Problemas resueltos correspondientes a la selectividad de Matemáticas II de junio de 2009, Andalucía

Pedro González Ruiz

septiembre de 2011

1. Opción A

Problema 1.1 Calcular el siguiente límite (ln denota logaritmo neperiano):

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{2}{x^2-1}\right)$$

Sea

$$l=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{2}{x^2-1}\right)=\frac{1}{\ln 1}-\frac{2}{1^2-1}=\frac{1}{0}-\frac{2}{0}=\infty-\infty$$

es decir, indeterminado. Efectuando la diferencia:

$$l=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1-2\ln x}{(x^2-1)\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1-\ln x}{(x-1)(x+1)\ln x}$$

El factor $x+1$ es irrelevante, pues $\lim_{x\to 1}(x+1)=2$, y usando la equivalencia $\ln x\sim x-1$, cuando $x\to 1$ (ver tabla de equivalencias, en el documento `calculodelimites.pdf`), resulta:

$$l=\frac{1}{2}\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1-2\ln x}{(x-1)^2}=\{\text{L'Höpital}\}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 1}\frac{2x-2\cdot\frac{1}{x}}{2(x-1)}=\{\text{simplificando}\}=$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x(x-1)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x(x-1)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1}=1$$

luego $l=1$.

Problema 1.2 Sea $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x)=x|x-1|$$

1. Esbozar la gráfica de f.
2. Comprobar que la recta de ecuación $y=x$ es la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=0$.
3. Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de f y la de dicha tangente.

Desarrollamos f utilizando la definición de valor absoluto:

$$|u|=\begin{cases}-u, & \text{si } u<0\\ u, & \text{si } u\geq 0\end{cases}\Longrightarrow |x-1|=\begin{cases}-x+1, & \text{si } x<1\\ x-1, & \text{si } x\geq 1\end{cases}$$

luego

$$f(x) = \begin{cases} x(1-x), & \text{si } x < 1 \\ x(x-1), & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Para obtener la gráfica de f hay que dibujar cada uno de los trozos, en concreto, las parábolas:

$$p_1(x) = x(1-x),\ x < 1;\ p_2(x) = x(x-1),\ x \geq 1$$

Comencemos con $y = p_1(x) = x(1-x) = x - x^2$. Para $x = 0$ es $y = 0$, y si $y = 0$, entonces:

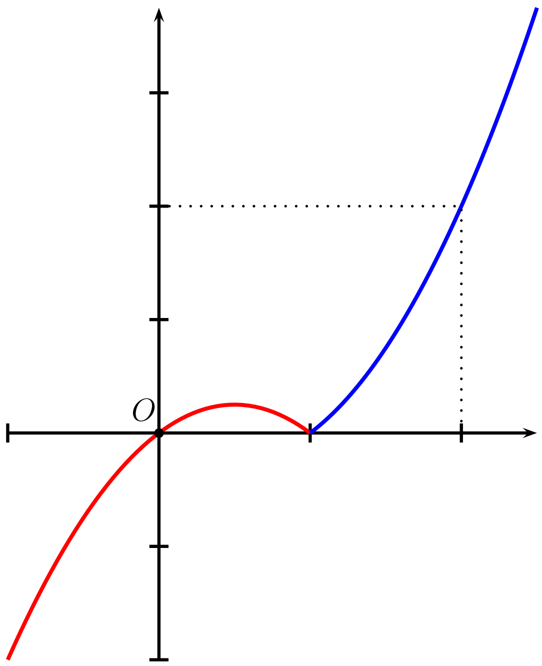
$$x(1-x) = 0 \Longrightarrow x = 0, 1$$

luego los cortes con con los ejes son $(0,0)$ y $(1,0)$. Calculemos el vértice:

$$p_1'(x) = 1 - 2x \Longrightarrow 1 - 2x = 0 \Longrightarrow x = \frac{1}{2}$$

y como $p_1''(x) = -2 < 0$, p_1 es cóncava y el vértice es un máximo de valor $p_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$, es decir $V_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$. Es sencillo comprobar que p_1 crece para $x < \frac{1}{2}$ y decrece para $x > \frac{1}{2}$.

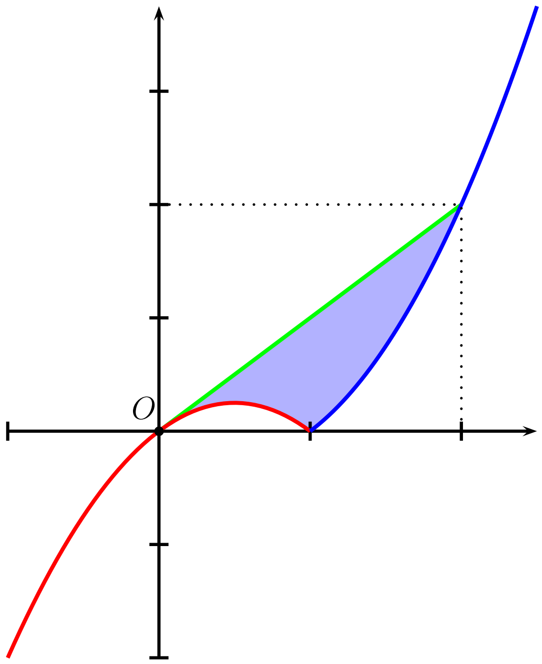
Sigamos con $y = p_2(x) = x(x-1) = x^2 - x$, para $x \geq 1$. Para $x = 1$ es $y = p_2(1) = 0$, luego p_2 pasa por $(1,0)$. Además $p_2'(x) = 2x - 1$, y como $x \geq 1$, p_2 crece en $I = [1, +\infty[$. Por último $p_2''(x) = 2 > 0$, luego p_2 es convexa en I, y la gráfica de f es (en rojo p_1 y en azul p_2):



Para el apartado segundo, la recta tangente de f en $x = 0$, es la recta tangente de p_1 en $x = 0$, es decir:

$$y = p_1(0) + p_1'(0)(x - 0) = \left\{ \begin{matrix} p_1(0) = 0 \\ p_1'(0) = 1 \end{matrix} \right\} = 0 + 1(x - 0) = x$$

Por último, la gráfica conjunta de f y la recta tangente (en verde) es:



El área del recinto pedido es pues:

$$S = \int_0^2 \big(x - f(x)\big)\,dx = \int_0^1 \big(x - p_1(x)\big)\,dx + \int_1^2 \big(x - p_2(x)\big)\,dx = S_1 + S_2$$

donde

$$S_1 = \int_0^1 \big(x - p_1(x)\big)\,dx = \int_0^1 \big(x - x(1-x)\big)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$
$$S_2 = \int_1^2 \big(x - p_2(x)\big)\,dx = \int_1^2 \big(x - x(x-1)\big)\,dx = \int_1^2 (2x - x^2)\,dx = \frac{2}{3}$$

Por consiguiente:

$$S = S_1 + S_2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$$

Problema 1.3 Sean F_1, F_2 y F_3 las filas primera, segunda y tercera, respectivamente, de una matriz B de orden 3, cuyo determinante vale -2. Calcular, indicando las propiedades utilizadas:

1. El determinante de B^{-1}.
2. El determinante de $(B^t)^4$ (B^t es la matriz traspuesta de B).
3. El determinante de $2B$.
4. El determinante de una matriz cuadrada C cuyas filas primera, segunda y tercera son, respectivamente, $5F_1 - F_3$, $3F_3$, F_2.

Sea

$$B = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}, \quad |B| = -2$$

1. Como $|B| \neq 0$, existe B^{-1}, y como $|B^{-1}| = \dfrac{1}{|B|}$, resulta:

$$|B^{-1}| = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

2. Teniendo en cuenta que $|B^t| = |B|$ y que $|B^n| = |B|^n$, para todo entero n, es:

$$|(B^t)^4| = |B^t|^4 = |B|^4 = (-2)^4 = 16$$

3. Dada una matriz cuadrada A de orden n, sabemos que para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$, es:

$$|\lambda \cdot A| = \lambda^n \cdot |A|$$

   En nuestro caso es $n = 3$, luego:

$$|2B| = 2^3|B| = 8|B| = 8 \cdot (-2) = -16$$

4. Por último, sea

$$A = \begin{pmatrix} 5F_1 - F_3 \\ 3F_3 \\ F_2 \end{pmatrix}$$

   Entonces:

$$|A| = \begin{vmatrix} 5F_1 - F_3 \\ 3F_3 \\ F_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5F_1 \\ 3F_3 \\ F_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} F_3 \\ 3F_3 \\ F_2 \end{vmatrix}$$

   El segundo determinante es cero, pues la primera y segunda fila son proporcionales, luego

$$|A| = \begin{vmatrix} 5F_1 \\ 3F_3 \\ F_2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 \begin{vmatrix} F_1 \\ F_3 \\ F_2 \end{vmatrix} = 15 \cdot \begin{vmatrix} F_1 \\ F_3 \\ F_2 \end{vmatrix}$$

   En este último, permutamos la segunda y tercera filas, con lo cual, el determinante cambia de signo, por tanto:

$$|A| = -15 \cdot \begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{vmatrix} = -15 \cdot |B| = (-15) \cdot (-2) = 30$$

Problema 1.4 Se consideran las rectas r y s definidas como:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = \lambda - 2 \end{cases}, \quad s \equiv \begin{cases} x = \mu \\ y = \mu - 1 \\ z = -1 \end{cases}$$

Hallar la ecuación de la perpendicular común a r y a s.

Las rectas r y s en forma punto–vector director son:

$$r \equiv \begin{cases} R(1, 1, -2) \\ \vec{u} = (0, 0, 1) \end{cases}, \quad s \equiv \begin{cases} S(0, -1, -1) \\ \vec{v} = (1, 1, 0) \end{cases}$$

Para evitar trivialidades, comprobemos que las rectas se cruzan, lo cual ocurrirá cuando el determinante $|\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{RS}|\neq 0$. En efecto:

$$|\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{RS}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Sea p la recta que nos piden. Por ser p perpendicular a r y s, un vector director de p es:

$$\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1,1,0)$$

Sea $X(x,y,z)$ un punto cualquiera de p. Como p corta a r, es $|\vec{w},\vec{u},\overrightarrow{RX}| = 0$, es decir:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & x-1 \\ 1 & 0 & y-1 \\ 0 & 1 & z+2 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \{\text{desarrollando y simplificando}\} \Longrightarrow x+y=2$$

Como p corta a s, es $|\vec{w},\vec{v},\overrightarrow{SX}| = 0$, es decir:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & x \\ 1 & 1 & y+1 \\ 0 & 0 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \{\text{desarrollando y simplificando}\} \Longrightarrow z+1=0$$

y obtenemos p como intersección de dos planos, es decir:

$$p \equiv \begin{cases} x+y=2 \\ z+1=0 \end{cases} \tag{1}$$

Aquí damos el problema por acabado. No obstante, vamos a hacer algunas comprobaciones para asegurar la fiabilidad del resultado.

Parametrizamos p mediante (1) para comprobar que el vector director resultante de la parametrización es $\vec{w}$ o alguna combinación lineal de el. En efecto, tomando $x=t$, es:

$$p \equiv \begin{cases} x=t \\ y=2-t \\ z=-1 \end{cases}$$

y el vector director es $\vec{w_1} = (1,-1,0) = -\vec{w}$.

Sea P_1 el punto de corte de r y p, es decir, $P_1 = r \cap p$. Juntándolo todo:

$$x+y=2,\ z+1=0,\ x=1,\ y=1,\ z=\lambda-2$$

y resolviendo este sistema elemental resulta $x=1$, $y=1$, $z=-1$, luego $P_1(1,1,-1)$.

Sea P_2 el punto de corte de s y p, es decir, $P_1 = s \cap p$. Juntándolo todo:

$$x+y=2,\ z+1=0,\ x=\mu,\ y=\mu-1,\ z=-1$$

tenemos:

$$2 = x+y = \mu+\mu-1 = 2\mu-1 \Longrightarrow 3 = 2\mu \Longrightarrow \mu = \frac{3}{2}$$

luego $P_2\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2},-1\right)$.

Una última comprobación, el vector $\overrightarrow{P_1P_2}$ debe ser una combinación lineal de $\vec{w}$, veámoslo:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \left(\frac{3}{2}-1,\frac{1}{2}-1,-1+1\right) = \left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right) = -\frac{1}{2}\vec{w}$$

2. Opción B

Problema 2.1 Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1}, & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 3x - 1, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

1. Estudiar la continuidad y derivabilidad de f.
2. Determinar sus asíntotas y extremos relativos.
3. Esbozar la gráfica de f

El trozo $\dfrac{1}{x-1}$ es continuo siempre que $x \neq 1$, pero el valor $x = 1$ no nos afecta, pues ha de ser $x < 0$. El segundo trozo, $x^2 - 3x - 1$, es un polinomio, y por tanto, continuo, luego f es continua en todo $\mathbb{R}$. También es derivable en todo $\mathbb{R}$, salvo quizás en $x = 0$, punto de separación de los dos trozos. Tenemos:

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{(x-1)^2}, & \text{si } x < 0 \\ 2x - 3, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Como $f'(0^-) = \dfrac{-1}{(0-1)^2} = -1$ y $f'(0^+) = 2 \cdot 0 - 3 = -3$, f no es derivable en $x = 0$. En conclusión:

$$f \text{ es continua en } \mathbb{R}, \ f \text{ es derivable en } \mathbb{R} - \{0\}.$$

Para la segunda parte, al ser f continua en todo $\mathbb{R}$, no tiene asíntotas verticales. Como

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x-1} = 0$$

la recta $y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$. No existen asíntotas oblicuas.

El trozo $f_1(x) = \dfrac{1}{x-1}$ es tal que $f_1'(x) = -\dfrac{1}{(x-1)^2} < 0$, luego f_1 decrece en $I =]-\infty, 0[$, y por consiguiente, f no tiene extremos en I.

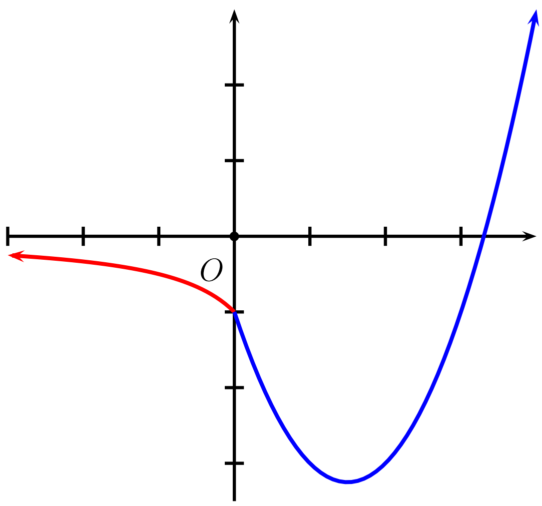
Sea $f_2(x) = x^2 - 3x - 1$, con $x \in J = [0, +\infty[$. Derivando:

$$f_2'(x) = 2x - 3 \Longrightarrow 2x - 3 = 0 \Longrightarrow x = \frac{3}{2}$$

y como $f_2''(x) = 2 > 0$, el punto $x = \frac{3}{2}$ es un mínimo local de valor

$$f_2\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3}{2} - 1 = -\frac{13}{4}$$

es decir, el punto $M\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{13}{4}\right)$ es un mínimo local. Juntando todos los resultados, la gráfica resultante es (en rojo f_1 y en azul f_2):



Problema 2.2 Considerar la curva de ecuación $y = x^3 - 3x$.

1. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto de abscisa $x = -1$.
2. Calcular el área del recinto limitado por la curva dada y la recta $y = 2$.

Sea $y = f(x) = x^3 - 3x$. La recta tangente en $x = -1$ es:

$$y = f(-1) + f'(-1)(x+1)$$

Ahora bien, $f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) = -1 + 3 = 2$. Por otro lado:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1) \Longrightarrow f'(-1) = 0$$

y la recta tangente queda como:

$$y = 2 + 0 \cdot (x+1) = 2, \text{ es decir, } y = 2$$

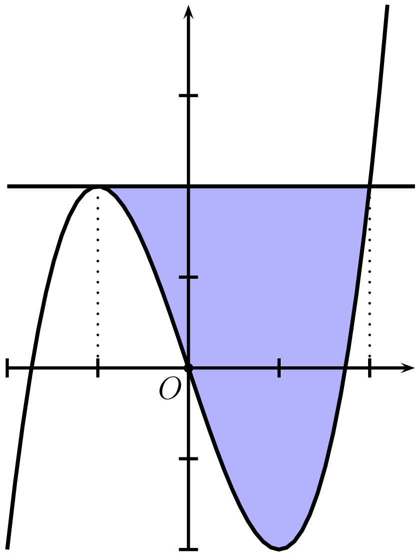
Para el cálculo del área, tenemos que dibujar el recinto de integración. La función f es impar, luego nos limitamos al intervalo $x \in [0, +\infty[$, y los valores negativos de x no se tendrán en cuenta. Tenemos:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 3x = x(x^2-3) = x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) \\ f'(x) &= 3(x-1)(x+1) \\ f''(x) &= 6x \end{aligned}$$

La tabla de variaciones de estas funciones es:

x	0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f(x)$	0	$-$	-2	$-$	0	$+$	$+\infty$
$f'(x)$		$- \searrow$	0	$+ \nearrow$		$+ \nearrow$	
$f''(x)$		$+$		$+$		$+$	

Por consiguiente, el recinto es:



La superficie S es:

$$S = \int_{-1}^{2} \left[2 - (x^3 - 3x)\right]\, dx = \int_{-1}^{2} (2 - x^3 + 3x)\, dx = \left[2x - \frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2}\right]_{-1}^{2} = \frac{27}{4}$$

Problema 2.3 Una empresa envasadora ha comprado un total de 1 500 cajas de pescado en tres mercados diferentes, a un precio por caja de 30, 20 y 40 euros respectivamente. El coste total de la operación ha sido de 40 500 euros. Calcular cuánto ha pagado la empresa en cada mercado, sabiendo que en el primero de ellos ha comprado el 30 % de las cajas.

Sean

$$x = \text{número de cajas compradas en el mercado primero}$$
$$y = \text{número de cajas compradas en el mercado segundo}$$
$$z = \text{número de cajas compradas en el mercado tercero}$$

Por el enunciado del problema es $x + y + z = 1500$, $30x + 20y + 40z = 40500$. Simplificando:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1500 \\ 3x + 2y + 4z &= 4050 \end{aligned} \tag{2}$$

Además:

$$x = 30\,\%(1500) = \frac{30 \cdot 1500}{100} = 450$$

Sustituyendo en (2) y simplificando, resulta:

$$\begin{aligned} y + z &= 1050 \\ y + 2z &= 1350 \end{aligned}$$

sistema elemental cuya solución es $y = 750$, $z = 300$. En conclusión:

En el primer mercado se pagó $450 \cdot 30 = 13\,500$ euros
En el segundo mercado se pagó $750 \cdot 20 = 15\,000$ euros
En el tercer mercado se pagó $300 \cdot 40 = 12\,000$ euros

Problema 2.4 Consideremos la recta r definida por $\begin{cases} x+y=2 \\ y+z=0 \end{cases}$ y la recta s que pasa por los puntos $A(2,1,0)$ y $B(1,0,-1)$.

1. Estudiar la posición relativa de r y s.
2. Determinar un punto C de la recta r tal que los segmentos $\overline{CA}$ y $\overline{CB}$ sean perpendiculares.

Parametrizamos r tomando $y=t$, luego $x=2-y=2-t$, $z=-y=-t$, es decir:

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x=2-t \\ y=t \\ z=-t \end{array} \right\} \Longrightarrow r \equiv \begin{cases} P(2,0,0) \\ \vec{u}=(-1,1,-1) \end{cases}$$

Un vector director de s es $\vec{v}=\overrightarrow{BA}=(1,1,1)$, luego:

$$s \equiv \begin{cases} A(2,1,0) \\ \vec{v}=(1,1,1) \end{cases}$$

Calculemos el rango de la matriz

$$T=(\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{AP}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Es sencillo comprobar que $|T|=0$, luego el rango de T es <3, y como $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, el rango de T es 2, luego **las rectas se cortan**.

Para la segunda parte, como $C \in r$, C es de la forma $C(2-t,t,-t)$ para un cierto $t \in \mathbb{R}$. En fin:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CA} &= (2-(2-t), 1-t, t) = (t, 1-t, t) \\ \overrightarrow{CB} &= (1-(2-t), -t, -1+t) = (t-1, -t, t-1) \end{aligned}$$

Por tanto:

$$0 = \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = t(t-1) - t(1-t) + t(t-1) = 3t(t-1) \Longrightarrow t = 0, 1$$

es decir, dos soluciones que corresponden a los puntos:

$$t=0 \Longrightarrow C(2-t,t,-t) = C(2,0,0) \; ; \quad t=1 \Longrightarrow C(2-t,t,-t) = C(1,1,-1)$$

Problemas resueltos correspondientes a la selectividad de Matemáticas II de septiembre de 2009, Andalucía

Pedro González Ruiz

septiembre de 2011

1. Opción A

Problema 1.1 Se considera la función $f:[1,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x)=\sqrt{x^2-x}+x$$

Determinar la asíntota de la gráfica de f.

Como f es continua, no tiene asíntotas verticales. Por otro lado:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x}+x)=+\infty$$

luego f no tiene asíntotas horizontales. Veamos la oblicua. Estas son del tipo

$$y=mx+n,\ \text{con } m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x},\ n=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx)$$

En fin:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-x}+x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\sqrt{x^2-x}}{x}\right)=$$
$$=1+\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2-x}{x^2}}=1+\sqrt{\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x}{x^2}}=1+\sqrt{1}=2$$

Hemos obtenido que $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=2$, o lo que es lo mismo, $f(x)\sim 2x$, cuando $x\to+\infty$.

Por otro lado:

$$n=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x}+x-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-x\right)=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2-x}-x)(\sqrt{x^2-x}+x)}{\sqrt{x^2-x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x-x^2}{f(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{f(x)}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{2x}=-\frac{1}{2}$$

luego la única asíntota es

$$y=2x-\frac{1}{2}$$

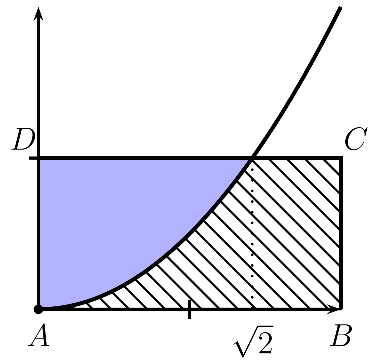
Problema 1.2 La curva $y = \dfrac{x^2}{2}$ divide al rectángulo R de vértices $A = (0,0)$, $B = (2,0)$, $C = (2,1)$ y $D = (0,1)$ en dos recintos.

1. Dibujar dichos recintos.
2. Hallar el área de cada uno de ellos.

Sea $f(x) = \dfrac{x^2}{2}$. La gráfica de f es una parábola, f es par. Pasa por el origen $A(0,0)$, el cual es el vértice. Suponemos $x \geq 0$, pues el rectángulo $ABCD$ está situado en el primer cuadrante. Como $f'(x) = x$, f crece en $[0, +\infty[$, y al ser $f''(x) = 1 > 0$, f es convexa. Calculemos el punto de corte con la recta $y = 1$:

$$\frac{x^2}{2} = 1 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{2}, \text{ es decir, } x = \sqrt{2}$$

En definitiva, el recinto es:



Finalmente:

$$S_{\text{sombreada}} = \int_0^{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) dx = \left[x - \frac{x^3}{6}\right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Como la superficie del rectángulo $ABCD$ es 2, resulta:

$$S_{\text{rayada}} = 2 - \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{6 - 2\sqrt{2}}{3}$$

Problema 1.3 Discutir según los valores del parámetro λ el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} 3x + \lambda y &= 0 \\ x + \lambda z &= \lambda \\ x + y + 3z &= 1 \end{aligned}$$

y resolverlo para $\lambda = 0$.

Las matrices de los coeficientes y ampliada son:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & \lambda & 0 \\ 1 & 0 & \lambda \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A' = \begin{pmatrix} 3 & \lambda & 0 & \vdots & 0 \\ 1 & 0 & \lambda & \vdots & \lambda \\ 1 & 1 & 3 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$$

Los puntos verticales muestran la separación entre la matriz de los coeficientes y la ampliada. Desarrollando, resulta: $|A| = \lambda(\lambda - 6)$, luego

$$|A| = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 0, 6$$

Por tanto:

- Si $\lambda \neq 0, 6 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow r = r(A) = 3$. La matriz ampliada también tiene rango 3, y el número de incógnitas n también es 3. En definitiva, el sistema es de Cramer, y tiene por tanto solución única.

- Para $\lambda = 0$, es $|A| = 0$, luego $r = r(A) < 3$. La matriz ampliada es

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

  La primera y segunda filas son proporcionales. Eliminamos pues aquella, con lo que la matriz se queda en:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

  El rango de esta matriz es 2, luego, $r = r(A) = r(A') = 2$, el número de incógnitas es $n = 3$, por tanto, el sistema es compatible con infinitas soluciones dependientes de $n - r = 3 - 2 = 1$ parámetro. Con la última matriz, el sistema queda como $x = 0$, $x + y + 3z = 1$, o bien $y + 3z = 1$. Llamando $z = t \Longrightarrow y = 1 - 3t$, y las soluciones son:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 - 3t \\ z = t \end{cases}$$

- Para $\lambda = 6$, es $|A| = 0$, luego $r(A) < 3$. La matriz ampliada es

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

  Para el cálculo de los rangos, vamos a utilizar la **reducción gaussiana**, y para ello, recordamos las operaciones elementales de fila:

  1. C_{ij} = cambiar las filas i, j.
  2. $M_i(k)$ = multiplicar la fila i por el número $k \neq 0$.
  3. $S_{ij}(k)$ = sumar a la fila i la fila j multiplicada por el número k.

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ M_1\left(\frac{1}{3}\right) \right\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \{S_{21}(-1), S_{31}(-1)\} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & 6 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ M_2\left(\frac{1}{2}\right) \right\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \{S_{32}(-1)\} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ M_3\left(-\frac{1}{2}\right) \right\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & -1 & 3 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$$

luego $r(A) = 2$, $r(A') = 3$, y el sistema es incompatible.

Problema 1.4 Consideremos el punto $P(1,0,0)$ y las rectas r y s definidas como

$$r \equiv x - 3 = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-2}, \quad s \equiv (x,y,z) = (1,1,0) + \lambda(-1,2,0)$$

- Estudiar la posición relativa de r y s.
- Hallar la ecuación del plano π que pasando por P es paralelo a r y a s.

Escribamos las rectas en forma punto–vector director. Primero r:

$$x - 3 = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-2} = t \Longrightarrow x = 3 + t,\ y = 2t,\ z = -1 - 2t \Longrightarrow r \equiv \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2t \\ z = -1 - 2t \end{cases}$$

Luego $r \equiv \begin{cases} Q(3,0,-1) \\ \vec{u} = (1,2,-2) \end{cases}$. También $s \equiv \begin{cases} R(1,1,0) \\ \vec{v} = (-1,2,0) \end{cases}$. Para estudiar la posición relativa de ambas consideremos la matriz:

$$A = (\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{RQ}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Es sencillo comprobar que $|A| = 2 \neq 0 \Longrightarrow r(A) = 3$, por consiguiente, las rectas se cruzan.

Para la segunda parte, como las rectas r y s son paralelas a π, los vectores directores de r y s son también vectores directores de π, luego:

$$\pi \equiv \left\{ \begin{array}{l} P(1,0,0) \\ \vec{u} = (1,2,-2) \\ \vec{v} = (-1,2,0) \end{array} \right\} \Longrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando y simplificando, obtenemos:

$$\pi \equiv 2x + y + 2z - 2 = 0$$

2. Opción B

Problema 2.1 De entre todos los rectángulos cuya área mide 16 cm^2, determinar las dimensiones del que tiene la diagonal de menor longitud.

Sea x la longitud de la base del rectángulo e y su altura. Sea D la longitud de la diagonal (función a minimizar). Por el teorema de Pitágoras:

$$D^2 = x^2 + y^2 \Longrightarrow D = \sqrt{x^2 + y^2}$$

La superficie es $x \cdot y$, por tanto, la ecuación de condición es:

$$x \cdot y = 16 \Longrightarrow y = \frac{16}{x} \tag{1}$$

Minimizar D es lo mismo que minimizar $H = D^2$, con lo cual nos evitamos las raíces cuadradas. Sustituyendo (1) en H, obtenemos:

$$H = D^2 = x^2 + y^2 = x^2 + \frac{256}{x^2}$$

Derivando:

$$H'(x) = 2x - \frac{512}{x^3} = \frac{2x^4 - 512}{x^3}$$

luego ha de ser

$$2x^4 - 512 = 0 \Longrightarrow x = 4$$

Derivando otra vez:

$$H''(x) = 2 + \frac{1536}{x^4}$$

Como $H''(4) > 0$, el punto $x = 4$ es un mínimo. Sustituyendo en (1), resulta $y = 4$. En conclusión:

$$x = y = 4 \text{ (cuadrado de lado 4)}$$

Problema 2.2 Sea f la función definida por:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{4 - 9x^4}}$$

Hallar la primitiva F de f que cumple $F(0) = 3$.

Sugerencia: utilizar el cambio de variable $t = \dfrac{3x^2}{2}$.

Tenemos:

$$t = \frac{3}{2}x^2 \Longrightarrow dt = \frac{3}{2} \cdot 2x\,dx \Longrightarrow x\,dx = \frac{dt}{3}$$

Además:

$$\sqrt{4 - 9x^4} = \left\{ x^2 = \frac{2t}{3} \right\} = \sqrt{4 - 9 \cdot \frac{4t^2}{9}} = \sqrt{4 - 4t^2} = \sqrt{4(1 - t^2)} = 2\sqrt{1 - t^2}$$

Por tanto:

$$\int \frac{x}{\sqrt{4 - 9x^4}}\,dx = \int \frac{\frac{dt}{3}}{2\sqrt{1 - t^2}} = \frac{1}{6}\int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \frac{1}{6}\operatorname{arc\,sen} t$$

Deshaciendo el cambio:

$$F(x) = \frac{1}{6}\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{3x^2}{2}\right) + C$$

Por último:

$$3 = F(0) = C + \frac{1}{6}\operatorname{arc\,sen} 0 = C + 0 = C \Longrightarrow C = 3$$

En conclusión:

$$F(x) = \frac{1}{6}\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{3x^2}{2}\right) + 3$$

Problema 2.3 Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Determinar la matriz X que verifica $AX - B^t = 2C$ (B^t es la matriz traspuesta de B).

Es sencillo comprobar que $|A| = 4$, luego existe la matriz inversa A^{-1}. Despejemos X:

$$A \cdot X = B^t + 2C \Longrightarrow X = A^{-1}(B^t + 2C)$$

Calculemos A^{-1}:

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

También:

$$B^t + 2C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Por último:

$$X = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 18 \\ 7 & 30 \end{pmatrix}$$

Problema 2.4 Se consideran las rectas r y s definidas como:

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{r} x - y + 3 = 0 \\ x + y - z - 1 = 0 \end{array} \right., \quad s \equiv \left\{ \begin{array}{r} 2y + 1 = 0 \\ x - 2z + 3 = 0 \end{array} \right.$$

1. Determinar la ecuación del plano π que contiene a r y es paralelo a s.

2. ¿Existe algún plano que contenga a r y sea perpendicular a s?. Razonar la respuesta.

Parametrizamos r y s para conseguir la forma punto–vector. En r, sea $y = t$, luego:

$$x - y + 3 = 0 \Longrightarrow x = -3 + y = -3 + t$$
$$x + y - z - 1 = 0 \Longrightarrow -3 + t + t - z - 1 = 0 \Longrightarrow z = -4 + 2t$$

luego:

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = -3 + t \\ y = t \\ z = -4 + 2t \end{array} \right\} \equiv \left\{ \begin{array}{l} P(-3, 0, -4) \\ \vec{u} = (1, 1, 2) \end{array} \right.$$

Ahora s, llamando $z = t$, es:

$$s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = -3 + 2t \\ y = -\dfrac{1}{2} \\ z = t \end{array} \right\} \equiv \left\{ \begin{array}{l} Q\left(-3, -\dfrac{1}{2}, 0\right) \\ \vec{v} = (2, 0, 1) \end{array} \right.$$

Como $r \subset \pi$, el punto y vector de r valen para π, y como $s \parallel \pi$, el vector $\vec{v}$ es también un vector director de π, luego:

$$\pi \equiv \left\{ \begin{array}{l} P(-3, 0, -4) \\ \vec{u} = (1, 1, 2) \\ \vec{v} = (2, 0, 1) \end{array} \right\} \Longrightarrow \begin{vmatrix} x + 3 & y & z + 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando y simplificando:

$$\pi \equiv x + 3y - 2z - 5 = 0$$

Para la segunda parte, si existiera tal plano, los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ deberían ser perpendiculares, ahora bien:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (1, 1, 2) \cdot (2, 0, 1) = 2 + 2 = 4 \neq 0$$

luego **no existe tal plano**.

Selectividad matemáticas Junio

Pedro González Ruiz

junio de 2010

1. Opción A

Problema 1.1 Sea f la función definida como

$$f(x) = \frac{ax^2+b}{a-x}, \quad \text{para } x \neq a$$

1. Calcular a y b para que la gráfica de f pase por el punto $(2,3)$ y tenga una asíntota oblicua con pendiente -4.
2. Para el caso $a=2$, $b=3$, obtener la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=1$.

Tenemos

$$3 = f(2) = \frac{4a+b}{a-2} \Longrightarrow 3a-6 = 4a+b \Longrightarrow a+b = -6$$

Por el algoritmo de la división polinómica, el cociente $c(x)$ entre ax^2+b y $-x+a$ es $c(x) = -ax-a^2$, luego la asíntota oblicua es $y=-ax-a^2$. Por tanto:

$$m = -4 = y' = -a \Longrightarrow a = 4$$

Sustituyendo en $a+b=-6$ resulta $b=-10$.

Para $a=2$, $b=3$ es $f(x) = \dfrac{2x^2+3}{2-x}$. La recta tangente en $x=1$ es $y = f(1)+f'(1)(x-1)$. Ahora bien:

$$f(1) = \frac{2+3}{2-1} = 5, \quad f'(x) = \frac{4x(2-x)+2x^2+3}{(2-x)^2} \Longrightarrow f'(1) = \frac{4\cdot 1+2+3}{1^2} = 9$$

luego, $y = f(1)+f'(1)(x-1) = 5+9(x-1) = 9x-4$, es decir, $y=9x-4$.

Problema 1.2 Calcular

$$\int_0^{\pi^2} \operatorname{sen}(\sqrt{x})\,dx$$

Sugerencia: efectuar el cambio $\sqrt{x}=t$.

Tenemos

$$I = \int_0^{\pi^2} \operatorname{sen}(\sqrt{x})\,dx = \left\{ \begin{array}{c} x = t^2 \\ dx = 2t\,dt \end{array} \right\} = 2\int_0^{\pi} t \operatorname{sen} t\,dt$$

Integrando por partes:

$$\int t \operatorname{sen} t\, dt = \left\{ \begin{array}{c} f(t) = t \\ g'(t) = \operatorname{sen} t \\ g(t) = -\cos t \\ f'(t) = 1 \end{array} \right\} = -t\cos t + \int \cos t\, dt = -t\cos t + \operatorname{sen} t$$

luego

$$I = 2\left[-t\cos t + \operatorname{sen} t\right]_0^{\pi} = 2\pi$$

Problema 1.3 Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Indicar los valores de m para los que A es invertible.
2. Resolver la ecuación matricial $XA - B^t = C$ para $m = 0$ (B^t es la matriz traspuesta de B).

Como $|A| = -(m-1)(m-3)$, resulta

$$A \text{ es invertible} \Longleftrightarrow m \neq 1 \wedge m \neq 3$$

Para $m = 0$ es $|A| = -3$ y:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^* = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 12 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

luego

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -12 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Por otro lado

$$XA - B^t = C \Longrightarrow XA = B^t + C \Longrightarrow X = (B^t + C)A^{-1}$$

Como

$$B^t + C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Finalmente

$$X = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -12 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -12 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 1.4 Sean las rectas

$$r \equiv x - 1 = y = 1 - z, \quad s \equiv \begin{cases} x - 2y = -1 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

1. Determinar el punto de corte.
2. Hallar el ángulo que forman r y s.
3. Determinar la ecuación del plano que contiene a r y s.

Resolviendo el sistema

$$\begin{aligned} x - y &= 1 \\ y + z &= 1 \\ x - 2y &= -1 \end{aligned}$$

resulta como punto de corte $P(3, 2, -1)$. Parametrizamos r:

$$x - 1 = y = 1 - z = t \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{array} \right\} \Longrightarrow \vec{u} = \{\text{vector director de } r\} = (1, 1, -1)$$

Parametrizamos s, llamando $y = t$:

$$s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = -1 + 2t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{array} \right\} \Longrightarrow \vec{v} = \{\text{vector director de } s\} = (2, 1, -1)$$

Si es $\varphi = \widehat{(r, s)}$, entonces

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}||}$$

Ahora bien

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot 2 + (1)(1) + (-1)(-1) = 4, ||\vec{u}|| = \sqrt{3},\ ||\vec{v}|| = \sqrt{6}$$

luego

$$\cos\varphi = \frac{4}{\sqrt{3}\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Longrightarrow \varphi = \arccos\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$$

Por último, el plano π que contiene a r y s es

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x - 3 & y - 2 & z + 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando y simplificando, resulta

$$\pi \equiv y + z = 1$$

2. Opción B

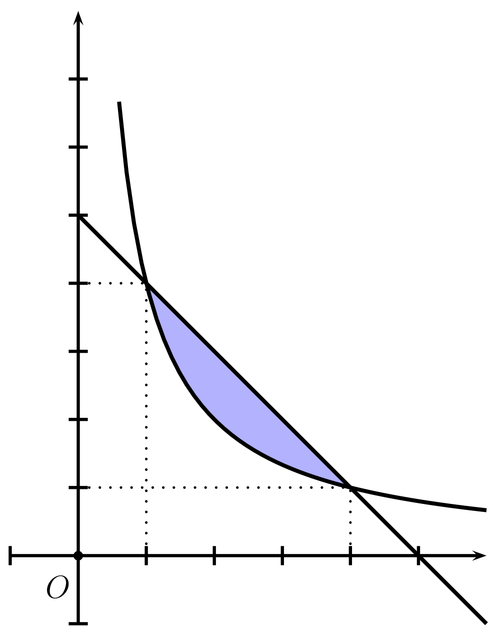
Problema 2.1 Calcular
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\operatorname{sen} x}}{x^2}$$

Tenemos
$$l=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\operatorname{sen} x}}{x^2}=\frac{e^0-e^0}{0^2}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}$$
Aplicando L'Höpital:
$$l=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x\cdot e^{\operatorname{sen} x}}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x\cdot e^{\operatorname{sen} x}}{x}$$
Vuelve a salir $\frac{0}{0}$. Aplicando L'Höpital otra vez:
$$l=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\left(-\operatorname{sen} x\cdot e^{\operatorname{sen} x}+\cos^2 x\cdot e^{\operatorname{sen} x}\right)}{1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-1}{1}=0$$
luego $l=0$.

Problema 2.2 Sean las funciones:
$$f(x)=5-x,\quad g(x)=\frac{4}{x},\text{ para } x\neq 0$$

1. Esboza el recinto limitado por las gráficas de f y g indicando sus puntos de corte.
2. Calcular el área de dicho recinto.

La gráfica de f es una recta, luego con dos puntos es suficiente, en concreto $(5,0)$ y $(0,5)$. Para g, la recta $x=0$ es una asíntota vertical. Como $\lim_{x\to\infty} g(x)=0$, la recta $y=0$ es una asíntota horizontal. Además $g'(x)=-\frac{4}{x^2}$, luego g decrece en todo su dominio. Los cortes de f y g son las raíces de la ecuación:
$$5-x=\frac{4}{x}\Longrightarrow\{\text{simplificando}\}\Longrightarrow x^2-5x+4=0\Longrightarrow x=1,4$$
En definitiva, el recinto es:



Por último, el área S de dicho recinto es:

$$S = \int_1^4 \left(5 - x - \frac{4}{x}\right) dx = \left[5x - \frac{x^2}{2} - 4\ln x\right]_1^4 = \frac{15}{2} - 8\ln 2$$

Problema 2.3 Sea el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \lambda x + y + z &= \lambda + 2 \\ 2x - \lambda y + z &= 2 \\ x - y + \lambda z &= \lambda \end{aligned}$$

1. Discutirlo según los valores de λ. ¿Tiene siempre solución?.
2. Resolver el sistema para $\lambda = -1$.

La matriz de los coeficientes es:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 1 & -1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Como $|A| = -(\lambda^3 + 1)$, resulta que

$$|A| = 0 \Longleftrightarrow \lambda^3 + 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = -1$$

luego

- Si $\lambda \neq -1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow r(A) = 3$. La matriz ampliada también tiene rango 3, y el número de incógnitas también es 3. En definitiva, el sistema es de Cramer, y tiene por tanto solución única.
- Para $\lambda = -1$, es $|A| = 0$, luego $r(A) < 3$. La matriz ampliada es

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

  La tercera fila es la opuesta de la primera, luego la eliminamos. Como $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, es $r = r(A) = r(A') = 2$, y como $n = \{\text{número de incógnitas}\} = 3$, el sistema es compatible con infinitas soluciones dependientes de $n - r = 3 - 2 = 1$ parámetro. Procedemos a resolverlo. Queda como:

$$\begin{aligned} -x + y + z &= 1 \\ 2x + y + z &= 2 \end{aligned}$$

  Restando a la segunda la primera obtenemos $x = \frac{1}{3}$. Sustituyendo en cualquiera de las dos es $y + z = \frac{4}{3}$. Tomando $z = t$, resulta finalmente:

$$x = \frac{1}{3},\ y = t,\ z = \frac{4}{3} - t$$

En cualquiera de los dos casos el sistema es compatible, y por consiguiente, tiene siempre solución.

Problema 2.4 Los puntos $P(2,0,0)$ y $Q(-1,12,4)$ son dos vértices de un triángulo. El tercer vértice S pertenece a la recta:

$$r \equiv \begin{cases} 4x + 3z = 33 \\ y = 0 \end{cases}$$

1. Calcular las coordenadas del punto S sabiendo que r es perpendicular a la recta que pasa por P y S.

2. Comprobar si el triángulo es rectángulo.

Parametrizamos r, y para evitar fracciones, tomamos $x = 3t$, luego

$$12t + 3z = 33 \Longrightarrow 4t + z = 11 \Longrightarrow z = 11 - 4t$$

luego

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 3t \\ y = 0 \\ z = 11 - 4t \end{array} \right\} \Longrightarrow \vec{u} = \{\text{vector director de } r\} = (3, 0, -4)$$

luego S es de la forma $S(3t, 0, 11 - 4t) \Longrightarrow \overrightarrow{PS} = (3t - 2, 0, 11 - 4t)$. Imponiendo que $\overrightarrow{PS} \perp \vec{u}$, resulta:

$$0 = \overrightarrow{PS} \cdot \vec{u} = 3(3t - 2) - 4(11 - 4t) = 0 = 25t - 50 \Longrightarrow t = 2$$

y por consiguiente $S = (3t, 0, 11 - 4t) = (6, 0, 3)$.

Por último

$$\overrightarrow{PS} = (4, 0, 3),\ \overrightarrow{PQ} = (-3, 12, 4) \Longrightarrow \overrightarrow{PS} \cdot \overrightarrow{PQ} = -12 + 12 = 0$$

luego el triángulo es rectángulo en P.

Selectividad Matemáticas II septiembre Andalucía

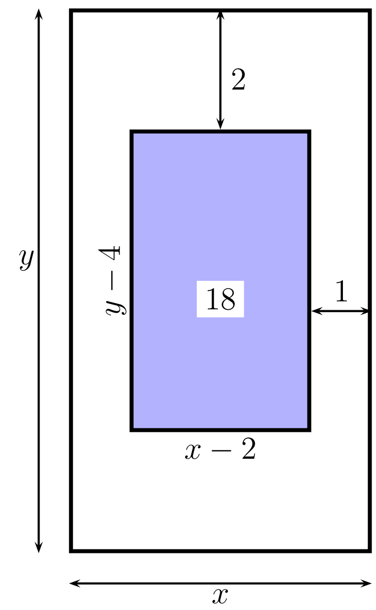
Pedro González Ruiz

septiembre de 2010

1. Opción A

Problema 1.1 Una hoja de papel tiene que contener 18 cm^2 de texto. Los márgenes superior e inferior han de tener 2 cm. cada uno y los laterales 1 cm. Calcular las dimensiones de la hoja para que el gasto de papel es mínimo.

Sean x la longitud horizontal e y la longitud vertical de la hoja. La función a minimizar es la superficie $S = x \cdot y$. Observando la figura:



el área del rectángulo sombreado es $(x-2)(y-4)$, luego la ecuación de condición es:

$$(x-2)(y-4) = 18$$

Despejando:

$$y - 4 = \frac{18}{x-2} \Longrightarrow y = 4 + \frac{18}{x-2} \tag{1}$$

luego

$$S = x \cdot y = x\left(4 + \frac{18}{x-2}\right)$$

Derivando y simplificando:

$$S'(x) = 4 \cdot \frac{x^2 - 4x - 5}{(x-2)^2}$$

Como ha de ser $S'(x) = 0$, resulta $x^2 - 4x - 5 = 0 \Longrightarrow x = -1, 5$, es decir, $x = 5$. Derivando otra vez:

$$S''(x) = \frac{72}{(x-2)^3} \Longrightarrow S''(5) = \frac{72}{3^3} > 0$$

luego $x = 5$ es un mínimo. Sustituyendo en (1), resulta:

$$y = 4 + \frac{18}{x-2} = 4 + \frac{18}{5-2} = 10$$

luego las dimensiones de la hoja son $x = 5$ cm, $y = 10$ cm.

Problema 1.2 Sea

$$I = \int \frac{5}{1 + \sqrt{e^{-x}}}\, dx$$

1. Expresar I haciendo el cambio de variable $t^2 = e^{-x}$.
2. Determinar I.

Tomando logaritmos neperianos en $t^2 = e^{-x}$:

$$2 \ln t = -x \Longrightarrow x = -2 \ln t \Longrightarrow dx = -\frac{2}{t}\, dt$$

Por tanto:

$$I = 5 \int \frac{-\frac{2}{t}}{1+t}\, dt = -10 \int \frac{1}{t(1+t)}\, dt$$

Descomponiendo en fracciones simples:

$$\frac{1}{t(1+t)} = \frac{(1+t) - t}{t(1+t)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}$$

Luego:

$$\int \frac{1}{t(1+t)}\, dt = \int \frac{1}{t}\, dt - \int \frac{1}{1+t}\, dt = \ln t - \ln(1+t) = \ln\left(\frac{t}{1+t}\right)$$

y por consiguiente

$$I = -10 \ln\left(\frac{t}{1+t}\right)$$

Deshaciendo el cambio:

$$\frac{t}{1+t} = \frac{e^{-x/2}}{1 + e^{-x/2}} = \frac{\frac{1}{e^{x/2}}}{1 + \frac{1}{e^{x/2}}} = \frac{\frac{1}{e^{x/2}}}{\frac{e^{x/2}+1}{e^{x/2}}} = \frac{1}{1 + e^{x/2}}$$

Por último:

$$I = -10 \int \frac{1}{t(1+t)}\, dt = -10 \cdot \ln\left(\frac{1}{1+e^{x/2}}\right) = 10 \cdot \ln(1 + e^{x/2})$$

En conclusión:

$$I = 10 \cdot \ln\left(1 + e^{x/2}\right) + C, \quad C = \text{constante arbitraria}$$

Problema 1.3 1. Discutir, según los valores del parámetro λ, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} -x + \lambda y + z &= \lambda \\ \lambda x + 2y + (\lambda+2)z &= 4 \\ x + 3y + 2z &= 6 - \lambda \end{aligned}$$

2. Resolver el sistema anterior para $\lambda = 0$.

Las matrices de los coeficientes y ampliada son:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 2 & \lambda+2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A' = \begin{pmatrix} -1 & \lambda & 1 & \vdots & \lambda \\ \lambda & 2 & \lambda+2 & \vdots & 4 \\ 1 & 3 & 2 & \vdots & 6-\lambda \end{pmatrix}$$

Los puntos verticales muestran la separación entre la matriz de los coeficientes y la ampliada. Desarrollando, resulta: $|A| = 8\lambda - \lambda^2 = \lambda(8-\lambda)$, luego

$$|A| = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 0, 8$$

Por tanto:

- Si $\lambda \neq 0, 8 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow r(A) = 3$. La matriz ampliada también tiene rango 3, y el número de incógnitas también es 3. En definitiva, el sistema es de Cramer, y tiene por tanto solución única.

- Para $\lambda = 8$, es $|A| = 0$, luego $r(A) < 3$. La matriz ampliada es

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 1 & 8 \\ 8 & 2 & 10 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Para el cálculo de los rangos, vamos a utilizar la **reducción gaussiana**, y para ello, recordamos las operaciones elementales de fila:

1. C_{ij} = cambiar las filas i, j.
2. $M_i(k)$ = multiplicar la fila i por el número $k \neq 0$.
3. $S_{ij}(k)$ = sumar a la fila i la fila j multiplicada por el número k.

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 1 & \vdots & 8 \\ 8 & 2 & 10 & \vdots & 4 \\ 1 & 3 & 2 & \vdots & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ M_2\left(\frac{1}{2}\right) \right\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 8 & 1 & \vdots & 8 \\ 4 & 1 & 5 & \vdots & 2 \\ 1 & 3 & 2 & \vdots & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \{S_{21}(4), S_{31}(1)\} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 8 & 1 & \vdots & 8 \\ 0 & 33 & 9 & \vdots & 34 \\ 0 & 11 & 3 & \vdots & 6 \end{pmatrix} \Longrightarrow \{C_{23}\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 8 & 1 & \vdots & 8 \\ 0 & 11 & 3 & \vdots & 6 \\ 0 & 33 & 9 & \vdots & 34 \end{pmatrix} \Longrightarrow \{S_{32}(-3)\} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 8 & 1 & \vdots & 8 \\ 0 & 11 & 3 & \vdots & 6 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 16 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ M_3\left(\frac{1}{16}\right) \right\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 8 & 1 & \vdots & 8 \\ 0 & 11 & 3 & \vdots & 6 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$$

luego $r(A) = 2$, $r(A') = 3$, y el sistema es incompatible.

- Para $\lambda = 0$, es $|A| = 0$, luego $r(A) < 3$. La matriz ampliada es

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 2 & 2 & \vdots & 4 \\ 1 & 3 & 2 & \vdots & 6 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ M_2\left(\frac{1}{2}\right), S_{31}(1) \right\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 3 & 3 & \vdots & 6 \end{pmatrix} \Longrightarrow \{S_{32}(-3)\} \Longrightarrow$$
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

luego $r(A) = 2$, $r(A') = 2$, y el sistema es compatible con infinitas soluciones dependientes de 1 parámetro. Con la última matriz, el sistema queda como $-x + z = 0$, $y + z = 2$. Llamando $z = t$, resulta:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2 - t \\ z = t \end{cases}$$

Problema 1.4 Hallar la ecuación del plano que es paralelo a la recta:

$$r \equiv \begin{cases} x - 2y + 11 = 0 \\ 2y + z - 19 = 0 \end{cases}$$

y contiene a la recta:

$$s \equiv \begin{cases} x = 1 - 5\lambda \\ y = -2 + 3\lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases}$$

Sea π el plano pedido. Parametrizamos r, tomando $y = t$, luego:

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = -11 + 2t \\ y = t \\ z = 19 - 2t \end{array} \right\} \Longrightarrow \vec{u} = \{\text{vector director de } r\} = (2, 1, -2)$$

Como $r \parallel \pi$, $\vec{u}$ es un vector director de π. Por otro lado

$$s \equiv \left\{ \begin{array}{l} P(1, -2, 2) \\ \vec{v} = (-5, 3, 2) \end{array} \right\} \Longrightarrow \pi \equiv \begin{cases} P(1, -2, 2) \\ \vec{u} = (2, 1, -2) \\ \vec{v} = (-5, 3, 2) \end{cases}$$

ya que $s \subset \pi$. Por consiguiente:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x - 1 & y + 2 & z - 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando y simplificando, resulta

$$\pi \equiv 8x + 6y + 11z - 18 = 0$$

2. Opción B

Problema 2.1 Consideremos la funcion $f : [0,4] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b, & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ cx, & \text{si } 2 < x \le 4 \end{cases}$$

1. Sabiendo que f es derivable en todo el dominio y que verifica $f(0) = f(4)$, determinar los valores de a, b, c.

2. Para $a = -3$, $b = 4$, $c = 1$, hallar los extremos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que alcanzan).

Como f es derivable en $[0,4]$, f es continua en $x = 2$, luego:

$$\left.\begin{array}{l} f(2^-) = 4 + 2a + b \\ f(2^+) = 2c \end{array}\right\} \Longrightarrow 4 + 2a + b = 2c \Longrightarrow 2a + b - 2c = -4$$

Derivando:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + a, & \text{si } 0 < x < 2 \\ c, & \text{si } 2 < x < 4 \end{cases}$$

Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-) = 4 + a \\ f'(2^+) = c \end{array}\right\} \Longrightarrow 4 + a = c \Longrightarrow a - c = -4$$

Por último:

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = b \\ f(4) = 4c \end{array}\right\} \Longrightarrow b = 4c \Longrightarrow b - 4c = 0$$

Resolviendo el sistema:

$$\begin{aligned} 2a + b - 2c &= -4 \\ a - c &= -4 \\ b - 4c &= 0 \end{aligned}$$

resulta $a = -3$, $b = 4$, $c = 1$, luego:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 4, & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ x, & \text{si } 2 \le x \le 4 \end{cases}$$

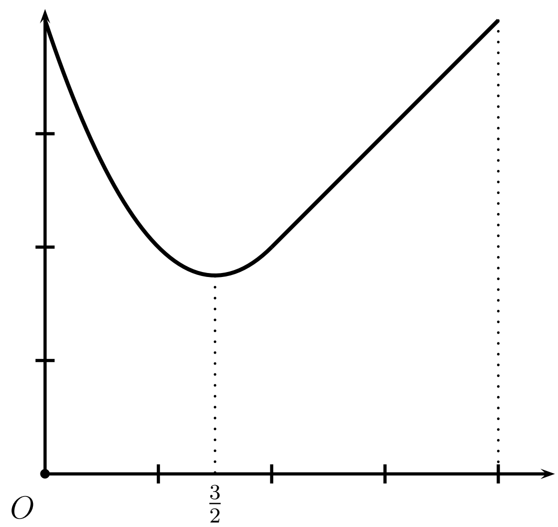
Para calcular los extremos absolutos, lo más sencillo es dibujar la gráfica de f. Sea $g(x) = x^2 - 3x + 4$, $x \in [0,2]$. La gráfica de g es una parábola. Calculemos el vértice:

$$g'(x) = 2x - 3 = 0 \Longrightarrow x = \frac{3}{2}$$

que cae dentro de $[0,2]$. Como $g''(x) = 2 > 0$, g es convexa y el vértice $x = \frac{3}{2}$ es un mínimo local de f, de valor:

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3}{2} + 4 = \frac{7}{4}$$

Si $x \in [2,4] \Longrightarrow f(x) = x$, que es una recta. En definitiva, la gráfica de f es:



y en conclusión: los puntos $(0,4)$, $(4,4)$ son máximos absolutos, y $\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right)$ es un mínimo local y absoluto.

Problema 2.2 Consideremos la funcion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 + 4$.

1. Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.
2. Esbozar el recinto limitado por la gráfica de f, el eje de ordenadas y la recta de ecuación $y = 2x + 3$. Calcular su área.

La recta tangente en $x = 1$ es $y = f(1) + f'(1)(x - 1)$. Ahora bien:

$$f(1) = 1^2 + 4 = 5, \quad f'(x) = 2x \Longrightarrow f'(1) = 2$$

luego

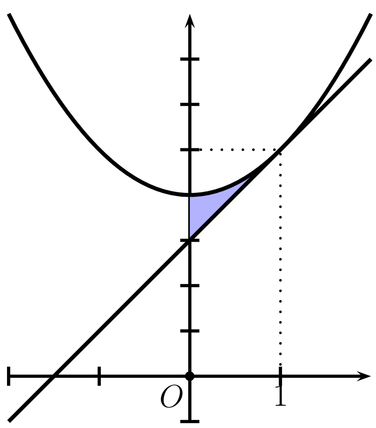
$$y = f(1) + f'(1)(x - 1) = 5 + 2(x - 1) = 2x + 3$$

es decir, $y = 2x + 3$.

La gráfica de f es una parábola. Calculemos su vértice:

$$f'(x) = 2x = 0 \Longrightarrow x = 0$$

Como $f''(x) = 2 > 0$, f es convexa y el vértice $x = 0$ es un mínimo local de valor $f(0) = 0^2 + 4 = 4$. Además, f decrece en $]-\infty, 0[$ y crece en $]0, +\infty[$. En fin, el recinto es:



Por último, el área es:

$$S = \int_0^1 \left[x^2 + 4 - (2x+3)\right]\,dx = \int_0^1 (x-1)^2\,dx = \left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Problema 2.3 Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Calcular la matriz X que cumpla la ecuación $A \cdot X \cdot B = C$.

Como $|A| = 1$ y $|B| = -1$, A y B son inversibles, y:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Visto esto, despejemos X:

$$AXB = C \Longrightarrow A^{-1}(AXB) = A^{-1}C \Longrightarrow XB = A^{-1}C \Longrightarrow (XB)B^{-1} = (A^{-1}C)B^{-1} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow X = A^{-1}CB^{-1}$$

luego

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Problema 2.4 Consideremos los planos π_1, π_2 y π_3 dados respectivamente por las ecuaciones:

$$\pi_1 \equiv x + y = 1, \quad \pi_2 \equiv ay + z = 0, \quad \pi_3 \equiv x + (a+1)y + az = a + 1$$

1. ¿Cuánto ha de valer a para que no tengan ningún punto en común?.
2. Para $a = 0$, determinar la posición relativa de los planos.

Discutamos el sistema formado por las ecuaciones implícitas de los tres planos:

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ ay + z &= 0 \\ x + (a+1)y + az &= a + 1 \end{aligned}$$

Las matrices de los coeficientes y ampliada son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & a+1 & a \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & a & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & a+1 & a & \vdots & a+1 \end{pmatrix}$$

Desarrollando, es $|A| = a(a-1)$, y por tanto:

$$|A| = 0 \Longleftrightarrow a = 0, 1$$

En fin:

- Si $a \neq 0, 1$ es $|A| \neq 0 \Longrightarrow r(A) = 3$. La matriz ampliada también tiene rango 3, y el número de incógnitas también es 3. En definitiva, el sistema es de Cramer, y tiene por tanto solución única, es decir, los tres planos se cortan en un único punto, caso que no nos han pedido.

- Supongamos que $a = 1$. Utilizando las notaciones del problema (1.3), la matriz ampliada es:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \vdots & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \{S_{31}(-1)\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \{S_{32}(-1)\} \Longrightarrow$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$$

  luego $r(A) = 2$, $r(A') = 3$, y el sistema es incompatible, es decir, los tres planos no tienen punto común. Esta es pues la respuesta al primer apartado, a la espera de lo que pase con el siguiente caso.

- Supongamos que $a = 0$. La matriz ampliada es:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  No es necesario utilizar aquí la reducción gaussiana, ya que a simple vista, la 3ª fila es idéntica a la 1ª, luego eliminamos aquella, y la matriz, a efectos de sistema queda como

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

  Como el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, es $r(A) = 2$, $r(A') = 2$, y el sistema es compatible con infinitas soluciones dependientes de 1 parámetro, es decir, los tres planos (en realidad 2, ya que $\pi_1 \equiv \pi_3$) se cortan en una recta.

En conclusión:

- Para que los tres planos no tengan ningún punto en común, ha de ser $a = 1$.

- Para $a = 0$, los tres planos se cortan en una recta.

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE) UNIVERSIDAD DE CASTILLA LA MANCHA
JUNIO – 2011 (GENERAL)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elija una de las dos opciones, A o B, y conteste a las cuatro preguntas que componen la opción elegida. Si mezcla preguntas de las dos opciones, el tribunal podrá anular su examen.

En el desarrollo de cada respuesta, detalle y explique los procedimientos empleados en la misma. Se califica todo.

PROPUESTA A

Ejercicio 1º) Dada la función $f(x)=\frac{4x^2+3x+4}{2x}$, se pide:

a) Calcula las asíntotas verticales y oblicuas de f(x).

b) Coordenadas de los máximos y mínimos relativos de f(x).

Solución

a)

Las asíntotas son las siguientes:

Verticales: son los valores de x que anulan el denominador.

$2x=0$;; $\underline{\underline{x=0}}$ (El eje de ordenadas es asíntota vertical)

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{4x^2+3x+4}{2x}=\frac{4}{0^-}=\underline{-\infty \Rightarrow \downarrow}.$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{4x^2+3x+4}{2x}=\frac{4}{0^+}=\underline{+\infty \Rightarrow \uparrow}.$$

Oblicuas: son de la forma $y=mx+n$, siendo:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x^2+3x+4}{2x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+3x+4}{2x^2}=\underline{2=m}.$$

$$n=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^2+3x+4}{2x}-2x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+3x+4-4x^2}{2x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3x+4}{2x}=\underline{\frac{3}{2}=n}.$$

$$\underline{\underline{Asíntota\ oblicua:\ y=2x+\frac{3}{2}}}$$

b)

Una función tiene un extremo relativo cuando se anula su primera derivada.

$$f'(x)=\frac{(8x+3)\cdot 2x-(4x^2+3x+4)\cdot 2}{(2x)^2}=\frac{16x^2+6x-8x^2-6x-8}{4x^2}=\frac{8x^2-8}{4x^2}=\underline{\frac{8(x^2-1)}{4x^2}=f(x)}$$

.

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{8(x^2-1)}{4x^2}=0 \;;;\; 8(x^2-1)=0 \;;;\; x^2-1=0 \Rightarrow \underline{x_1=-1} \;;;\; \underline{x_2=1}.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos relativos se recurre a la segunda derivada; si es negativa para los valores que anulan la primera derivada, se trata de un máximo relativo y si es positiva, de un mínimo relativo.

$$f''(x)=\frac{16x\cdot 4x^2-8(x^2-1)\cdot 8x}{(4x^2)^2}=\frac{64x^3-64x^3+64x}{4x^4}=\frac{64x}{4x^4}=\underline{\frac{16}{x^3}=f''(x)}.$$

$$f''(-1)=\frac{16}{(-1)^3}=\frac{16}{-1}=-16<0 \Rightarrow \underline{\text{Máximo relativo para x = -1.}}$$

$$f(-1)=\frac{4\cdot(-1)^2+3\cdot(-1)+4}{2\cdot(-1)}=\frac{4-3+4}{-2}=\frac{5}{-2}=-\frac{5}{2} \Rightarrow \underline{\underline{Máximo:\ A\left(-1,\ -\frac{5}{2}\right)}}.$$

$$f''(1)=\frac{16}{1^3}=\frac{16}{1}=16>0 \Rightarrow \underline{\text{Mínimo relativo para x = 1.}}$$

$$f(1)=\frac{4\cdot 1^2+3\cdot 1+4}{2\cdot 1}=\frac{4+3+4}{2}=\frac{11}{2} \Rightarrow \underline{\underline{Mínimo:\ B\left(1,\ \frac{11}{2}\right)}}.$$

****

Ejercicio 2°) Calcula las siguientes integrales:

a) $I = \int \left[\cos(2x) + sen\ x \cdot \cos\ x \right] \cdot dx$. b) $I = \int \frac{x^3 - 1}{x+2} \cdot dx$

Solución

a)

$$I = \int \left[\cos(2x) + sen\ x \cdot \cos\ x \right] \cdot dx = \int \cos(2x) \cdot dx + \int sen\ x \cdot \cos\ x \cdot dx = \underline{I_1 + I_2 = I} \qquad (*)$$

$$I_1 = \int \cos(2x) \cdot dx \Rightarrow \begin{Bmatrix} 2x = t \\ dx = \frac{1}{2}dt \end{Bmatrix} \Rightarrow \int \cos t \cdot \frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\int \cos t \cdot dt = \frac{1}{2} sen\ t = \underline{\frac{1}{2} sen(2x) = I_1}.$$

$$I_2 = \int sen\ x \cdot \cos\ x \cdot dx \Rightarrow \begin{Bmatrix} sen\ x = t \\ \cos\ x \cdot dx = dt \end{Bmatrix} \Rightarrow \int t \cdot dt = \frac{t^2}{2} + C = \underline{\frac{1}{2} sen^2\ x = I_2}.$$

Sustituyendo en (*) los valores obtenidos de I_1 e I_2:

$$I = I_1 + I_2 = \frac{1}{2} sen(2x) + \frac{1}{2} sen^2\ x + C = \underline{\underline{\frac{1}{2}\left[sen(2x) + sen^2\ x \right] + C = I}}$$

b)

$I = \int \frac{x^3 - 1}{x+2} \cdot dx \Rightarrow$ Efectuando la división:

$$\begin{array}{cccc|l} +x^3 & & & +1 & x+2 \\ \cline{5-5} -x^3 & -2x^2 & & & x^2 - 2x + 4 \\ \hline 0 & -2x^2 & & +1 & \\ & +2x^2 & +4x & & \\ \hline & 0 & +4x & +1 & \\ & & -4x & -8 & \\ \hline & & 0 & -7 & \end{array}$$

$$I = \int \frac{x^3 - 1}{x+2} \cdot dx = \int \left(x^2 - 2x + 4 - \frac{7}{x+2} \right) \cdot dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 4x - 7\int \frac{1}{x+2} \cdot dx =$$

$$\underline{= \frac{x^3}{3} - x^2 + 4x - 7I_1 = I}. \qquad (*)$$

$$I_1 = \int \frac{1}{x+2} \cdot dx \Rightarrow \begin{Bmatrix} x+2 = t \\ dx = dt \end{Bmatrix} \Rightarrow I_1 = \int \frac{1}{t} \cdot dt = L|t| + C = \underline{L|x+2| + C = I_1}.$$

Sustituyendo en (*) el valor obtenido de I_1: $\underline{\underline{I = \frac{x^3}{3} - x^2 + 4x - 7L|x+2| + C}}$.

****

Ejercicio 3º) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}4 & 5\\ -3 & -4\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, se pide:

a) Resuelve la ecuación matricial: $\begin{cases}2X+3Y=A\\ X+Y=B\end{cases}$.

b) Encuentra una fórmula general para B^n, donde $n \in N$. (Indicación: calcula las primeras potencias de la matriz B).

Solución

a)

$$\begin{cases}2X+3Y=A\\ X+Y=B\end{cases} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}2X+3Y=A\\ -2X-2Y=-2B\end{array}\right\} \Rightarrow \underline{Y=A-2B} \;;;\; X=B-Y=B-A+2B=\underline{-A+3B=X}$$

.

$$X=-A+3B=-\begin{pmatrix}4 & 5\\ -3 & -4\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 3 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4 & -5\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix}-4 & -2\\ 6 & 4\end{pmatrix}=X}}.$$

$$Y=A-2B=\begin{pmatrix}4 & 5\\ -3 & -4\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 5\\ -3 & -4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -2\\ -2 & 0\end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix}4 & 3\\ -5 & -4\end{pmatrix}=Y}}.$$

b)

$$B^2=B\cdot B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+1 & 0+0\\ 0+0 & 1+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\underline{I=B^2}.$$

$$B^3=B^2\cdot B=I\cdot B=\underline{B=B^3}.$$

$$B^4=B^3\cdot B=B\cdot B=\underline{I=B^4}.$$

....

$$\underline{\underline{B^n=I \;\; si \;\; n \;\; es \;\; par \;;;\; B^n=B \;\; si \;\; n \;\; es \;\; impar}}$$

****

Ejercicio 4º) Consideramos el plano $\pi \equiv x - z = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x=1+at \\ y=1-t \\ z=2t \end{cases}$, $t \in R$.

a) Determina el parámetro $a \in R$ para que la recta r y el plano π sean paralelos.
b) Para el valor de α determinado, obtén las ecuaciones paramétricas de la recta r' paralela al plano π y que corte perpendicularmente a r en el punto P(1, 1, 0).

Solución

a)

Para que la recta r y el plano π sean paralelos es condición suficiente que el vector normal del plano sea perpendicular al vector director de la recta.

El vector normal de π es $\overrightarrow{n} = (1,\ 0,\ -1)$ y el vector director de r es $\overrightarrow{v} = (a,\ -1,\ 2)$.

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero:

$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{v} = 0 \Rightarrow (1,\ 0,\ -1) \cdot (a,\ -1,\ 2) = 0$;; $a - 0 - 2 = 0$;; $a - 2 = 0 \Rightarrow \underline{a = 2}$.

La recta r y el plano π son paralelos cuando α = 2.

b)

Un vector director de r es $\overrightarrow{v} = (2,\ -1,\ 2)$ y el haz de planos perpendiculares a la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases}$ tiene por expresión general $\alpha \equiv 2x - y + 2z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz anterior, el plano β que contiene al punto $P(1,\ 1,\ 0)$ es el que satisface su ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \equiv 2x - y + 2z + D = 0 \\ P(1,\ 1,\ 0) \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \cdot 1 - 1 + 2 \cdot 0 + D = 0 \ ;;\ 2 - 1 + D = 0 \ ;;\ 1 + D = 0 \ ;;\ \underline{D = -1} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \underline{\beta \equiv 2x - y + 2z - 1 = 0}$.

El haz de planos paralelos a $\pi \equiv x - z = 0$ tiene por expresión $\gamma \equiv x - z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz anterior, el plano μ que contiene al punto $P(1,\ 1,\ 0)$ es el que satisface su ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} \gamma \equiv x - z + D = 0 \\ P(1,\ 1,\ 0) \end{array} \right\} \Rightarrow 1 - 0 + D = 0 \ ;;\ 1 + D = 0 \ ;;\ \underline{D = -1} \Rightarrow \underline{\mu \equiv x - z - 1 = 0}.$$

La recta r' es la intersección de los planos β y μ: $\underline{r' \equiv \begin{cases} 2x - y + 2z - 1 = 0 \\ x - z - 1 = 0 \end{cases}}$.

Para expresar r' por unas ecuaciones paramétricas hacemos lo siguiente:

$$r' \equiv \begin{cases} 2x - y + 2z - 1 = 0 \\ x - z - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z = \lambda} \ ;;\ x = 1 + z = \underline{1 + \lambda = x} \ ;;\ y = 2x + 2z - 1 = 2 + 2\lambda + 2\lambda - 1 =$$

$$= \underline{1 + 4\lambda = y} \Rightarrow \underline{\underline{r' \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + 4\lambda \\ z = \lambda \end{cases}}}.$$

****

PROPUESTA B

Ejercicio 1°) En cierto experimento la cantidad de agua en estado líquido $C(t)$, medida en litros, está determinada en función del tiempo t, medido en horas, por la siguiente expresión: $C(t)=\frac{2}{3}+10t+\frac{10}{t}+\frac{240}{t^3},\ t\in[1,\ 10]$. Halla cuál es la cantidad mínima de agua en estado líquido y en qué instante de tiempo se obtiene, en el intervalo comprendido entre t = 1 hora y t = 10 horas.

Solución

La cantidad mínima será el mínimo de la función $C(t)=\frac{2}{3}+10t+\frac{10}{t}+\frac{240}{t^3}$:

$$C'(t)=10+\frac{0-10}{t^2}+\frac{0-240\cdot 3t^2}{t^6}=10-\frac{10}{t^2}-\frac{720}{t^4}=\frac{10t^4-10t^2-720}{t^4}=10\cdot\frac{t^4-t^2-72}{t^4}.$$

$$C'(t)=0\ \Rightarrow\ 10\cdot\frac{t^4-t^2-72}{t^4}=0\ ;;\ t^4-t^2-72=0.$$

Resolviendo la ecuación bicuadrada:

$$t^4-t^2-72=0\ \Rightarrow\ t^2=y\ \Rightarrow\ y^2-y-72=0\ ;;\ y=\frac{1\pm\sqrt{1+288}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{289}}{2}=\frac{1\pm 17}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \underline{y_1=9}\ ;;\ \underline{y_2=-8}.$$

Deshaciendo el cambio de variable: $\begin{cases} t^2=9\ \Rightarrow\ \underline{t_1=3}\ ;;\ \underline{t_2=-3} \\ t^2=-8\ \Rightarrow t\notin R \end{cases}.$

La solución del problema es <u>t = 3</u>; la solución t = -3 carece de sentido lógico.

La cantidad de agua en estado líquido a las 3 horas es la siguiente:

$$C(3)=\frac{2}{3}+10\cdot 3+\frac{10}{3}+\frac{240}{3^3}=\frac{2}{3}+30+\frac{10}{3}+\frac{80}{9}=\frac{6+270+30+80}{9}=\frac{386}{9}\cong\underline{42'89\ litros}.$$

<u>La mínima cantidad en estado liquido son 42'89 litros a las tres horas.</u>

****

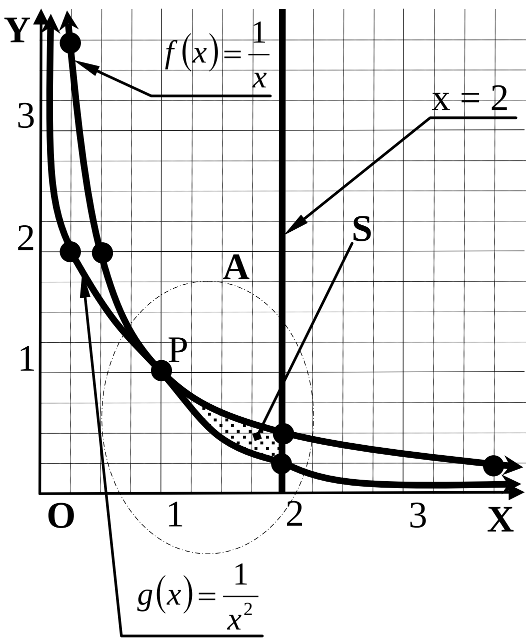
Ejercicio 2º) a) Representa gráficamente la región del primer cuadrante limitada por las gráficas de las funciones $f(x)=\frac{1}{x}$ y $g(x)=\frac{1}{x^2}$, y la recta x = 2.

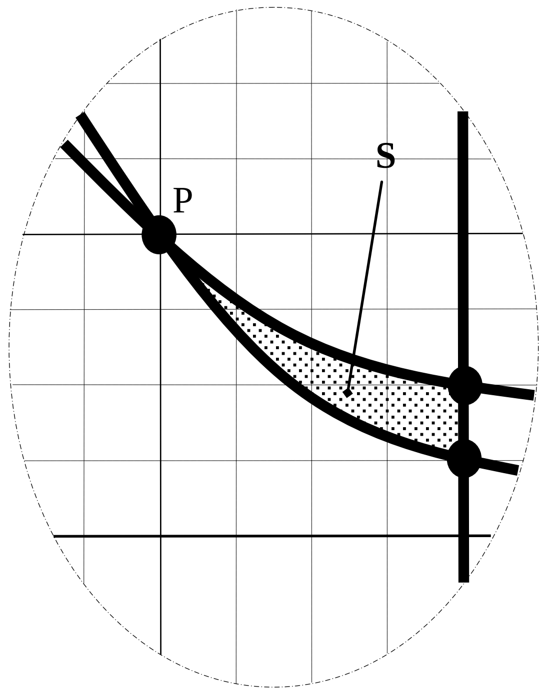
b) Calcula el área de dicha región.

Solución

a)

El punto de corte de las funciones se obtiene de la igualación de sus expresiones:





Detalle A

$$f(x)=g(x) \Rightarrow \frac{1}{x}=\frac{1}{x^2} \;;\; x^2=x \;;\; x^2-x=0 \;;\; x(x-1)=0 \Rightarrow \underline{x_1=0} \;;\; \underline{x_2=1}.$$

Nótese que la solución x = 0 tiene como valor de las funciones infinito, por lo cual el único punto real de corte es P(1, 1).

b)

Todas las ordenadas de la función f(x) son iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de la función g(x) por lo que la superficie pedida es:

$$S=\int_1^2 [f(x)-g(x)]\cdot dx=\int_1^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)\cdot dx=\left[L\,x-\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^2=\left[L\,x+\frac{1}{x}\right]_1^2=\left(L\,2+\frac{1}{2}\right)-\left(L1+\frac{1}{1}\right)=$$

$$=L\,2+\frac{1}{2}-L1-1=\underline{\underline{\left(L\,2-\frac{1}{2}\right)u^2=S}}\,.$$

****

Ejercicio 3°) a)Clasifica, en función del parámetro $\lambda \in R$, el sistema $\begin{cases} \lambda x+2y-z=\lambda \\ 3x-y-z=1 \\ 5x+y-2z=3 \end{cases}$.

b) Resuélvelo, si es posible, para $\lambda = 2$.

Solución

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} \lambda & 2 & -1 & \lambda \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

El rango de M en función del parámetro λ es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 5 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2\lambda - 3 - 10 - 5 + 12 + \lambda = 3\lambda - 6 = 0 \;;;\; \lambda - 2 = 0 \;;;\; \underline{\lambda = 2}.$$

$$\underline{\underline{Para\ \ \lambda \neq 2 \Rightarrow Rango\ \ M = Rango\ \ M' = 3 = n^o\ \ incóg. \Rightarrow\ Compatible\ \ Determinado}}$$

Para $\lambda = 2$ es $M' = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1 + F_2 = F_3\} \Rightarrow \underline{Rango\ \ M' = 2}$.

$$\underline{\underline{Para\ \ \lambda = 2 \Rightarrow Rango\ \ M = Rango\ \ M' = 2 < n^o\ \ incóg. \Rightarrow\ Compatible\ \ Indeterminado}}$$

b)

Para $\lambda = 2$ el sistema es $\begin{cases} 2x+2y-z=2 \\ 3x-y-z=1 \\ 5x+y-2z=3 \end{cases}$, que es compatible indeterminado.

Para resolver el sistema despreciamos una de las ecuaciones (tercera) y parametrizamos una de las incógnitas $(z = \lambda)$:

$$\begin{cases} 2x + 2y - z = 2 \\ 3x - y - z = 1 \end{cases} \Rightarrow \underline{z = \lambda} \Rightarrow \left. \begin{matrix} 2x + 2y = 2 + \lambda \\ 3x - y = 1 + \lambda \end{matrix} \right\} \left. \begin{matrix} 2x + 2y = 2 + \lambda \\ 6x - 2y = 2 + 2\lambda \end{matrix} \right\} \Rightarrow 8x = 4 + 3\lambda \;;;$$

$$\underline{x = \frac{1}{2} + \frac{3}{8}\lambda} \;;;\; y = 3x - z - 1 = \frac{3}{2} + \frac{9}{8}\lambda - \lambda - 1 = \underline{\frac{1}{2} + \frac{1}{8}\lambda = y}.$$

$$\underline{\underline{Solución: \begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{3}{8}\lambda \\ y = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\lambda \;,\; \forall \lambda \in R \\ z = \lambda \end{cases}}}$$

****

Ejercicio 4º) Dados los puntos de coordenadas A(0, 1, 0), B(1, 2, 3), C(0, 2, 1) y D(k, 1, 1), donde $\lambda \in R$:

a) Determina el área del triángulo de vértices A, B y C.

b) ¿Para qué valores del parámetro k el tetraedro cuyos vértices son A, B, C y D tienen volumen de 5 u^3?

Solución

a)

Los puntos A(0, 1, 0), B(1, 2, 3) y C(0, 2, 1) determinan los vectores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ y $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, que son los siguientes:

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (1,\ 2,\ 3) - (0,\ 1,\ 0) = (1,\ 1,\ 3).$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{AC} = C - A = (0,\ 2,\ 1) - (0,\ 1,\ 0) = (0,\ 1,\ 1).$$

Sabiendo que el área del triángulo es la mitad del módulo del producto vectorial de los dos vectores que lo determinan:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \left| \vec{u} \wedge \vec{v} \right| = \frac{1}{2} \begin{Vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix} = \frac{1}{2} \left| i + k - 3i - j \right| = \frac{1}{2} \left| -2i - j + k \right| = \frac{1}{2} \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 1^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{4+1+1} = \frac{1}{2}\sqrt{6} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{6}}{2}\ u^2 = S}}.$$

b)

Los puntos A(0, 1, 0) y D(k, 1, 1) determinan el vector :

$$\vec{w} = \overrightarrow{AD} = D - A = (k,\ 1,\ 1) - (0,\ 1,\ 0) = (k,\ 0,\ 1).$$

Sabiendo que el volumen del tetraedro es un sexto del producto mixto de los vectores que lo determinan, en valor absoluto, será:

$$V = \frac{1}{6} \cdot \left| \left[\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w} \right] \right| = 5\,u^3 \Rightarrow \frac{1}{6} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ k & 0 & 1 \end{Vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \left| 1 + k - 3k \right| = \frac{1}{6} \cdot \left| 1 - 2k \right| = 5 \ ;;\ \left| 1 - 2k \right| = 30 \ ;;$$

$$\left. \begin{array}{l} 1 - 2k = 30 \\ -1 + 2k = 30 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{k_1 = -\frac{29}{2}}} \ ;;\ \underline{\underline{k_2 = \frac{31}{2}}}.$$

****

Problemas resueltos correspondientes a la selectividad de Matemáticas II de septiembre de 2011, Andalucía

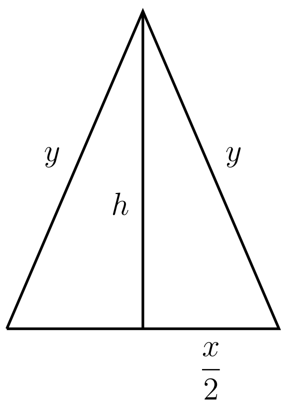
Pedro González Ruiz

septiembre de 2011

1. Opción A

Problema 1.1 Calcular la base y la altura del triángulo isósceles de perímetro 8 y de área máxima.

Sean x la longitud de la base del triángulo e y la del otro lado:



La superficie del triángulo es:

$$S = \frac{x \cdot h}{2}$$

y necesitamos poner la altura h en función de x e y. Por el teorema de Pitágoras es:

$$h^2 + \frac{x^2}{4} = y^2 \Longrightarrow h^2 = y^2 - \frac{x^2}{4} \Longrightarrow h = \frac{\sqrt{4y^2 - x^2}}{2}$$

Por consiguiente, la función a maximizar es:

$$S = \frac{x\sqrt{4y^2 - x^2}}{4} \tag{1}$$

La ecuación de condición es:

$$x + 2y = 8$$

Sustituyendo en (1):

$$S = \frac{x\sqrt{4y^2 - x^2}}{4} = \frac{x\sqrt{(2y - x)(2y + x)}}{4} = \frac{x\sqrt{8 \cdot (2y - x)}}{4} = \frac{2\sqrt{2}x\sqrt{2y - x}}{4} =$$
$$= \frac{\sqrt{2}x\sqrt{8 - x - x}}{2} = \frac{\sqrt{2}x\sqrt{8 - 2x}}{2} = x\sqrt{4 - x}$$

Derivando y simplificando:

$$S'(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{3x-8}{\sqrt{4-x}} \Longrightarrow S'(x) = 0 \Longrightarrow 3x - 8 = 0 \Longrightarrow x = \frac{8}{3}$$

Derivando otra vez:

$$S''(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3x-16}{(4-x)^{\frac{3}{2}}} \Longrightarrow S''\left(\frac{8}{3}\right) < 0$$

luego $x = \frac{8}{3}$ es un máximo. Sustituyendo en $x + 2y = 8$, obtenemos $y = \frac{8}{3}$, luego el triángulo es equilátero. por último, sustituyendo estos valores en h, resulta:

$$h = \frac{\sqrt{4y^2 - x^2}}{2} = \frac{\sqrt{3x^2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{8}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

En conclusión:

$$\text{base} = \frac{8}{3},\ \text{altura} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

Problema 1.2 Consideremos las funciones $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por:

$$f(x) = 6x - x^2 \quad \text{y} \quad g(x) = x^2 - 2x$$

- Esbozar sus gráficas en unos mismos ejes coordenados y calcular sus puntos de corte.
- Calcular el área del recinto limitado por las gráficas de f y g.

Ambas funciones son parábolas, por tanto, con averiguar los cortes con los ejes y el vértice es suficiente. Comencemos con f. Si $x = 0$ es $y = 0$. Al revés, si $y = 0$, entonces:

$$6x - x^2 = 0 \Longrightarrow x(6-x) = 0 \Longrightarrow x = 0, 6$$

Luego los cortes con los ejes de f son $(0, 0)$ y $(6, 0)$. Para el vértice V_1, tenemos:

$$f'(x) = 6 - 2x \Longrightarrow 6 - 2x = 0 \Longrightarrow x = 3$$

y como $f''(x) = -2 < 0$, f es cóncava y el vértice:

$$V_1(3, f(3)) = V_1(3, 9) \text{ es un máximo}$$

Sigamos con g. Si $x = 0$ es $y = 0$. Al revés, si $y = 0$, entonces:

$$x^2 - 2x = 0 \Longrightarrow x(x-2) = 0 \Longrightarrow x = 0, 2$$

Luego los cortes con los ejes de g son $(0, 0)$ y $(2, 0)$. Para el vértice V_2, tenemos:

$$g'(x) = 2x - 2 \Longrightarrow 2x - 2 = 0 \Longrightarrow x = 1$$

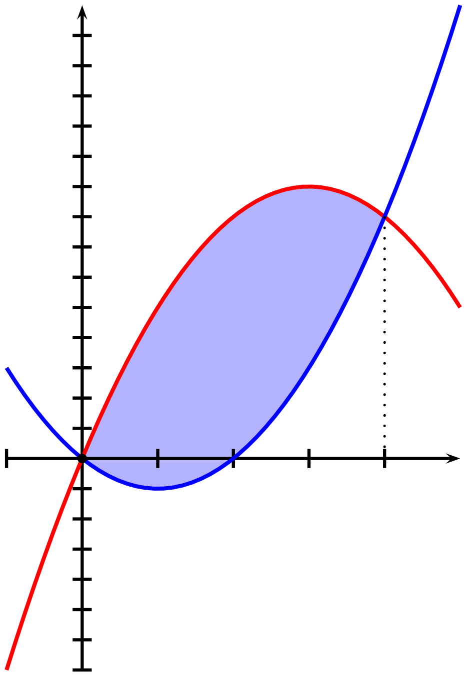
y como $g''(x) = 2 > 0$, g es convexa y el vértice:

$$V_2(1, f(1)) = V_2(1, -1) \text{ es un mínimo}$$

Ambas curvas se cortan en:

$$6x - x^2 = x^2 - 2x \Longrightarrow 2x^2 - 8x = 0 \Longrightarrow 2x(x-4) = 0 \Longrightarrow x = 0, 4$$

El recinto limitado por ambas es (f en rojo y g en azul):



El área S es:

$$S = \int_0^4 \left[(6x - x^2) - (x^2 - 2x)\right] \, dx = \int_0^4 (-2x^2 + 8x) \, dx = \left[-\frac{2x^3}{3} + 4x^2\right]_0^4 = \frac{64}{3}$$

Problema 1.3 Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & -1 \\ -1 & -1 & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Calcular el rango de A dependiendo de los valores de α.
- Para $\alpha = 2$, resolver la ecuación matricial $A \cdot X = B$.

Es sencillo comprobar que:

$$|A| = \alpha^3 - 3\alpha + 2 = (\alpha + 2)(\alpha - 1)^2$$

luego

$$|A| = 0 \Longleftrightarrow \alpha = -2, 1$$

Sea r el rango de A. Tenemos:

- Si $\alpha \neq -2, 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow r = 3$.
- Si $\alpha = -2 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow r < 3$. En este caso:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

  y como

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \neq 0 \Longrightarrow r = 2$$

- Por último, si $\alpha = 1 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow r < 3$. En este caso:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

  La segunda fila es igual que la primera, y la tercera es la opuesta de la primera, luego ambas (segunda y tercera) quedan eliminadas, y por tanto, $r = 1$.

En conclusión:

$$r = \text{rango de } A = \begin{cases} 3, & \text{si } \alpha \neq -2, 1 \\ 2, & \text{si } \alpha = -2 \\ 1, & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

Como $\alpha = 2 \neq -2, 1$, el sistema es de Cramer y tiene solución única. En este caso, $|A| = (2+2) \cdot (2-1)^2 = 4$. El sistema queda como:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Resolvámoslo por la regla de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

luego

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Problema 1.4 Consideremos los puntos:

$$A(-1, k, 3),\ B(k+1, 0, 2),\ C(1, 2, 0),\ D(2, 0, 1)$$

- ¿Existe algún valor de k para el que los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{CD}$ sean linealmente dependientes?.
- Calcular los valores de k para los que los puntos A, B, C, D forman un tetraedro de volumen 1.

Tenemos:

$$\overrightarrow{AB} = (k+2, -k, -1),\ \overrightarrow{BC} = (-k, 2, -2),\ \overrightarrow{CD} = (1, -2, 1)$$

Como son 3 vectores en $\mathbb{R}^3$, la dependencia o independencia la decide el valor del determinante, cuyas filas son las coordenadas de dichos vectores, es decir:

$$\delta = \begin{vmatrix} k+2 & -k & -1 \\ -k & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -(k^2+2k+2)$$

El trinomio k^2+2k+2 es tal que su discriminante:

$$\Delta = 2^2 - 4\cdot 2\cdot 1 = 4-8 = -4 < 0$$

luego $\delta \neq 0$ (más concretamente $\delta < 0$), para todo $k \in \mathbb{R}$, y por consiguiente, los tres vectores son **linealmente independientes** para todo valor de k, o lo que es lo mismo, **no existe ningún valor de k para el que dichos vectores sean dependientes**. Para la segunda parte, el volumen V del tetraedro es:

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & k+1 & 1 & 2 \\ k & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

donde el valor de este determinante debe tomarse en valor absoluto. Procedamos a su cálculo (la expresión $S_{ij}(m)$ indica sumar a la fila i la fila j multiplicada por m). Entonces:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & k+1 & 1 & 2 \\ k & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \{S_{21}(1), S_{31}(-k), S_{41}(-3)\} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k+2 & 2 & 3 \\ 0 & -k & 2-k & -k \\ 0 & -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} k+2 & 2 & 3 \\ k & k-2 & k \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \{S_{12}(-1)\} = \begin{vmatrix} 2 & 4-k & 3-k \\ k & k-2 & k \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \{S_{13}(-2), S_{23}(-k)\} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -k-2 & -k-1 \\ 0 & -2k-2 & -k \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -k-2 & -k-1 \\ -2k-2 & -k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k+2 & k+1 \\ 2k+2 & k \end{vmatrix} =$$

$$= -k^2-2k-2$$

y como $|-k^2-2k-2| = k^2+2k+2$, tenemos:

$$V = \frac{k^2+2k+2}{6} = 1 \Longrightarrow k^2+2k-4 = 0 \Longrightarrow k = -1 \pm \sqrt{5}$$

Damos aquí el problema por acabado, y lo que sigue es una ampliación, consistente en ver una segunda forma del cálculo del volumen, teniendo en cuenta el resultado del apartado primero, y ahorrarnos así el cálculo del determinante de cuarto orden. Hemos visto que:

$$|\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}| = -(k^2+2k+2)$$

Según se demuestra en teoría, otra expresión para el volumen de un tetraedro definido por cuatro puntos A, B, C, D es:

$$V = \frac{1}{6}\cdot|\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}|$$

donde como siempre, el resultado anterior debe tomarse en valor absoluto. Sea

$$U = |\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}| = \{\text{linealidad del determinante en sus filas}\} =$$
$$= |\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}| + |\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}|$$

ya que el determinante $|\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}| = 0$ por tener dos filas iguales. Seguimos:

$$U = |\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}| + |\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}|$$

En esta última suma, el primer sumando es 0, ya que:

$$|\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = 0$$

ya que la tercera fila es la suma de las dos primeras. En conclusión:

$$|\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}| = -(k^2 + 2k + 2)$$

y por consiguiente:

$$V = \frac{k^2 + 2k + 2}{6}$$

2. Opción B

Problema 2.1 Sea f la función definida por

$$f(x) = \frac{3x^4 + 1}{x^3}, \quad \text{para } x \neq 0$$

- Estudiar las asíntotas de la gráfica de la función.
- Hallar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan.

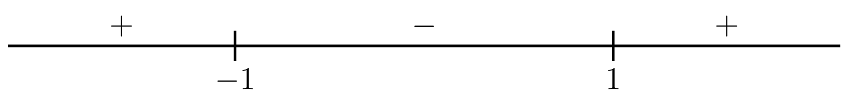
La recta $x = 0$ es una asíntota vertical. Como $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, no existen asíntotas horizontales. Como f es una función racional tal que el grado del numerador es exactamente una unidad superior al grado del denominador, existe asíntota oblicua. Además

$$f(x) = 3x + \frac{1}{x^3}$$

luego la asíntota oblicua es $y = 3x$. Para la segunda parte, tenemos:

$$f'(x) = 3 - \frac{3}{x^4} = 3\left(1 - \frac{1}{x^4}\right) = 3\frac{x^4 - 1}{x^4} = 3\frac{(x^2 - 1)(x^2 + 1)}{x^4} = 3\frac{(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)}{x^4}$$

Para el crecimiento y decrecimiento, hemos de estudiar las variaciones de signo de f'. Los factores $x^2 + 1$ y x^4 no cuentan, pues son positivos, así que solo hay que concentrarse en $x - 1$ y $x + 1$, por tanto:



luego f crece en $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ y decrece en $]-1,1[-\{0\}$. Por consiguiente, en el punto $x=-1$ hay un máximo de valor $f(-1)=-4$ y en $x=1$ hay un mínimo de valor $f(1)=4$.
Nota final: el problema se podía haber simplificado bastante teniendo en cuenta que f es impar.

Problema 2.2 Sean $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas por:

$$f(x) = -\frac{x^2}{4} + 4, \quad g(x) = x^2 - 1$$

- Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=-2$.
- Esbozar el recinto limitado por las gráficas de ambas funciones y la recta $y = x + 5$. Calcular el área de este recinto.

La recta tangente a f en $x=-2$ es:

$$y = f(-2) + f'(-2)(x+2)$$

Por un lado es, $f(-2) = -\frac{4}{4} + 4 = 3$, y como $f'(x) = -\dfrac{x}{2} \Longrightarrow f'(-2) = \dfrac{2}{2} = 1$, luego, la recta tangente es:

$$y = 3 + 1 \cdot (x+2) = x + 5, \text{ es decir, } y = x + 5$$

De las parábolas f y g mostramos sus propiedades más caraterísticas, dejando la comprobación al lector.

- f es par. Los cortes con los ejes son $(0,4)$, $(\pm 4, 0)$, f es cóncava y el vértice es $V_1(0,4)$, máximo.
- g es par. Los cortes con los ejes son $(0,-1)$, $(\pm 1, 0)$, f es convexa y el vértice es $V_2(0,-1)$, mínimo.

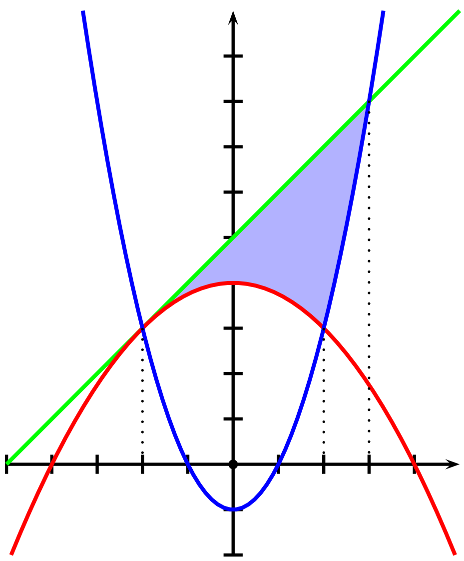
Los puntos comunes a las dos parábolas son:

$$-\frac{x^2}{4} + 4 = x^2 - 1 \Longrightarrow x = \pm 2$$

Los cortes de g con la recta tangente son

$$x^2 - 1 = x + 5 \Longrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Longrightarrow x = 2, 3$$

En fin, el recinto es (f en rojo, g en azul y la recta tangente en verde):



Finalmente, el área pedida S es, $S = S_1 + S_2$, donde:

$$S_1 = \int_{-2}^{2} \left[(x+5) - \left(4 - \frac{x^2}{4}\right)\right] dx = \int_{-2}^{2} \left(\frac{x^2}{4} + x + 1\right) dx = \left[\frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{2} + x\right]_{-2}^{2} = \frac{16}{3}$$
$$S_2 = \int_{2}^{3} \left[(x+5) - (x^2-1)\right] dx = \int_{2}^{3} (-x^2 + x + 6)\, dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x\right]_{2}^{3} = \frac{13}{6}$$

luego

$$S = \frac{16}{3} + \frac{13}{6} = \frac{15}{2}$$

Problema 2.3 Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -\alpha & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

- Calcular los valores de α para los que la mariz inversa de A es $\dfrac{1}{12} \cdot A$.
- Para $\alpha = -3$, determinar la matriz X que verifica la ecuación $A^t \cdot X = B$, siendo A^t la matriz traspuesta de A.

Trivialmente $|A| = 4\alpha$. Calculemos la inversa de A:

$$A^t = \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^* = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{4\alpha} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{4\alpha} & -\dfrac{1}{4\alpha} \\ \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Por otro lado:

$$A^{-1} = \frac{1}{12} \cdot A = \begin{pmatrix} \dfrac{\alpha}{12} & \dfrac{1}{12} \\ -\dfrac{\alpha}{12} & \dfrac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Identificando:

$$-\frac{1}{4\alpha} = \frac{1}{12} \Longrightarrow 4\alpha = -12 \Longrightarrow \alpha = -3$$

Este valor es conforme con los otros tres elementos de la matriz. Por consiguiente, $\alpha = -3$.

Para la segunda parte, sea

$$C = A^t = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

La ecuación $A^t \cdot X = B$ es equivalente a $C \cdot X = B$, luego $X = C^{-1} \cdot B$. Un cálculo sencillo demuestra que $C^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, luego:

$$X = \frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -6 & 3 & 3 \\ -2 & 15 & 7 \end{pmatrix}$$

Concluyendo:

$$X = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -6 & 3 & 3 \\ -2 & 15 & 7 \end{pmatrix}$$

Problema 2.4 Dados el plano π y la recta r de ecuaciones:

$$\pi \equiv x + 2y - z = 0, \quad r \equiv \begin{cases} 3x - y = 5 \\ x + y - 4z = -13 \end{cases}$$

- Hallar el punto P de intersección del plano π y la recta r.
- Hallar el punto simétrico del punto $Q(1, -2, 3)$ respecto del plano π.

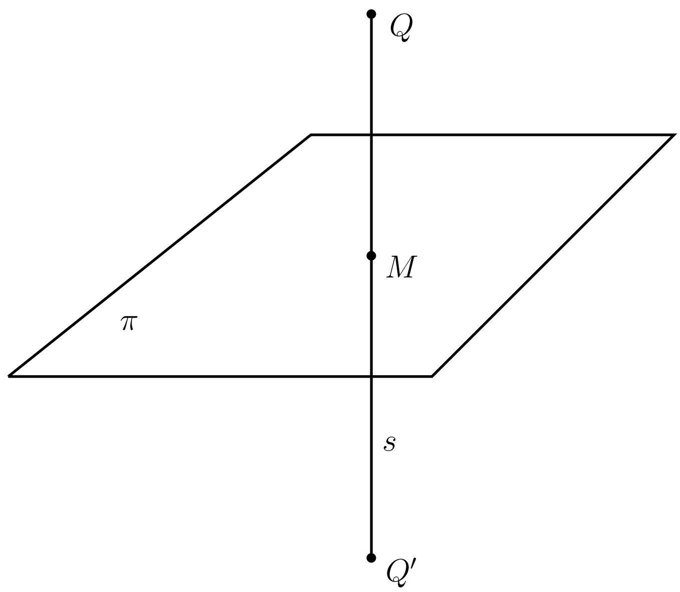
El punto P verifica el sistema:

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 0 \\ 3x - y &= 5 \\ x + y - 4z &= -13 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema, resulta $P(2, 1, 4)$.

Para la segunda parte, sea s la recta perpendicular a π que pasa por Q. Un vector director $\vec{u}$ de s es el vector normal de π, es decir, $\vec{u} = (1, 2, -1)$. Por tanto, las ecuaciones paramétricas de s son:

$$s \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + 2t \\ z = 3 - t \end{cases}$$



Sea M el punto de intersección de s y π, es decir, $M = s \cap \pi$. Para averiguar M, sustituimos las paramétricas de s en π:

$$(1 + t) + 2 \cdot (-2 + 2t) - (3 - t) = 0 \Longrightarrow 6t - 6 = 0 \Longrightarrow t = 1$$

luego $M(1+t, -2+2t, 3-t) = M(1+1, -2+2\cdot 1, 3-1) = M(2, 0, 2)$. Este punto M es el punto medio del segmento QQ' siendo Q' el simétrico de Q respecto a π. Si escribimos $Q'(a, b, c)$ y aplicamos la fórmula del punto medio de un segmento, tenemos:

$$\frac{a+1}{2} = 2,\ \frac{b-2}{2} = 0,\ \frac{c+3}{2} = 2 \Longrightarrow a = 3,\ b = 2,\ c = 1$$

luego $Q'(3, 2, 1)$.