UNIDAD 8:
LÍMITES Y CONTINUIDAD

LÍMITES

1. LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

Una **sucesión** de números reales es un conjunto ordenado de infinitos números reales. Los números reales $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ se llaman términos, de la sucesión y a_n término general. Se representa por $\{a_n\}$.

Más formalmente, una sucesión es una función

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$n \to f(n) := a_n$$

y así, $f(1) = a_1,\ f(2) = a_2, \ldots$

Intuitivamente, decimos que el límite de una sucesión $\{x_n\}$ es el número L si los términos de dicha sucesión se van aproximando a L, y escribiremos $\{x_n\} \to L$ o $\lim x_n = L$ o $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = L$

Recuerda que el límite de una sucesión, si existe, es único.

Diremos que $a \in \mathbb{R}$ es un punto de acumulación de D, y escribiremos $a \in D'$, cuando exista una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de D tal que $\{x_n\} \to a$.

Criterio para los puntos de acumulación: siempre que exista un intervalo abierto de centro a contenido en D se tendrá que $a \in D'$.

Definición: Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función, $a \in D'$ y $L \in \mathbb{R}$. Diremos que el límite de $f(x)$ cuando $x \to a$ es *L*, y escribiremos $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, sii para valores de *x* cada vez más próximos a *a* (distintos de *a*), los valores de las imágenes $f(x)$ están cada vez más próximos a *L*.

Límites laterales:

El límite por la izquierda es el valor al que tiende la función $f(x)$ cuando la variable *x* se aproxima a *a* siendo menor que *a*. Se denota por:

$$\lim_{x\to a-} f(x) \quad \text{o} \quad \lim_{\substack{x\to a \\ x<a}} f(x)$$

El límite por la derecha es el valor al que tiende la función $f(x)$ cuando la variable *x* se aproxima a *a* siendo mayor que *a*. Se denota por:

$$\lim_{x\to a+} f(x) \quad \text{o} \quad \lim_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x)$$

Esto da lugar a la siguiente **caracterización**:

$$\exists \lim_{x \to a} f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \lim\limits_{x \to a-} f(x),\ \exists \lim\limits_{x \to a+} f(x) \\ \lim\limits_{x \to a-} f(x) = \lim\limits_{x \to a+} f(x) \end{cases}$$

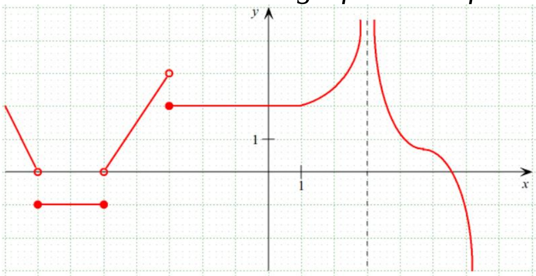
En cuyo caso $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a-} f(x) = \lim\limits_{x \to a+} f(x)$

Ejercicios:

1. *Mediante tablas calcula:*

a) $\lim\limits_{x \to 0} (x^2 + 2)$ *b)* $\lim\limits_{x \to 2} (3x - 2)$ *c)* $\lim\limits_{x \to 1+} (3x - 1)$ *d)* $\lim\limits_{x \to -3-} (9 + x^2)$

2. *Teniendo en cuenta la gráfica de la función, calcula los siguientes límites:*

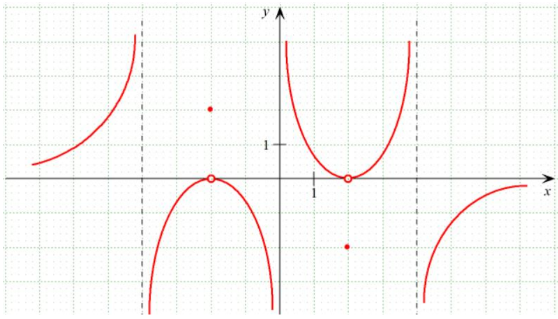


a) $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$

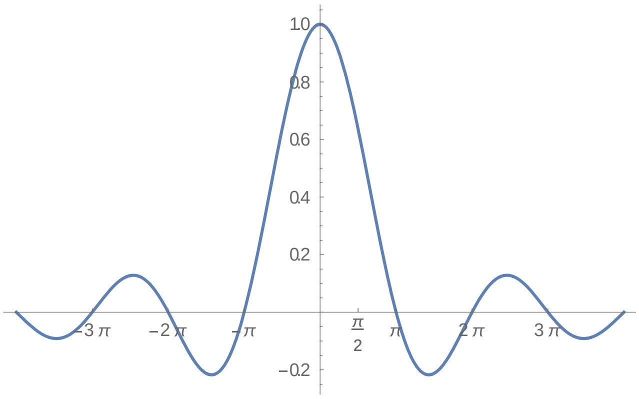
b) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

c) $\lim\limits_{x \to 7} f(x)$

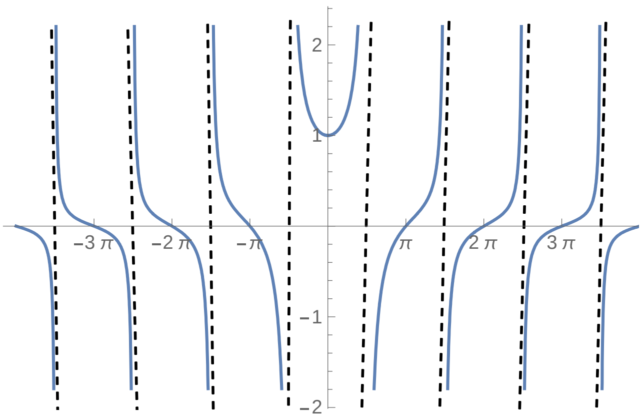
3. *A partir de la gráfica de la función, justifica que* $\lim\limits_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$ *:*



4. *Calcula* $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{sen}\, x}{x}$ y $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{tg}\, x}{x}$, *teniendo en cuenta su gráfica*[1]*:*



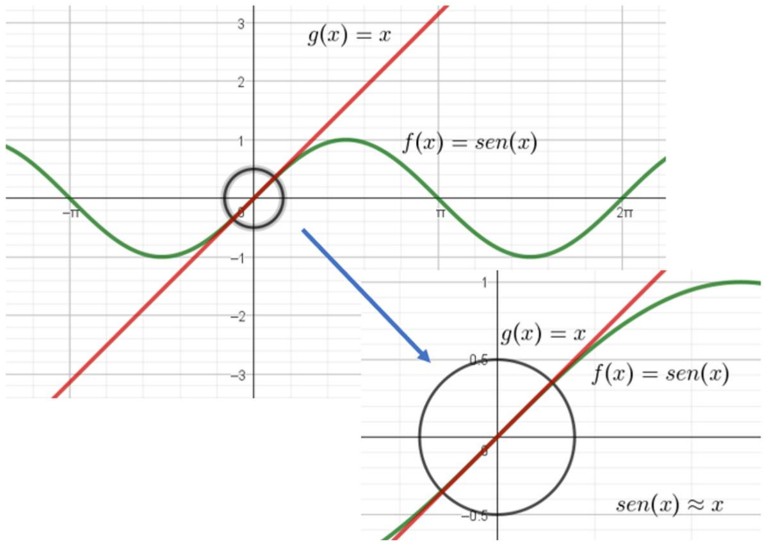
$f(x) = \frac{\text{sen}\, x}{x}$



$g(x) = \frac{\text{tg}\, x}{x}$

[1] Estos dos límites son importantes y debes recordarlos.

Vamos a ver cómo obtener $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{sen}\,x}{x}$, de otra forma:



$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}\,x}{x} = 1$$

2. <u>LÍMITES INFINITOS: ASÍNTOTAS VERTICALES</u>

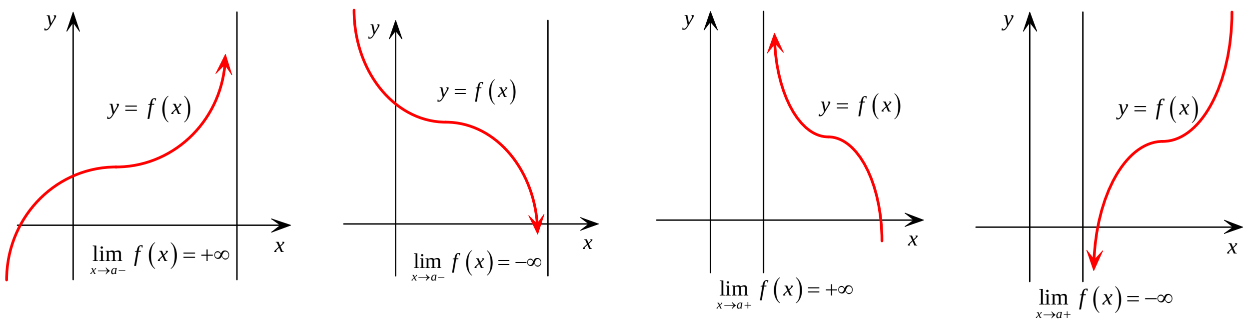
Decir que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ significa que cuando *x* tiende a *a*, con $x < a$, $f(x)$ toma valores mayores que cualquier número real *k*.

Análogamente, decir que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ significa que cuando *x* tiende a *a*, con $x < a$, $f(x)$ toma valores cada vez más pequeños.

Llamamos <u>asíntotas</u> de una función a las rectas que se aproxima la función en el infinito.

La recta *x* = *a* es una <u>asíntota vertical</u> de $f(x)$ sii existe alguno de los siguientes límites:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x\to a+} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x\to a-} f(x) = \pm\infty$$



Observaciones:

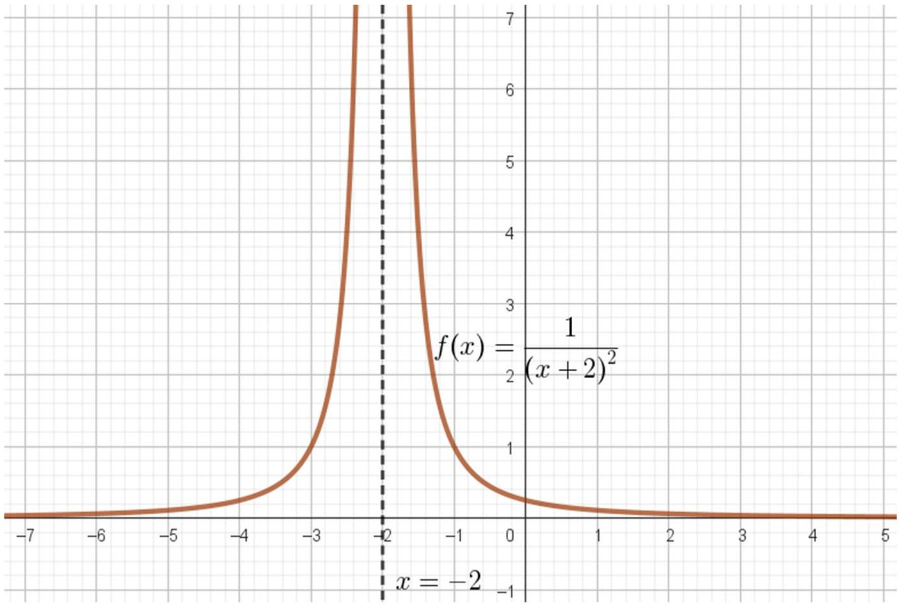
(1) Una función *<u>puede tener infinitas asíntotas verticales</u>*.

(2) En las funciones racionales las asíntotas verticales se hallan en los valores *x* que anulan al denominador.

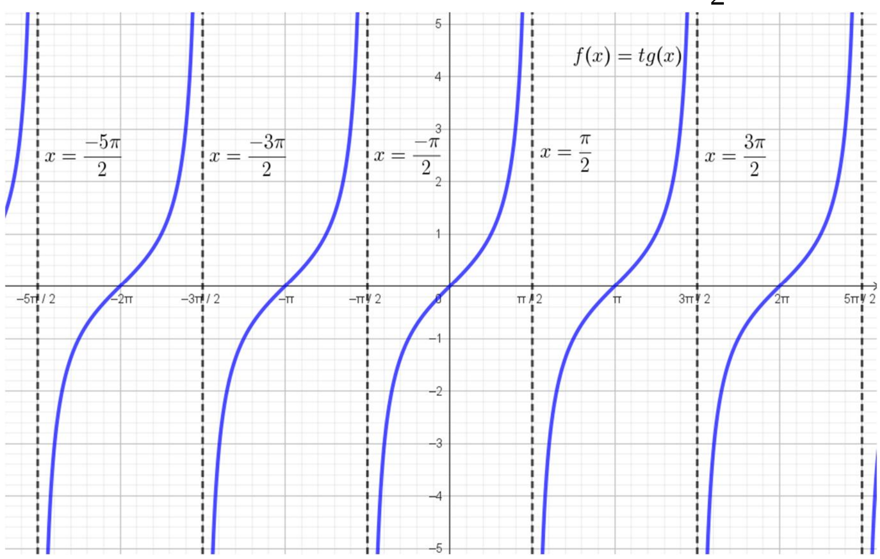
(3) La gráfica de *<u>la función no puede cortar a las asíntotas verticales</u>*.

Ejemplos:

1) La recta $x=-2$ es una asíntota vertical de la función $f\left(x\right)=\dfrac{1}{\left(x+2\right)^{2}}$.



2) La función $f\left(x\right)=\operatorname{tg} x$ tiene infinitas asíntotas verticales: $x=\dfrac{\pi}{2}+n\pi$ con $n\in\mathbb{Z}$



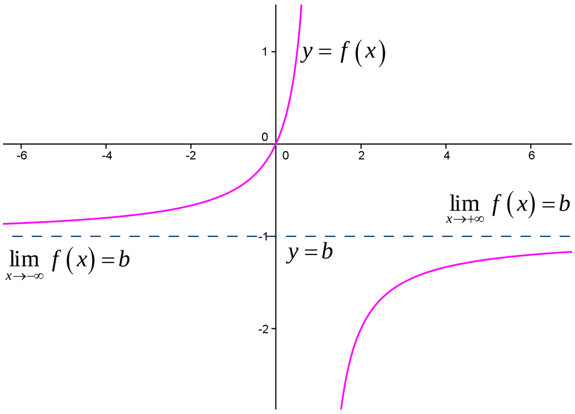
3. <u>LÍMITES EN EL INFINITO: ASÍNTOTAS HORIZONTALES</u>

Decir que $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=b$ significa que cuando *x* se hace tan grande como queramos, la función toma valores muy próximos un número fijo *b*.

De igual modo, $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)=b$ significa que $f\left(x\right)$ se aproxima a *b* cuando *x* se hace cada vez más pequeño.

La recta $y = k$ es una <u>asíntota horizontal</u> de $f(x)$ sii existe alguno de los siguientes límites:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = k \qquad \text{o} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = k$$



Observaciones:

(1) Una función tiene <u>*como máximo dos asíntotas horizontales*</u>.

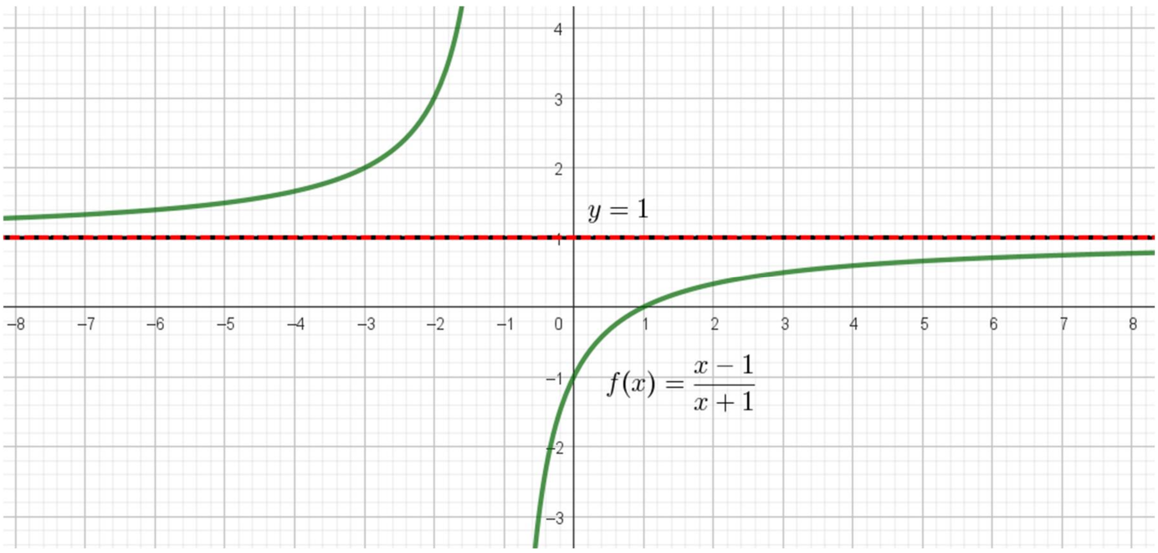
(2) La gráfica de <u>*la función puede cortar a las asíntotas horizontales*</u>.

(3) Para *funciones racionales*:

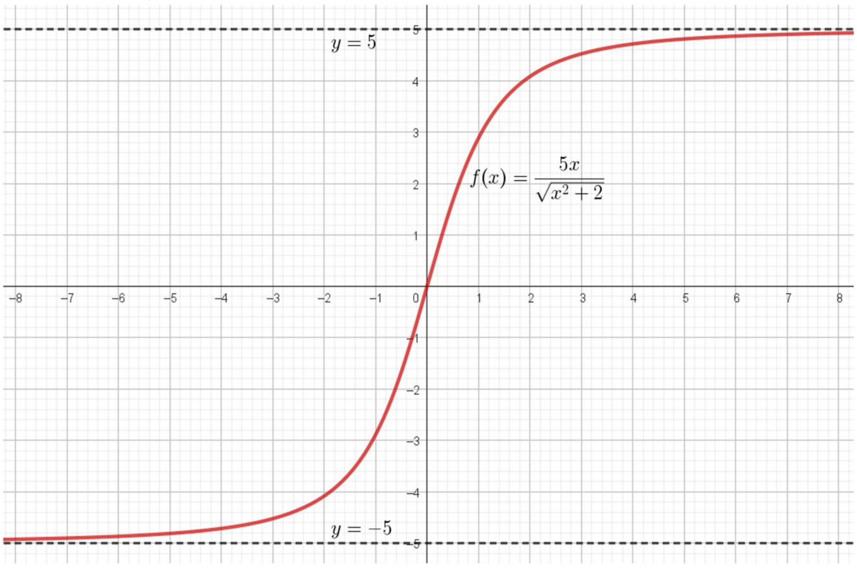
- Si en una función racional el grado del numerador es menor que el grado del denominador la recta $y = 0$ (el eje OX) es una asíntota horizontal.
- Si en una función racional el grado del numerador y el del denominador son iguales la recta $y = b$ será una asíntota horizontal (b indica el cociente entre los coeficientes líderes del numerador y del denominador).
- Si en una función racional el grado del numerador es una unidad mayor que el grado del denominador la función presenta una asíntota oblicua y no hay asíntotas horizontales.
- Si en una función racional el grado del numerador es dos o más unidades mayor que el grado del denominador, dicha función no tiene asíntotas horizontales.

<u>Ejemplos:</u>

1) La función $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ tiene una asíntota horizontal, que es la recta $y = 1$.



2) La función $f\left(x\right)=\dfrac{5x}{\sqrt{x^2+2}}$ tiene dos asíntotas horizontales; las rectas $y=5$ e $y=-5$.



4. LÍMITES INFINITOS EN EL INFINITO: ASÍNTOTAS OBLICUAS

También puede suceder que $\lim_{x\to\infty} f\left(x\right)=\infty$, lo que significa que x y $f\left(x\right)$ se hacen infinitamente grandes a la vez. Por tanto: $\lim_{x\to\infty} f\left(x\right)=\infty \Leftrightarrow f\left(x\right)>k$ para todo $x>p$, siendo k y p números arbitrariamente grandes.

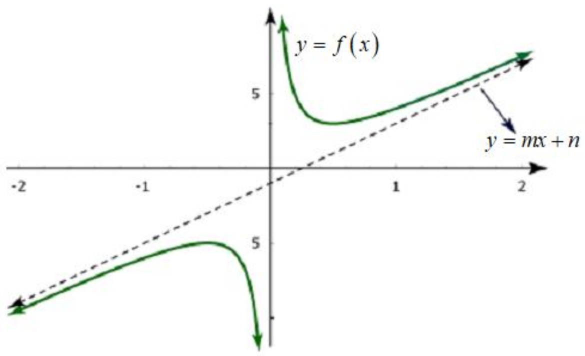
La recta $y=mx+n$, con $m\neq 0$, es una <u>asíntota oblicua</u> de $f\left(x\right)$ sii existe alguno de los siguientes límites:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f\left(x\right)-mx-n\right)=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f\left(x\right)-mx-n\right)=0$$

en cuyo caso

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f\left(x\right)}{x} \quad \text{y} \quad n=\lim_{x\to\infty}\left(f\left(x\right)-mx\right)$$



Observaciones:

(1) Una función puede tener *<u>como máximo dos asíntotas oblicuas</u>*.

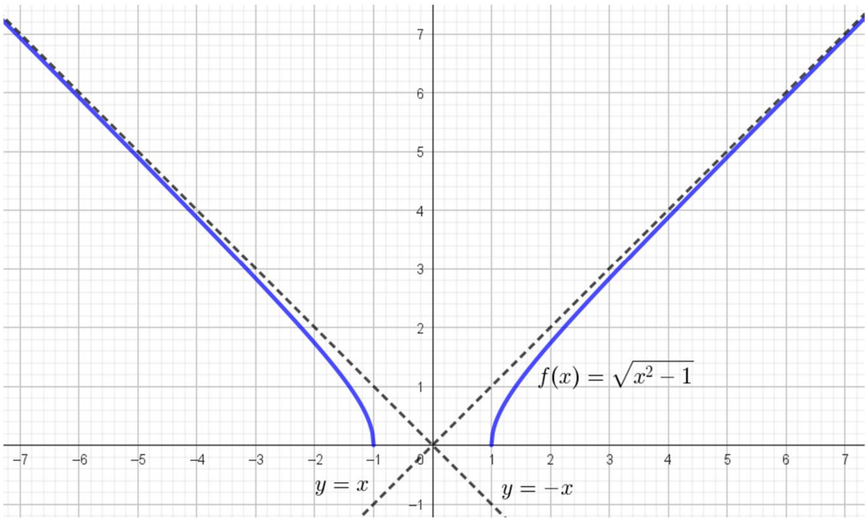
(2) La gráfica de *<u>la función puede cortar a las asíntotas oblicuas</u>* en uno o varios puntos.

(3) Si en una función racional el grado del numerador es dos o más unidades mayor que el del denominador, no hay asíntota horizontal.

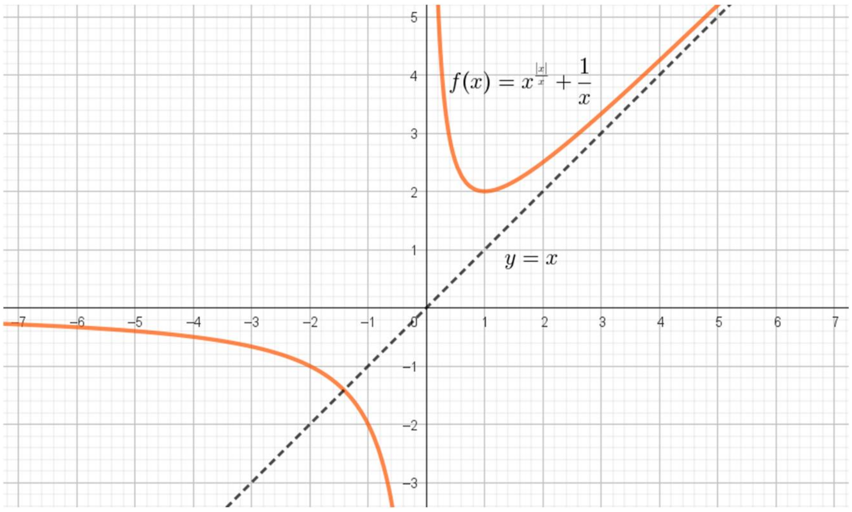
(4) Si $f\left(x\right)=\dfrac{P\left(x\right)}{Q\left(x\right)}$ es una función racional y $\text{grado}\,P\left(x\right)-\text{grado}\,Q\left(x\right)=1$, entonces la asíntota oblicua $y=mx+n$ de $f\left(x\right)$ es el cociente de $P\left(x\right)$ entre $Q\left(x\right)$.

Ejemplos:

1) La función $f\left(x\right)=\sqrt{x^2-1}$ tiene dos asíntotas oblicuas, que son las rectas $y=x$ e $y=-x$.



2) La función $f\left(x\right)=x^{\frac{|x|}{x}}+\dfrac{1}{x}$ tiene una asíntota oblicua solo, por un lado, que es la recta $y=x$.



Además, es un ejemplo de función con una asíntota horizontal y una asíntota oblicua.

5. <u>RAMAS INFINITAS</u>

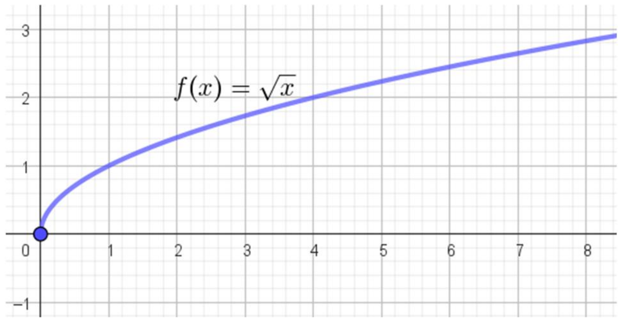
Una función $y=f\left(x\right)$ tiene una rama parabólica cuando

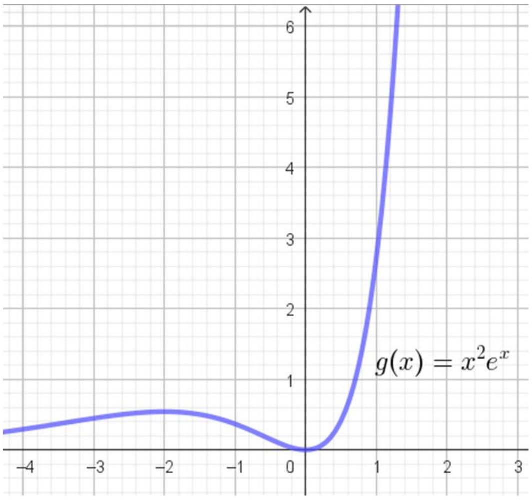
$$\lim_{x\to-\infty} f\left(x\right)=\pm\infty \quad \text{o} \quad \lim_{x\to+\infty} f\left(x\right)=\pm\infty$$

y no tiene asíntotas oblicuas.

Ejemplos:

Las siguientes funciones tienen ramas parabólicas:





La gráfica de una función que posee una rama parabólica se comporta como si fuese parte de una parábola (de eje vertical, oblicuo u horizontal).

6. OPERACIONES CON LÍMITES DE FUNCIONES

1) $\lim\limits_{x\to a} k = k$ donde $k \in \mathbb{R}$

El límite de un número es el propio número.

2) $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$

El límite de una suma (resta) es igual a la suma (resta) de los límites.

3) $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$

El límite de un producto es igual al producto de los límites.

4) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ siempre que $g(a) \neq 0$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$

El límite de un cociente es igual al cociente de los límites

5) $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)^{g(x)}\right] = \left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ siempre que $\lim\limits_{x\to a} f(x) > 0$

El límite de una potencia es igual a la potencia de los límites.

6) $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$ siempre que $f(x) \geq 0$ y $\lim\limits_{x\to a} f(x) \geq 0$ cuando n sea par.

El límite de una raíz es la raíz del límite.

7) $\lim\limits_{x\to a}\left[\log_A f(x)\right] = \log_A\left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]$ siempre que $f(x) > 0$ y $\lim\limits_{x\to a} f(x) > 0$

El límite de un logaritmo es igual al logaritmo del límite.

7. REGLAS PARA EL CÁLCULO DE LÍMITES

Regla I: Para calcular el límite de una función, cuando $x \to a \in \mathbb{R}$, si la función es continua, basta con sustituir a en la función y si nos da un número real, ya está resuelto.

¡¡Inconveniente!! Que no siempre vamos a obtener un número real.

Regla II: Las funciones polinómicas, cuando $x \to \pm\infty$, se comportan del mismo modo que su término de mayor grado.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(a_n x^n + ... + a_1 x + a_0\right) = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n$$

Regla III: Límite de una potencia y de una exponencial:

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^n = \begin{cases} \pm\infty & \text{si} \quad n>0 \\ 1 & \text{si} \quad n=0 \\ 0 & \text{si} \quad n<0 \end{cases} \qquad \lim_{x\to\pm\infty} n^x = \begin{cases} \pm\infty & \text{si} \quad n>1 \\ 0 & \text{si} \quad 0<n<1 \\ \nexists & \text{si} \quad n<0 \end{cases}$$

Regla IV:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_n x^n + ... + a_0}{b_m x^m + ... + b_0} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \begin{cases} \pm\infty & \text{si} \quad n>m \\ \dfrac{a_n}{b_m} & \text{si} \quad n=m \\ 0 & \text{si} \quad n<m \end{cases}$$

Regla V: Cuando al aplicar la regla I en el cálculo de límites el resultado obtenido no tiene sentido, aparecen las indeterminaciones, que son expresiones como las siguientes:

Indeterminaciones	$\frac{+\infty}{+\infty}$	$\frac{+\infty}{-\infty}$	$\frac{-\infty}{+\infty}$	$\frac{-\infty}{-\infty}$
Tipo	$\frac{\infty}{\infty}$			

Indeterminaciones	$(+\infty)-(+\infty)$ $(-\infty)-(-\infty)$	$(+\infty)+(-\infty)$ $(-\infty)+(+\infty)$
Tipo	$\infty-\infty$	

Indeterminaciones	$(\pm\infty)\cdot 0$	$0\cdot(\pm\infty)$	$\frac{L}{0}$	$\frac{\pm\infty}{0}$	$\frac{0}{0}$
Tipo	$0\cdot\infty$		$\frac{K}{0}$		$\frac{0}{0}$

Indeterminaciones	0^0	$(\pm\infty)^0$	$1^{+\infty}$	$1^{-\infty}$
Tipo	0^0	∞^0	1^{∞}	

8. <u>OPERACIONES CON EXPRESIONES INFINITAS</u>

El conjunto $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ se denomina **<u>recta real ampliada</u>** o completa, y verifica:

a) $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty,+\infty]$

b) $\overline{\mathbb{R}}$ es un conjunto totalmente ordenado, ya que $-\infty < a$ y $+\infty > a \quad \forall a \in \mathbb{R}$.

c) $\overline{\mathbb{R}}$ está acotado, ya que lo está superiormente por $+\infty$ e inferiormente por $-\infty$.

8.1.SUMAS

$$\left.\begin{array}{l} +\infty + n = +\infty \\ -\infty + n = -\infty \end{array}\right\} \text{donde } n \in \mathbb{R}$$

$$+\infty + (+\infty) = +\infty$$

$$-\infty + (-\infty) = -\infty$$

$$-(-\infty) = +\infty$$

8.2.PRODUCTOS

$$(+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty$$

$$\text{Si } n > 0 \Rightarrow \begin{cases} (+\infty)\cdot n = +\infty \\ (-\infty)\cdot n = -\infty \end{cases}$$

$$\text{Si } n < 0 \Rightarrow \begin{cases} (+\infty)\cdot n = -\infty \\ (-\infty)\cdot n = +\infty \end{cases}$$

8.3.COCIENTES

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{n}{+\infty} = 0 \\ \dfrac{n}{0} = \pm\infty \text{ si } n \neq 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \dfrac{+\infty}{0} = \pm\infty \\ \dfrac{0}{+\infty} = 0 \end{array}$$

8.4.POTENCIAS

$$(+\infty)^{+\infty} = +\infty \quad \text{y} \quad (+\infty)^{-\infty} = 0$$

$$\text{Si } n > 0 \Rightarrow (+\infty)^n = +\infty$$

$$\text{Si } n < 0 \Rightarrow (+\infty)^n = 0$$

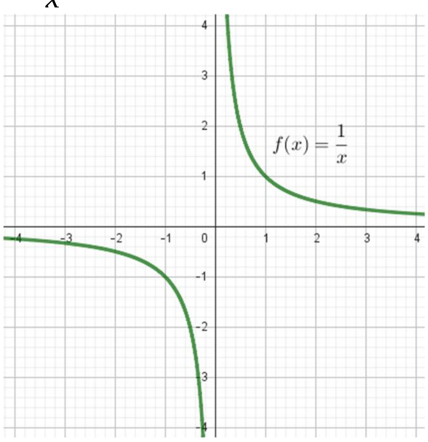
$$\text{Si } n \neq 0 \Rightarrow n^0 = 1$$

$$\text{Si } n > 1 \Rightarrow \begin{cases} n^{+\infty} = +\infty \\ n^{-\infty} = 0 \end{cases} \quad \text{y si} \quad 0 < n < 1 \Rightarrow \begin{cases} n^{+\infty} = 0 \\ n^{-\infty} = +\infty \end{cases}$$

8. ALGUNOS LÍMITES IMPORTANTES

Vamos a estudiar algunos límites muy sencillos, pero que aparecen muy a menudo y que por tanto es necesario tenerlos siempre presentes:

(1) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

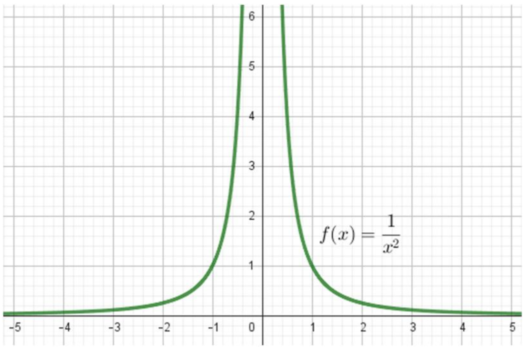


$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$$

(2) $g(x)=\dfrac{1}{x^2}$

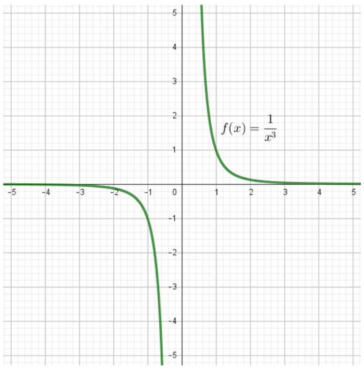


$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to0-}\frac{1}{x^2}=+\infty\\ \displaystyle\lim_{x\to0+}\frac{1}{x^2}=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow\exists\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}=+\infty$$

(3) $h(x)=\dfrac{1}{x^3}$

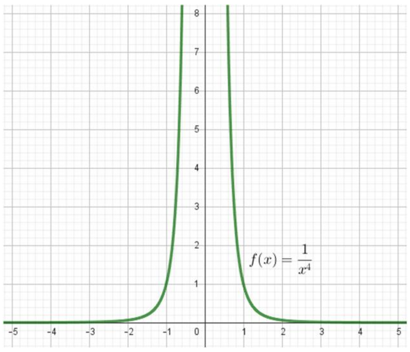


$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^3}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3}=0$$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to0-}\frac{1}{x^3}=-\infty\\ \displaystyle\lim_{x\to0+}\frac{1}{x^3}=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow\nexists\lim_{x\to0}\frac{1}{x^3}$$

(4) $i(x)=\dfrac{1}{x^4}$



$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^4}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^4}=0$$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to0-}\frac{1}{x^4}=+\infty\\ \displaystyle\lim_{x\to0+}\frac{1}{x^4}=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow\exists\lim_{x\to0}\frac{1}{x^4}=+\infty$$

(5) En general:

Para n impar:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}=0$$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to0-}\frac{1}{x^n}=-\infty\\ \displaystyle\lim_{x\to0+}\frac{1}{x^n}=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow\nexists\lim_{x\to0}\frac{1}{x^n}$$

Para n par:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}=0$$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to0-}\frac{1}{x^n}=+\infty\\ \displaystyle\lim_{x\to0+}\frac{1}{x^n}=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow\exists\lim_{x\to0}\frac{1}{x^n}=+\infty$$

Ejemplo interesante:

Calculamos $\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$:

Sabemos que $-1 \le \operatorname{sen} x \le 1$ y para $x \ne 0$ se tiene que $-\frac{1}{x} \le \frac{\operatorname{sen} x}{x} \le \frac{1}{x}$, y como $\lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x} = 0 = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}$ resulta que $\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0$

$\boxed{\textbf{Un par de consideraciones}}$ a tener en cuenta al calcular límites:

a) Si $P(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ es un polinomio, entonces

$$\lim_{x\to\pm\infty} P(x) = \pm\infty$$

y el resultado solo depende del monomio $a_n x^n$.

b) Para límites en el infinito de funciones racionales se tiene la siguiente regla práctica, donde

$$P(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0 \quad \text{y} \quad Q(x) = b_m x^m + ... + b_1 x + b_0$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} \pm\infty & \text{si} \quad \text{grado}(P) > \text{grado}(Q) \\ \frac{a_n}{b_m} & \text{si} \quad \text{grado}(P) = \text{grado}(Q) \\ 0 & \text{si} \quad \text{grado}(P) < \text{grado}(Q) \end{cases}$$

9. RESOLUCIÓN DE INDETERMINACIONES

Cuando al calcular el límite de una suma, un producto, un cociente o una potencia de funciones no se pueden aplicar las propiedades de los límites, es decir, hay que hacer un estudio particular de cada caso, suele decirse que estos límites presentan una **indeterminación**.

9.1. INDETERMINACIÓN DEL TIPO $\left[\frac{k}{0}\right]$ CON $k \in (\mathbb{R} - \{0\}) \cup \{\pm\infty\}$

Se calculan los límites laterales: $\lim_{x\to a+} f(x)$, $\lim_{x\to a-} f(x)$

Si existen ambos límites y coincide su valor, entonces:

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a-} f(x)$$

Si no existe alguno de los límites laterales o no coincide su valor, entonces, no existe $\lim_{x\to a} f(x)$.

9.2. INDETERMINACIÓN DEL TIPO $\left[\frac{0}{0}\right]$

a) Para funciones racionales

Se descomponen numerador y denominador en factores y se simplifica.

b) Para funciones irracionales

Si se trata de una función con raíces cuadradas en el numerador (o en el denominador), multiplicamos numerador y denominador por la expresión conjugada del numerador (o del denominador).

9.3. INDETERMINACIÓN DEL TIPO $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

Se divide numerador y denominador por la mayor potencia de x que aparezca en la función (basta con dividir por la mayor potencia de x del denominador).
Si la función es exponencial, se divide por la mayor exponencial que aparezca.

9.4. INDETERMINACIÓN DEL TIPO $\left[\infty-\infty\right]$

a) La función es diferencia de dos funciones racionales
Se efectúa dicha operación.

b) La función es diferencia de funciones irracionales
Multiplicamos y dividimos por la expresión conjugada de la función.

9.5. INDETERMINACIÓN DEL TIPO $\left[0\cdot\infty\right]$

Transformar esta indeterminación en una de las anteriores, generalmente efectuando las operaciones.

9.6. INDETERMINACIÓN DEL TIPO $\left[1^{\infty}\right]$

Se resuelve empleando la siguiente igualdad:

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x\to a} g(x)\left[f(x)-1\right]}$$

donde $a\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}:=\overline{\mathbb{R}}$ y sabemos que

$$e=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=2,718281\ldots\in\mathbb{I}=\mathbb{R}-\mathbb{Q}$$

Ejercicios:

5. *Estudia qué tipo de indeterminación[2] presentan los siguientes límites:*

a) $\displaystyle\lim_{x\to-2}\frac{\sqrt{x^2-4}}{x+2}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3-3x}{x^2+x^3}\right)^{3x}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\sqrt{x^3+x}\right)$

d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^6+x}{x^4-3}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x^2-1}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x+3}-\left(x^2+1\right)\right]$

---

[2] Los tipos de indeterminaciones que se pueden presentar son: $\frac{k}{0}$ con $k\in\left(\mathbb{R}-\{0\}\right)\cup\{\pm\infty\}$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty,\ 1^{\infty},\ \infty^{0},\ 0^{0},\ \infty\cdot 0$

6. *(Indeterminación del tipo* $\frac{k}{0}$ con $k \neq 0$*). Calcula los siguientes límites:*

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x+6}{5x^2}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x-5}{x^2}$

e) $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{2x}{x^2-16}$

f) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{5x}{9-x^2}$

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x+8}{x^4+2x^2}$

h) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+1}{x^3+1}$

7. *(Indeterminación del tipo* $\frac{0}{0}$*). Calcula los siguientes límites:*

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^4-1}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^2-1}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x-6}{(x-2)^2}$

d) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x+1}{-1-x}$

e) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{9-x^2}{2-\sqrt{x^2-5}}$

f) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}$

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$

h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\sqrt{x+4}-2}$

i) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{2x+4}{x^2-4}$

8. *(Indeterminación del tipo* $\frac{\infty}{\infty}$*). Calcula el valor de los siguientes límites:*

a) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2-2x+1}{x-24}$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{(1+x)^2-1}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2-1}{x^3-1}$

d) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x^2-7}{\sqrt[3]{x^6+x}}$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{2x^3-1}}{3x^4}$

f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2-6x+8}{2x^2-5}$

g) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^2-1}$

h) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1-x^6}{x^3+1}$

9. *(Indeterminación del tipo* $\infty-\infty$*). Calcula los siguientes límites:*

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x-5}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x^2-x+1}{x+1}-x\right)$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^4+x}-4x^2\right)$

f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(8x-\sqrt{16x^2-3x}\right)$

c) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^4+1}-x^2\right)$ *g)* $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+5}{2}-\frac{x^2-1}{x}\right)$

d) $\lim_{x\to1}\left(\frac{2x}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)$ *h)* $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+3x-2}-4x\right)$

10.*(Indeterminación del tipo $0\cdot\infty$). Calcula los siguientes límites:*

a) $\lim_{x\to0}\left(\frac{3}{x^3}\cdot\frac{x^2+5x}{4}\right)$ *e)* $\lim_{x\to2}\left(\frac{x-2}{5}\cdot\sqrt{\frac{1}{x-2}}\right)$

b) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x}\cdot\sqrt{x^2+8}\right)$ *f)* $\lim_{x\to4}\left(\sqrt{x^2-16}\cdot\sqrt{\frac{x}{x-4}}\right)$

c) $\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\sqrt{x^4+x}+x\right)\frac{1}{x}\right]$ *g)* $\lim_{x\to2}\left(\sqrt{x^2-4}\cdot\frac{8}{3x-6}\right)$

d) $\lim_{x\to3}\left[\left(x^2-9\right)\cdot\frac{1}{x-3}\right]$ *h)* $\lim_{x\to-1}\left(\frac{5}{4x+x}\cdot\frac{x+1}{7x}\right)$

11.*(Indeterminación del tipo 1^∞). Calcula el valor de los siguientes límites:*

a) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x^2+2}\right)^{5x}$ *d)* $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x+3}{4x-5}\right)^{2x}$

b) $\lim_{x\to0}\left(1-7x\right)^{\frac{4}{x}}$ *e)* $\lim_{x\to0}\left(1+3x\right)^{\frac{6}{x}}$

c) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5x^3}{5x^3-7}\right)^{2x}$ *f)* $\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{2x}{x^2-1}\right)^{-4x}$

12.*Calcula los siguientes límites:*

a) $\lim_{x\to a}\frac{x^3-a^3}{x^2-2ax+a^2}$ b) $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-x}-1}{x}$ c) $\lim_{x\to4}\left(5-x\right)^{\frac{2x+8}{x-4}}$

d) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x-3}-x$ e) $\lim_{x\to1}\left(\frac{3x+1}{2x+2}\right)^{\frac{6x}{x^2-3x+2}}$ f) $\lim_{x\to3}\frac{x^4-81}{x^2-9x+18}$

g) $\lim_{x\to0}\sqrt[x]{x^2+x+1}$ h) $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{8+x}-3}$ i) $\lim_{x\to1}\frac{3x^2-5x+2}{2x^2+x-3}$

j) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+4x-1}{5x^3+2x-3}$ k) $\lim_{x\to\sqrt{5}}\left(x^2-4\right)^{\frac{x}{x^2-5}}$ l) $\lim_{x\to a}\frac{x-a}{x^3-a^3}$

m) $\lim_{x\to3}\frac{\sqrt[3]{x^3-27}}{\sqrt[3]{x^2+6x-27}}$ n) $\lim_{x\to a}\frac{x^5-a^5}{x^2-3ax+2a^2}$ o) $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}$

p) $\lim_{x\to-2}\frac{x^2-x-6}{x^2-3x-10}$ q) $\lim_{x\to1}\left(\frac{x^3+1}{x^2+1}\right)^{\frac{3}{x-1}}$ r) $\lim_{x\to2}\frac{x^3+5x^2+5x-2}{2x^2+5x+2}$

s) $\lim_{x\to1}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ t) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{3x}\right)^{\frac{x-1}{x+2}}$ u) $\lim_{x\to\frac{5}{2}^-}\frac{3x+1}{2x-5}$

13. *Estudia las asíntotas de las siguientes funciones.*

a) $f\left(x\right)=\dfrac{x+2}{x-1}$

b) $f\left(x\right)=\dfrac{x-x^2}{x+1}$

c) $f\left(x\right)=\dfrac{9-x^2}{x-3}$

d) $f\left(x\right)=\dfrac{x^2-x}{2x}$

e) $f\left(x\right)=\dfrac{x^2}{x-1}$

f) $f\left(x\right)=\dfrac{x^2+3x}{2x-1}$

g) $f\left(x\right)=\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-5x+4}$

h) $f\left(x\right)=\dfrac{x\left(x^2-x\right)}{x^2}$

14. *Dadas las siguientes funciones calcula sus asíntotas (verticales, horizontales y oblicuas), si existen:*

a) $f(x)=x^2-4x+3$

b) $g(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$

c) $h(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$

d) $j(x)=\dfrac{2x+3}{x-2}$

CONTINUIDAD DE FUNCIONES

10. CONCEPTO DE FUNCIÓN CONTINUA

10.1. Definición. Caracterización

Sea I un intervalo[3]. La función $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en el punto $\boxed{x = a \in I}$ cuando

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \qquad (1)$$

Aclaraciones:

- Para que una función sea continua en un punto, dicho punto ha de pertenecer a su dominio de definición. En otro caso, no tiene sentido hablar de continuidad.

  No tiene sentido decir que la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ no es continua en $x = 0$, porque dicho punto no pertenece a su dominio.

- La condición (1) de continuidad implica:
  - $\exists \lim_{x \to a} f(x)$
  - $\exists f(a)$
  - Dichos valores coincidan: $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Ejemplos:

1) La función $f(x) = x^2 \cos x$ es continua en $x = 0$, ya que

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x^2 \cos x = 0 \\ f(0) = 0^2 \cos 0 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = f(0) \Rightarrow f \text{ es continua en } x = 0$$

2) La función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$ no es continua en $x = 0$, ya que

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty \\ f(0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) \neq f(0) \Rightarrow f \text{ NO es continua en } x = 0$$

Una función es continua cuando lo es en todos los puntos de su dominio de definición.

Una función es continua por la derecha en un punto si existe límite por la derecha en él y coincide con el valor que toma la función en ese punto:

$$f \text{ continua por la derecha en } x = a \Leftrightarrow \lim_{x \to a+} f(x) = f(a)$$

[3] Si I no es un intervalo, entonces para que esta definición sea correcta, hay que exigir que $a \in I \cap I'$, donde I' es el conjunto de puntos de acumulación de I. (Se tratará con mayor profundidad en Matemáticas II)

Una función es continua por la izquierda en un punto si existe límite por la izquierda en él y coincide con el valor que toma la función en ese punto:

$$f \text{ continua por la izquierda en } x = a \Leftrightarrow \lim_{x\to a-} f(x) = f(a)$$

Caracterización:

Una función es continua en un punto cuando es continua por la izquierda y por la derecha en ese punto:

$$f \text{ continua en } x = a \Leftrightarrow f \text{ continua por la derecha y por la izquierda en } x = a$$

Como ***consecuencia***, la continuidad de una función en un punto solo depende de su comportamiento en puntos «suficientemente próximos» a él, es decir, la continuidad de una función en un punto es una propiedad local (en el siguiente apartado incidiremos en este punto).

Ejercicios:

15. *La función* $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2-9}$, *¿es continua en* $x = -3$*?*

16. *Representa la función* $f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{si } x \geq 3 \\ 4-x & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ 2 & \text{si } x < 1 \end{cases}$, *y estudia su continuidad en los puntos* $x = 1$ *y* $x = 3$.

Una función es continua en $[a,b]$ cuando:

(1) Sea continua en el intervalo abierto (a,b)

(2) Sea continua por la derecha en a ($\lim_{x\to a+} f(x) = f(a)$)

(3) Sea continua por la izquierda en b ($\lim_{x\to b-} f(x) = f(b)$)

Ejercicios:

17. *Estudiar la continuidad de la función* $f(x) = |x|$ *en* $x = 0$.

18. *Calcula* k *para que la función*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2-1} & \text{si } x \neq 1 \\ k & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

sea continua en $x = 1$.

19. *¿Cuál debe ser el valor de* k *para que la función*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4-(x+2)^2}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ k & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

sea continua en $x = 0$*?*

20. *Estudia la continuidad de la función*

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si} \quad x\neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x=0 \end{cases}$$

en $x=0$.

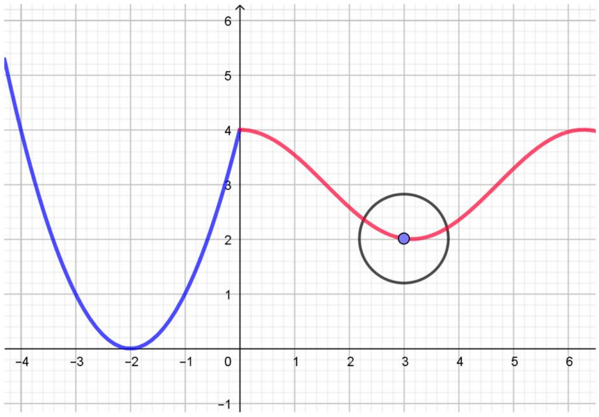
10.2. <u>Carácter local de la continuidad</u>

La continuidad de una función en un punto solo depende del comportamiento de dicha función «cerca» de dicho punto. Este hecho lo aplicamos, sin darnos cuenta, cada vez que estudiamos la continuidad de una función definida a trozos, como hemos visto en los ejercicios anteriores y como podemos ver en el siguiente **ejemplo**:

Cuando decimos que la función

$$f(x)=\begin{cases} (x+2)^2 & \text{si} \quad x<0 \\ \cos x+3 & \text{si} \quad x\geq 0 \end{cases}$$

es continua en $(0,+\infty)$ solo nos estamos fijando en $\cos x+3$ que, evidentemente, es una función continua. En otras palabras, la continuidad de f en el punto $x=3$ no depende del comportamiento de dicha función en $(-\infty,0)$.



10.3. <u>Operaciones con funciones continuas</u>

a) Continuidad de la suma/resta de funciones

Si f y g son funciones continuas en $x=a$, entonces la función $f+g$ es continua en $x=a$.

En efecto:

$$\lim_{x\to a}(f\pm g)(x)=\lim_{x\to a} f(x)\pm\lim_{x\to a} g(x)=f(a)\pm g(a)=(f\pm g)(a)$$

b) Continuidad de la función opuesta

Si f es una función continua en $x=a$, entonces la función $-f$ es continua en $x=a$.

En efecto:

$$\lim_{x\to a}(-f)(x)=-\lim_{x\to a} f(x)=-f(a)$$

c) Continuidad del producto de un número real por una función

Si f es una función continua en $x=a$ y $\alpha\in\mathbb{R}$, entonces la función αf es continua en $x=a$.

En efecto:

$$\lim_{x\to a}(\alpha f)(x)=\lim_{x\to a}\alpha f(x)=\alpha\lim_{x\to a} f(x)=\alpha f(a)$$

d) Continuidad del producto de funciones

Si f y g son funciones continuas en $x=a$, entonces la función fg es continua en $x=a$.

En efecto:

$$\lim_{x\to a}(fg)(x)=\lim_{x\to a}\left[f(x)g(x)\right]=\lim_{x\to a}(x)\lim_{x\to a} g(x)=f(a)g(a)=(fg)(a)$$

e) Continuidad del cociente de funciones

Si f y g son funciones continuas en $x=a$, entonces la función $\dfrac{f}{g}$ es continua en $x=a$.

En efecto:

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}=\frac{f(a)}{g(a)}=\left(\frac{f}{g}\right)(a)$$

f) Continuidad de la función compuesta

Si f es una función continua en $x=a$ y g es una función continua en $f(a)$, entonces la función $g\circ f$ es continua en $x=a$.

Ejemplo:

La función $h:\mathbb{R}-\{1\}\to\mathbb{R}$ definida por $h(x)=\left(\dfrac{x^2+x+1}{x-1}\right)^2$ es continua en $\mathbb{R}-\{1\}$, ya que h puede verse como función compuesta de las funciones:

$$f(x)=\frac{x^2+x+1}{x-1}\qquad \forall x\in\mathbb{R}-\{1\}$$

$$g(x)=x^2\qquad \forall x\in\mathbb{R}$$

de la siguiente forma: $h(x)=(g\circ f)(x)\quad \forall x\in\mathbb{R}-\{1\}$.

Puesto que f y g son continuas en $\mathbb{R}-\{1\}$, lo mismo sucede con h.

10.4. Continuidad de las funciones elementales

- Las **funciones polinómicas**, $f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$, son continuas en todos los puntos de su dominio, que es $\mathbb{R}$.
- Las **funciones racionales**, $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, son continuas (en su dominio).
- La **función exponencial**, $y=e^{f(x)}$, es continua siempre que lo sea $f(x)$.
- La **función logarítmica**, $y=\log f(x)$, es continua en todo punto x, tal que $f(x)>0$ y $f(x)$ sea continua.

- Las **funciones trigonométricas**, $y = \text{sen}\, x$, $y = \cos x$, son siempre continuas. La función $y = \text{tg}\, x$ es continua en su dominio: $\mathbb{R} - \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \right\}$

- Las **funciones definidas a trozos** serán continuas si lo son en sus intervalos respectivos y en los puntos de unión. En estos puntos habrá que ver que la función esté definida y que los límites laterales existan, sean iguales y que dichos valores coincidan con el valor de la función en dicho punto.

Ejercicios:

21. *Calcula los valores de a y b para que $f(x)$ sea continua en todos los puntos.*

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ 3x + b & \text{si } 0 \le x < 2 \\ ax^2 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$

22. *Halla k para que las siguientes funciones sean continuas:*

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^3 - 8x^2 + 20x - 16} & x \ne 2 \\ k + 1 & x = 2 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1} & x < 1 \\ k & x = 1 \\ \dfrac{\sqrt{x+3} - 2}{\sqrt{5-x} - 2} & x > 1 \end{cases}$

23. *Estudia la continuidad de las funciones:*

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & -2 < x \le 1 \\ x^2 + 4 & 1 < x < 2 \\ 7 & x = 2 \\ 2x + 4 & 2 < x < 5 \\ 3x - 1 & 5 \le x \le 7 \\ \dfrac{-3x+1}{x-7} & x > 7 \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} 4x + 5 & x < 0 \\ x + 5 & 0 \le x < 1 \\ 6x & 1 < x < 2 \\ -4x & 2 < x < 3 \\ \dfrac{x^2 - 9}{-x + 3} & 3 < x \le 10 \\ \dfrac{1}{x - 10} & x > 10 \end{cases}$$

24. *Calcula los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ para que las siguientes funciones sean continuas:*

a) $f(x) = \begin{cases} x - a & \text{si} \quad x \le 0 \\ \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{3x} & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ bx & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{si} \quad x < 0 \\ x - a & \text{si} \quad 0 \le x < 1 \\ \dfrac{a}{x} & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$

25. *¿Cómo deberá definirse $f(x)$ para que la función $f(x) = \dfrac{5 - \sqrt{24 + x}}{x - 1}$ $x \ne 1$, sea continua en $x = 1$?*

26. *Estudiar la continuidad de la siguiente función:* $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x=2 \\ \dfrac{|x-2|}{x-2} & \text{si } x\neq 2 \end{cases}$

27. *Calcula los valores de M y N para que la función f sea continua:*

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^4-3x^3-11x^2+23x+6}{x^2+x-6} & \text{si } x\neq -3 \text{ y } x\neq 2 \\ N & \text{si } x=-3 \\ M & \text{si } x=2 \end{cases}$$

28. *Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:*

a) $f(x)=\dfrac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$ *b)* $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{(x-1)^2}$

29. *Estudiar la continuidad de la siguiente función:*

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x-3} & \text{si } x\leq 0 \\ -x^2+14 & \text{si } 0<x\leq 3 \\ \sqrt{x^2+16} & \text{si } x>3 \end{cases}$$

10.5. Clasificación de las discontinuidades

El ***criterio adoptado por la UCLM en la EvAU*** es el siguiente:

Una función es discontinua en un punto cuando falla alguna de las tres condiciones de la definición de función continua en un punto.

Clasificación de las discontinuidades en a:

i) Evitable

$\begin{cases} \nexists f(a) \text{ pero } \lim_{x\to a} f(x)\in\mathbb{R} \\ \text{o} \\ \lim_{x\to a} f(x)\neq f(a) \end{cases}$, en cuyo, caso diremos que f presenta una **discontinuidad evitable.**

ii) No evitable

ii-1) **De primera especie**

$\nexists \lim_{x\to a} f(x)$ ($\exists \lim_{x\to a^-} f(x)=L,\ \exists \lim_{x\to a^+} f(x)=L'$ y $L\neq L'$), en cuyo caso diremos que f presenta una **discontinuidad de salto** (finito o infinito).

Finito, si $L, L'\in\mathbb{R}$. En este caso el salto es $|L-L'|$.

Infinito, si $\begin{cases} L = \pm\infty \\ L' \in \mathbb{R} \end{cases}$ o $\begin{cases} L \in \mathbb{R} \\ L' = \pm\infty \end{cases}$.

$\nexists \lim\limits_{x\to a} f(x)$ porque los límites laterales son infinitos y distintos o $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$. En este caso diremos que f tiene una **discontinuidad asintótica** en a.

ii-2) **De segunda especie**

Diremos que f presenta una **discontinuidad de segunda especie o esencial**, cuando al menos uno de los límites laterales no exista.

$$\text{Función Discontinua} \begin{cases} \text{Evitable} \\ \text{No evitable} \begin{cases} \text{De primera especie} \begin{cases} \text{De salto} \begin{cases} \text{Finito} \\ \text{Infinito} \end{cases} \\ \text{Asintótica} \end{cases} \\ \text{De segunda especie} \end{cases} \end{cases}$$

Ejemplos:

(1) La función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$ tiene una discontinuidad evitable en $x=0$, ya que $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} \left(x^2+1\right) = 2 \neq -1 = f(-1)$.

El valor verdadero de f en $x=0$ es $f(0)=0$.

(2) La función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si} \quad x \neq -1 \\ -1 & \text{si} \quad x = -1 \end{cases}$ tiene una discontinuidad evitable en $x=-1$, ya que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x = 0 \neq 1 = f(1)$.

El valor verdadero de f en $x=-1$ es $f(-1)=2$.

(3) La función «signo de x», $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ -1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$ tiene una discontinuidad de salto finito en $x=0$, ya que $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = -1 \neq 1 = \lim\limits_{x\to 0+} f(x)$.

(4) La función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ -1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$ tiene una discontinuidad de salto finito en $x=0$, ya que $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = -1 \neq 1 = \lim\limits_{x\to 0+} f(x)$.

(5) La función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & \text{si} \quad x>0\\ 0 & \text{si} \quad x=0\\ -1 & \text{si} \quad x<0\end{cases}$ tiene una discontinuidad de salto infinito en $x=0$, ya que $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)=-1$.

(6) La función $f(x)=\frac{1}{x^2}$ tiene una discontinuidad asintótica en $x=0$, ya que

$$\lim_{x\to 0-} f(x)=+\infty=\lim_{x\to 0+} f(x)$$

(7) La función $f(x)=\frac{1}{x}$ tiene una discontinuidad asintótica en $x=0$, ya que

$$\lim_{x\to 0-} f(x)=-\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0+} f(x)=+\infty$$

(8) La función $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ (cuyo dominio es $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$) tiene discontinuidades de segunda especie en $x=-1$ y, en $x=1$, ya que:

$$\lim_{x\to -1}\sqrt{x^2-1}\begin{cases}\lim\limits_{x\to -1-}\sqrt{x^2-1}\\ \nexists \lim\limits_{x\to -1+}\sqrt{x^2-1}\end{cases} \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 1}\sqrt{x^2-1}\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1+}\sqrt{x^2-1}\\ \nexists \lim\limits_{x\to 1-}\sqrt{x^2-1}\end{cases}$$

(9) La función $f(x)=\operatorname{sen}\frac{1}{x}$ tiene una discontinuidad esencial en $x=0$, ya que los límites laterales no existen.

Un par de $\boxed{\text{resultados}}$ que es importante conocer y memorizar:

- Toda función continua en un intervalo de la forma $[a,b]$ tiene máximo y mínimo absolutos.
- Bajo la hipótesis adicional de que la función sea inyectiva, el máximo y el mínimo (absolutos) se alcanzan en los extremos del intervalo.

<u>Ejercicios:</u>

30. *Clasifica las discontinuidades de las siguientes funciones. En caso de que la función tenga una discontinuidad evitable, dar el valor verdadero de la función en dicho punto y si la discontinuidad es de salto finito, dar el valor del salto).*

a) $f(x)=\frac{x^3-x}{x-1}$

h) $f(x)=\begin{cases}x|x| & \text{si} \quad x\le 1\\ x & \text{si} \quad 1<x\le 2\\ 4-x & \text{si} \quad x>2\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases}x+1 & \text{si} \quad x\le 0\\ x-1 & \text{si} \quad x>0\end{cases}$

i) $f(x)=\begin{cases}x^2-2 & \text{si} \quad x<0\\ \sqrt{x+2} & \text{si} \quad x\ge 0\end{cases}$

c) $f\left(x\right)=\dfrac{2x^3-x^2-x}{x^2-1}$

d) $f\left(x\right)=\begin{cases} 2-x & \text{si} \quad x\le 0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$

e) $f\left(x\right)=\begin{cases} \dfrac{x-5}{x-3} & \text{si} \quad x\le 1 \\ \dfrac{x^2-4x+3}{x^2-3x+2} & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$

f) $f\left(x\right)=\begin{cases} \dfrac{5}{x-5} & \text{si} \quad x\le 1 \\ \sqrt{x-1} & \text{si} \quad 1<x\le 3 \\ \dfrac{10}{x+2} & \text{si} \quad x>3 \end{cases}$

g) $f\left(x\right)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{si} \quad x<1 \\ \dfrac{1-x}{\frac{1}{2}x} & \text{si} \quad 1\le x\le 2 \\ -e^{\frac{1}{x-2}} & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$

j) $f\left(x\right)=\begin{cases} 1-x^2 & \text{si} \quad x\le 0 \\ 2^{x-1} & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$

k) $f\left(x\right)=\left|x\right|+\dfrac{\left|x\right|}{x}$

l) $f\left(x\right)=\begin{cases} \left|x+2\right| & \text{si} \quad x<-1 \\ x^2 & \text{si} \quad -1\le x\le 1 \\ 2x+1 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$

m) $f\left(x\right)=\begin{cases} \dfrac{e^x}{e^x+1} & \text{si} \quad x\le 0 \\ x^2+1 & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$