2 & -y \end{array}\right) \end{array}$$

Triangulemos superiormente.
Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 2 \neq 0$.
Sustituyamos la 1ª fila por: $2 \cdot [1^a f.] + 3 \cdot [2^a f.]$

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} (x) & (z) \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 2+y \\ 0 & 2 & -y \end{array}\right) \end{array}$$

La solución del sistema es:

$2x = 2 + y$ ; $2z = -y$

Terminemos de depejar $x$ y $z$, y sustituyamos la incógnita secundaria, $y$, por un parámetro, por ejemplo por $\alpha$:

$$x = 1 + \frac{1}{2}\alpha \quad ; \quad y = \alpha \quad ; \quad z = -\frac{1}{2}\alpha .$$

## SOLUCIÓN EJERCICIO 4.-

Si la recta que pasa por los puntos A y B es perpendicular a la que pasa por C y D, significa que los vectores de dirección de ambas rectas son perpendiculares, lo que implica que su producto escalar es cero:

$$\overrightarrow{AB} = (3, -1, 0) - (1, 0, 3) = (2, -1, -3) \quad ; \quad \overrightarrow{CD} = (a, b, -1) - (0, -1, 2) = (a, b+1, -3)$$

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD} \ \Rightarrow\ \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{CD} = 0 \ \Rightarrow\ (2, -1, -3) \bullet (a, b+1, -3) = 0 \ \Rightarrow\ 2a - b - 1 + 9 = 0 \ \Rightarrow$$

$$2a - b = -8 \qquad [1]$$

Hemos obtenido una condición, debemos obtener otra.

Si las dos rectas se cortan entonces los 4 puntos, A, B, C y D, son coplanarios, o lo que es lo mismo, los tres vectores, $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$, que determinan los cuatro puntos son linealmente dependientes:

$$\overrightarrow{AC} = (0,-1,2)-(1,0,3) = (-1,-1,-1) \quad ; \quad \overrightarrow{AD} = (a,b,-1)-(1,0,3) = (a-1,b,-4)$$

Si los tres vectores deben ser linealmente dependientes, el determinante formado con ellos tiene que ser cero.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & -1 \\ a-1 & b & -4 \end{vmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; 8+a-1+3b-\big(3(a-1)-4-2b\big)=0 \;\Rightarrow\; -2a+5b=-14$$

Con la condición [1] y con esta última formamos un sistema de ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{r} 2a-b=-8 \\ -2a+5b=-14 \end{array}\right\}$$

Expresemos el sistema en forma matricial y resolvámoslo mediante el método de reducción de Gauss-Jordan.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & -8 \\ -2 & 5 & -14 \end{array}\right)$$

Triangulemos inferiormente.

Tomemos como pivote el elemento $a_{11} = 2 \neq 0$.

Sustituyamos la 2ª fila por: [2ªf.] + [1ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & -8 \\ 0 & 4 & -22 \end{array}\right)$$

Simplifiquemos la 2ª fila por 2.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & -11 \end{array}\right)$$

Triangulemos superiormente.

Tomemos como pivote el elemento $a_{22} = 2 \neq 0$.

Sustituyamos la 1ª fila por: 2 · [1ªf.] + [2ªf.]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 0 & -27 \\ 0 & 2 & -11 \end{array}\right)$$

La solución del sistema es:

$$4a = -27 \quad ; \quad 2b = -11$$

Terminemos de despejar $a$ y $b$:

$$a = -\frac{27}{4} \quad ; \quad b = -\frac{11}{2}$$