UNIDAD 7:
FUNCIONES ELEMENTALES

1. FUNCIONES ELEMENTALES

Llamaremos «***funciones elementales***» a las funciones obtenidas al realizar sumas, productos, cocientes y composiciones de logaritmos, exponenciales, potencias y funciones trigonométricas.

Puesto que la gráfica $G_f = \{(x, y) : y = f(x)\}$ de una función real de variable real es un subconjunto de $\mathbb{R}^2$, su representación gráfica en un plano cartesiano será un recurso útil para el análisis de las funciones, por lo que uno de los objetivos fundamentales de la unidad es saber representar las funciones elementales.

2. FUNCIONES AFINES, LINEALES Y CONSTANTES

Las ***funciones afines*** son funciones de la forma

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = mx + n$$

donde m y n son números reales no nulos.

Si $m \neq 0$ y $n = 0$, entonces la función

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = mx$$

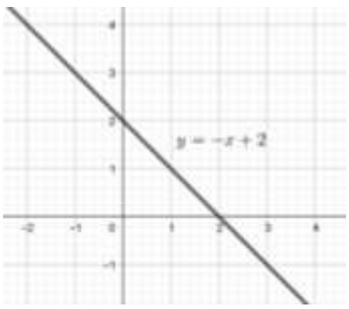
recibe el nombre de ***función lineal***.

Por último, la función

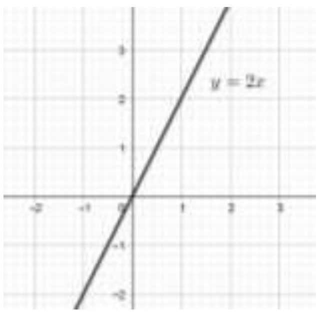
$$f : \mathbb{R} \to \{n\}$$
$$f(x) = n$$

recibe el nombre de ***función constante***.

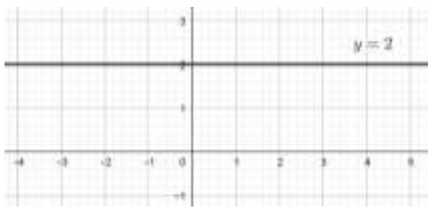
Geométricamente estos tres tipos de funciones representan rectas en el plano. Para representarlas (dibujarlas), basta con construir una tabla de valores (con dos valores).



$f(x) = -x + 2$



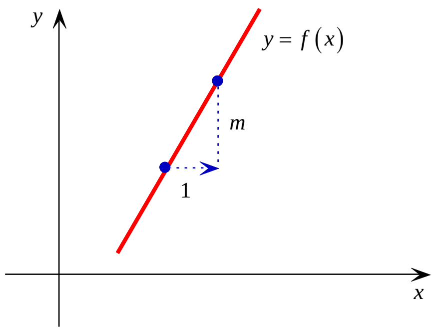
$f(x) = 2x$

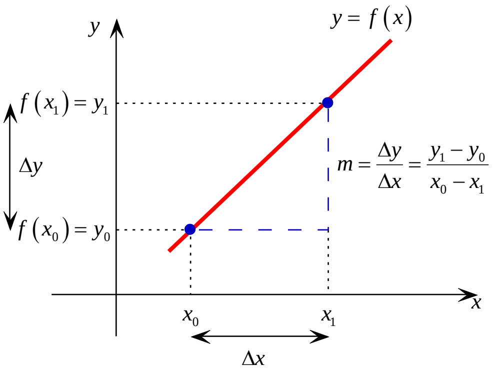


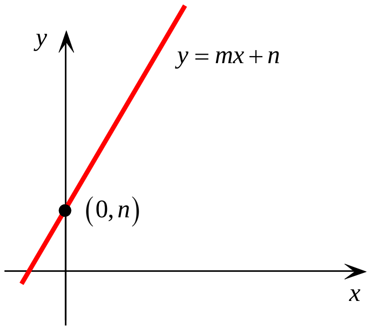
$f(x) = 2$

Recuerda también que todas las funciones lineales pasan por el origen de coordenadas.
El número m se denomina ***pendiente*** (indica la inclinación de la recta respecto del eje de abscisas) y el número n, ***ordenada en el origen*** (coordenada y del punto donde la recta corta al eje ordenadas).

La **interpretación geométrica de la pendiente y de la ordenada en el origen** es la siguiente:







Ejercicios:

1. *Representa las siguientes funciones sobre unos mismos ejes:*

$f_1(x) = 2x + 3 \qquad f_2(x) = \frac{3}{2}x \qquad f_3(x) = -1$

2. *Representa las siguientes funciones y establece la relación que hay entre ellas:*

$f_1(x) = x \qquad f_2(x) = x + 1 \qquad f_3(x) = x - 2$

Algunas **propiedades** de las funciones afines, lineales y constantes son:

- Dominio: $(-\infty, +\infty)$
- Imagen o recorrido: $\begin{cases} - \text{Afines y lineales: } \mathbb{R} = (-\infty, +\infty) \\ - \text{Constantes: } \{n\} \end{cases}$
- Monotonía: $\begin{cases} - \text{Afines y lineales: } \nearrow\nearrow \text{ si } m > 0 \text{ y } \searrow\searrow \text{ si } m < 0 \\ - \text{Constantes: como su nombre indica son constantes} \end{cases}$
- Extremos relativos: no tienen

Sobre la *notación*: $\nearrow\nearrow$ indica que la función es estrictamente creciente y $\searrow\searrow$ que es estrictamente decreciente.

3. FUNCIONES CUADRÁTICAS

Son funciones de la forma

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$f(x)=ax^2+bx+c$$

donde $a,c,b\in\mathbb{R}$ y $a\neq 0$.

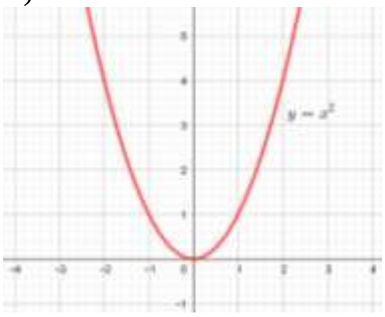
Geométricamente representan parábolas. Para cuya representación seguiremos los siguientes pasos:

1) Se calcula el *vértice*:

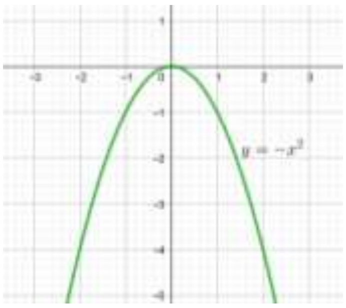
$$V(x_v,y_v) \text{ donde } \begin{cases} x_v=\dfrac{-b}{2a} \\ y_v=f(x_v)= \text{ sustituir } x_v \text{ en la función} \end{cases}$$

2) Se calculan los *puntos de corte con el eje OX*, si los hay, para lo que hay que resolver la ecuación $ax^2+bx+c=0$.
3) Se calcula el *punto de corte con el eje OY*, para lo que hay obtener el valor de y, cuando $x=0$.
4) *Solo se aplica si no hemos podido usar 2)*. Se construye una tabla de valores con dos valores a la izquierda del vértice y otros dos a la derecha del mismo.

Recuerda que la parábola está abierta hacia arriba (es convexa) cuando $a>0$, y está abierta hacia abajo (es cóncava) cuando $a<0$.



$y=x^2$



$y=-x^2$

Cuando la función está escrita en la forma

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

se dice que está en forma polinómica o general, pero también se puede escribir de las siguientes dos formas:

- Forma canónica: $f(x)=a(x-x_v)^2+y_v$ donde (x_v,y_v) es el vértice
- Forma factorizada: $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$ donde x_1 y x_2 son las raíces de la ecuación $f(x)=0$.

Ejercicios:

3. *Represente las siguientes funciones cuadráticas:*

a) $y=x^2-2x+3$ *c)* $y=-x^2-2x-3$

b) $y=2x^2-10x+8$ *d)* $y=\dfrac{1}{3}x^2-x+3$

4. *Representa las siguientes funciones cuadráticas y establece la relación que hay entre ellas:*

$$f_1(x)=x^2,\ \ f_2(x)=x^2+2,\ \ f_3(x)=x^2-1 \ \text{ y } \ f_4(x)=-x^2$$

5. *Representa las siguientes parábolas en el dominio que se indica:*

a) $y=x^2-6x+1 \ \textit{para} \ x\in[1,6]$

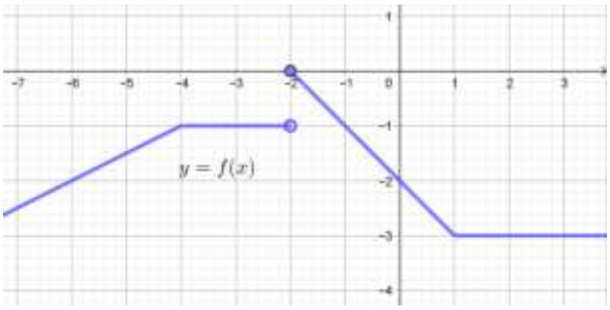
b) $y=-x^2+3x \ \textit{para} \ x\in[0,4]$

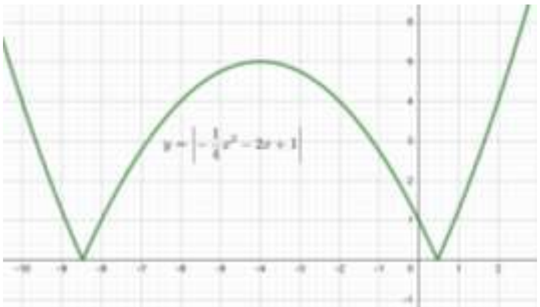
c) $y=x^2-4 \ \textit{para} \ x\in(-\infty,-2]\cup(2,+\infty)$

4. FUNCIONES DEFINIDAS A TROZOS

4.1. FUNCIONES DEFINIDAS A TROZOS GENERALES

Para su representación gráfica basta con hacer la correspondiente representación de cada uno de los trozos («en su dominio»).





Ejercicios:

6. *Representa las siguientes funciones definidas a trozos:*

a) $f(x)=\begin{cases} 16-x^2 & \text{si } -2\le x<2 \\ x^2 & \text{si } 2\le x\le 3 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} -x^2-2x & \text{si } x\le 0 \\ -1+2x & \text{si } 0<x\le 1 \\ -x^2+2x & \text{si } x>1 \end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} x^2+4x+3 & \text{si } x\le -1 \\ (x-2)^2 & \text{si } x>0 \end{cases}$

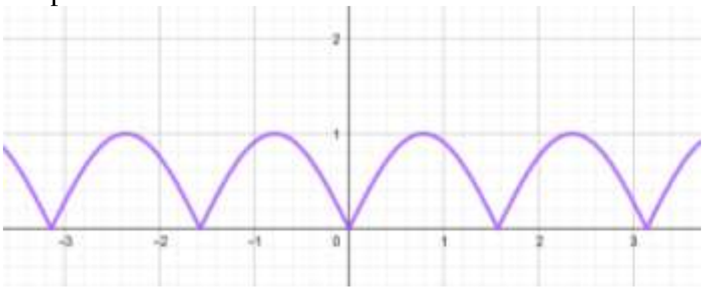
4.2. FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO

La **función valor absoluto** de una función $f(x)$, se define por:

$$|f(x)|=\begin{cases} f(x) & \text{si } f(x)\ge 0 \\ -f(x) & \text{si } f(x)<0 \end{cases}$$

Para su **representación gráfica** usaremos cualquiera de los siguientes dos procedimientos:

(1) Representar $f(x)$ y los trozos de curva que estén en la parte negativa del eje OY ponerlos positivos (mediante sus simétricos).
(2) Escribir la función $y = |f(x)|$ como una función definida a trozos, y representar cada uno de los trozos correspondientes.



Ejercicio:

7. *Representa las siguientes funciones:*

a) $f(x) = \left| -\frac{1}{3}x^2 + 3 \right|$

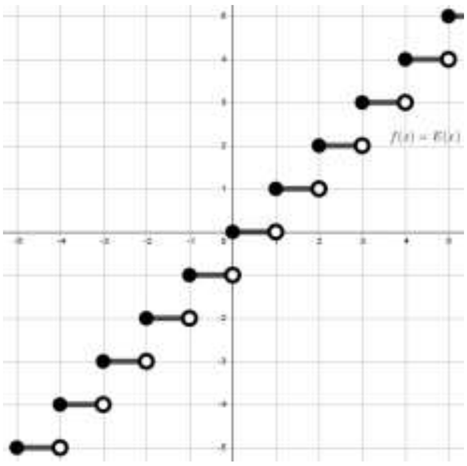
b) $f(x) = \begin{cases} |x+2| & \text{si} \quad x \le 0 \\ x^2 - 2 & \text{si} \quad 0 < x \le 3 \\ 4 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} |x+1| & si \quad x \le 0 \\ -x^2 + 1 & si \quad 0 < x \le 2 \\ -2 & si \quad x > 2 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} 2 & si \quad x < -3 \\ |x+1| & si \quad -3 \le x < 0 \\ 2x^2 - 4x + 3 & si \quad x \ge 0 \end{cases}$

4.3. FUNCIÓN PARTE ENTERA

La **función parte entera** es la función que a cada número real le hace corresponder el mayor número entero que es menor o igual que él.
Se designa por $f(x) = E[x] = Ent(x)$ y su representación gráfica es:



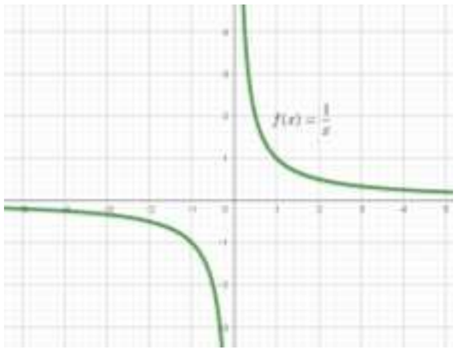
5. FUNCIONES RACIONALES

5.1. FUNCIONES DE PROPORCIONALIDAD INVERSA

Son funciones de la forma

$$f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}-\{0\}$$
$$f(x)=\frac{k}{x}$$

donde *k* es un número real no nulo.



Geométricamente representan hipérbolas equiláteras cuyas asíntotas son los ejes coordenados:

- *Asíntota horizontal*: $y=0$
- *Asíntota vertical*: $x=0$

Ejercicio:

8. *Representa las siguientes funciones de proporcionalidad inversa:*

a) $y=\frac{1}{x}$ *c)* $y=\frac{1}{x-2}$

b) $y=-\frac{1}{x}$ *d)* $y=\frac{1}{x-2}+3$

5.2. FUNCIONES RACIONALES ESPECIALES

Son funciones de la forma

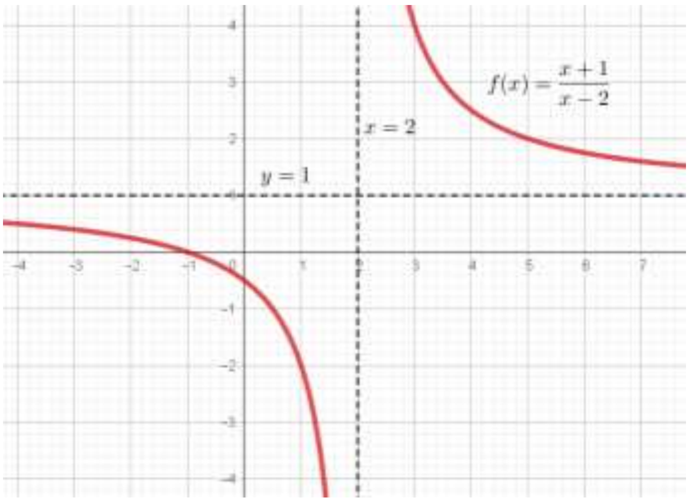
$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d} \qquad \forall x\neq-\frac{d}{c}$$

donde $a,b,c,d\in\mathbb{R}$.

Para su **representación gráfica** (que es una hipérbola equilátera) construiremos una tabla de valores y a partir de ella deduciremos sus **propiedades**.

Estas gráficas poseen las siguientes asíntotas:

- *Asíntota horizontal*: $y=\frac{a}{c}$
- *Asíntota vertical*: $cx+d=0\Leftrightarrow x=-\frac{d}{c}$



Ejercicio:

9. *Represienta las siguientes funciones racionales:*

a) $y=\dfrac{3x+2}{x-1}$ *c)* $y=\dfrac{x+1}{x-1}$

b) $y=\dfrac{4x+3}{x+1}$ *d)* $y=\dfrac{x-1}{x+1}$

6. TRANSFORMACIONES DE FUNCIONES

Este es un procedimiento para representar de forma rápida muchas funciones, conociendo la gráfica de algunas funciones básicas $\left(y=x,\ y=x^2,\ y=\dfrac{1}{x},...\right)$

6.1. Traslaciones

Sea $c>0$. Las traslaciones horizontal y vertical de la gráfica de $y=f(x)$ se representan como sigue:

a) Traslación vertical de c unidades hacia arriba: $f(x)+c$

b) Traslación vertical de c unidades hacia abajo: $f(x)-c$

c) Traslación horizontal de c unidades hacia la derecha: $f(x-c)$

d) Traslación horizontal de c unidades hacia la izquierda: $f(x+c)$

6.2. Reflexiones

Las reflexiones (imágenes en el espejo) con respecto a los ejes de coordenadas de la gráfica de $y=f(x)$ se representan por:

a) Reflexión con respecto al eje OX: $-f(x)$

b) Reflexión con respecto al eje OY: $f(-x)$

6.3. Procedimiento

Seguiremos los siguientes **pasos**:

Partimos de la función básica ($y=x,\ y=x^2,\ y=\dfrac{1}{x},...$) que notaremos por $f(x)$ y queremos representar la función $-f(x+k)+h$:

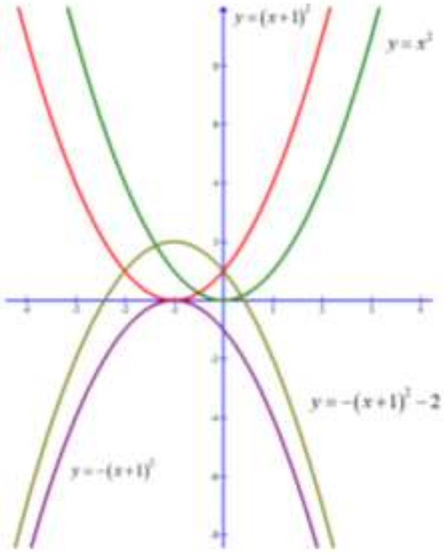
(1º) Se representa la función básica $f(x)$.

(2º) Traslaciones horizontales: representamos $f(x+k)$

(3º) Reflexiones: representamos $-f(x+k)$

(4º) Traslaciones verticales: representamos $-f(x+k)+h$

Ejemplo: Representar $y=-(x+1)^2-2$



Pasos:

1º) $y = x^2$

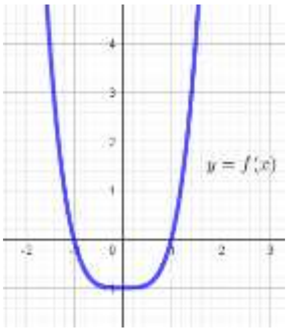
2º) $y = (x+1)^2$ (traslación hacia la izquierda)

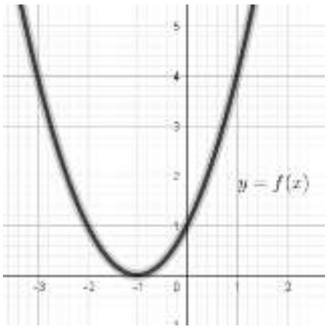
3º) $y = -(x+1)^2$ (reflexión respecto del eje OX)

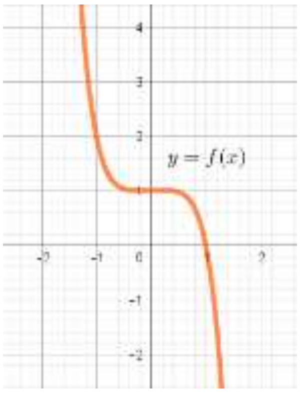
4º) $y = -(x+1)^2 - 2$ (traslación hacia abajo)

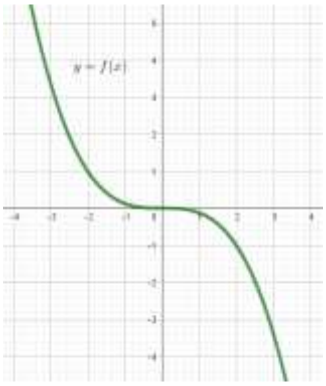
Ejercicios:

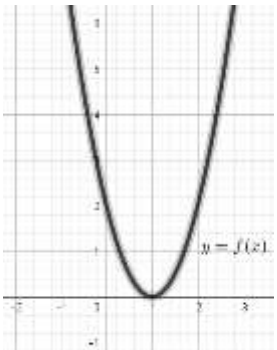
10. *Asocia cada gráfica a su expresión algebraica.*

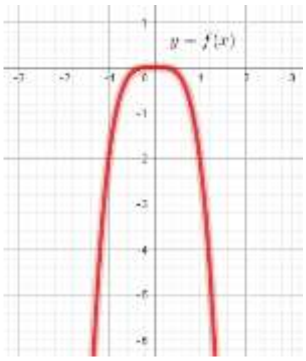












a) $y=-\frac{1}{8}x^3$ c) $y=2(x-1)^2$ e) $y=(x+1)^2$

b) $y=-2x^4$ d) $y=x^4-1$ f) $y=-x^5+1$

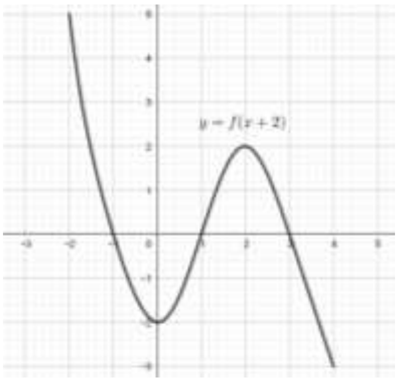
11. *A partir de la gráfica de $y=f(x+2)$ adjunta, dibuja las gráficas de las funciones:*

a) $y=f(x)$

b) $y=f(x)-5$

c) $y=-f(x)$

d) $y=|f(x)|$



7. FUNCIONES LOGARÍTMICAS

■ **Logaritmo de base a**

El logaritmo en base $a(>0 \text{ y } \neq 1)$ de un número N es el exponente al que hay que elevar la base para que dé dicho número:

$$\log_a N = x \Leftrightarrow a^x = N$$

Los logaritmos de base 10 se llaman decimales[1] y se representaban por log, y los logaritmos de base e se llaman neperianos o naturales y se representaban por $\ln$ o L.

Propiedades:

1) $\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$

2) $\log_a\left(\frac{M}{N}\right)=\log_a M-\log_a N$ siempre que $N\neq 0$

3) $\log_a N^m = m\log_a N \quad \forall m\in\mathbb{R}$

Transformación de logaritmos:

4) $\log_a N = \frac{\ln N}{\ln a}$

Otras propiedades:

5) Los logaritmos de un número en dos bases inversas a y $\frac{1}{a}$ son opuestos.

6) Conocidos los logaritmos en una base mayor que 1 se pueden hallar fácilmente en cualquier otra base.

[1] Actualmente, esta notación está en desuso y se utiliza la notación $\log$ para representar el logaritmo natural o neperiano.

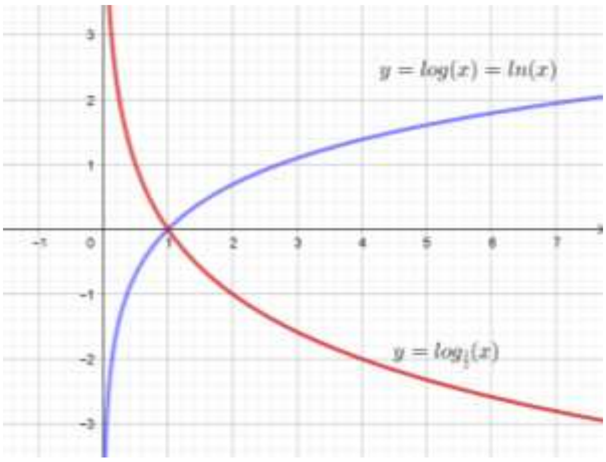
■ **Función logaritmo de base** $\underline{a\left(>0 \text{ y } \neq 1\right)}$

$$\begin{aligned} \log_a : (0,+\infty) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \log_a x \end{aligned}$$

Propiedades:

1) $\operatorname{Dom}\left(\log_a\right)=\left(0,+\infty\right)$
2) $\operatorname{Img}\left(\log_a\right)=\mathbb{R}$
3) Continua y estrictamente monótona (creciente si $a>1$ y decreciente si $a<1$)
4) Biyectiva, luego tiene inversa que es la función exponencial de base a.
5) $\text{Si } a>1 \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0+} \log_a x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \log_a x = +\infty \end{cases}$

   $\text{Si } a<1 \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0+} \log_a x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \log_a x = -\infty \end{cases}$
6) Curvatura: $\begin{cases} f'(x)=\dfrac{1}{x}\log_a e \\ f''(x)=-\dfrac{1}{x^2}\log_a e \to f(x) \text{ es } \begin{cases} \text{convexa si } a<e \\ \text{cóncava si } a\geq e \end{cases} \end{cases}$



Ejercicio:

12. *Representa las siguientes funciones logarítmicas:*

a) $y=\log x$ *c)* $y=-\log x$

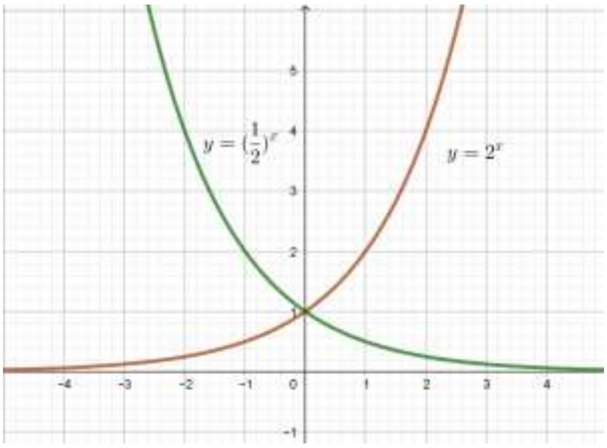
b) $y=\log_{10} x$ *d)* $y=\log_{\frac{1}{2}} x$

8. FUNCIONES EXPONENCIALES

■ **Dos funciones exponenciales**

$f(x) = 2^x$

$g(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$



Propiedades:

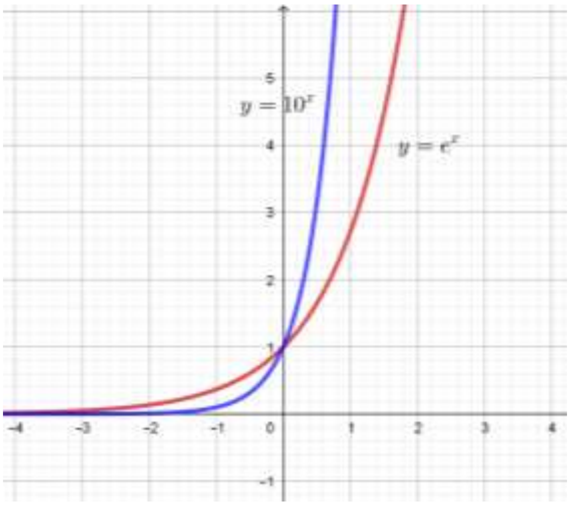
1) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$
2) $\text{Img}(f) = \mathbb{R}^+$
3) f está acotada inferiormente, pero no superiormente
4) f no es par ni impar
5) f es continua
6) f es estrictamente creciente y por tanto inyectiva (luego tiene inversa)
7) f no tiene extremos relativos
8) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
9) $f^{-1}(x) = \log_2(x)$
10) f es sobreyectiva y como consecuencia, es biyectiva

1) $\text{Dom}(g) = \mathbb{R}$
2) $\text{Img}(g) = \mathbb{R}^+$
3) g está acotada inferiormente pero no superiormente
4) g no es par ni impar
5) g es continua
6) g es estrictamente decreciente y por tanto inyectiva (luego tiene inversa)
7) g no tiene extremos relativos
8) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$
9) $g^{-1}(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x)$
10) g es sobreyectiva y como consecuencia, es biyectiva

■ **Dos funciones exponenciales especiales**

$f(x) = e^x$ (donde $\log^{-1} = f \, : e^x = y \Leftrightarrow x = \log y$)

$g(x) = 10^x$



Propiedades:

1) $\mathrm{Dom}(g) = \mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R}$
2) $\mathrm{Img}(g) = \mathrm{Img}(g) = \mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$
3) f y g son estrictamente crecientes y como consecuencia, inyectivas
4) f y g están acotadas inferiormente pero no superiormente
5) f y g son continuas
6) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$
7) f y g son sobreyectivas y, por tanto, biyectivas
8) $f^{-1}(x) = \log x$ y $g^{-1}(x) = \log_{10}(x)$

■ **Función exponencial**

$f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$

$f(x) = a^x := e^{x \log a}$ con $a > 0$ y $a \neq 1$

Propiedades:

1) $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$
2) $\mathrm{Dom}(f) = (0, +\infty)$
3) $f(0) = 1$ y $f(1) = a$
4) $f(x+y) = f(x) f(y) \Leftrightarrow a^{x+y} = a^x a^y$
5) f es continua
6) f es estrictamente $\begin{cases} \text{creciente si } a > 1 \\ \text{decreciente si } 0 < a < 1 \end{cases}$

7) $\begin{cases} \text{Para } 0<a<1 \text{ se tiene que } \begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \end{cases} \\ \text{Para } a>1 \text{ se tiene que } \begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0 \end{cases} \end{cases}$

8) Curvatura: $f(x)$ es convexa

Ejercicio:

13. *Representa las siguientes funciones exponenciales:*

a) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ *b)* $y=e^x$ *c)* $y=2^x$ *d)* $y=e^{-x}$

9. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

■ **Función seno**

$$\begin{aligned} \text{sen}: \mathbb{R} &\to [-1,1] \\ x &\mapsto \text{sen } x \end{aligned}$$

Propiedades:

1) La función seno es impar: $\text{sen}(-x)=-\text{sen } x$
2) Es continua
3) $|\text{sen } x|\le 1 \quad \forall x\in\mathbb{R}$, es decir, está acotada
4) Es $2\pi-$periódica: $\text{sen}(x+2\pi)=\text{sen } x$
5) sen es estrictamente $\begin{cases} \text{creciente en } \left(\frac{3\pi}{2}+2\pi(k-1), \frac{\pi}{2}+2\pi k\right) \\ \text{decreciente en } \left(\frac{\pi}{2}+2\pi k, \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right) \end{cases}$
6) Tiene máximos relativos en $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k, 1\right)$ y mínimos relativos en $\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi k, -1\right)$.
7) Cortes con el eje OX: $x=\pi k$ con $k\in\mathbb{Z}$
8) $\text{sen}:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$ biyectiva

$\Rightarrow \exists \text{sen}^{-1}=\text{arcsen}:[-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

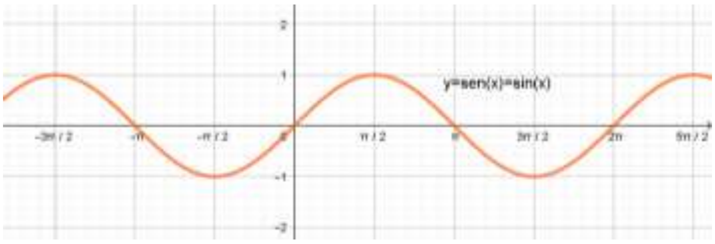
tal que

$$\text{sen}(\text{arcsen } x)=x=\text{arcsen}(\text{sen } x)$$

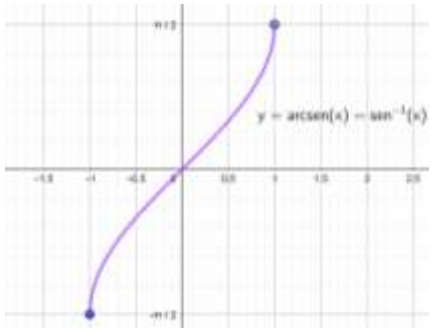
Ahora bien:

$$\text{sen}(\text{arcsen } x)=x \text{ si } -\frac{\pi}{2}\le \text{arcsen } x\le\frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x) = x \text{ si } -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$$



Función seno


Función arcoseno

■ **Función coseno**

$$\cos : \mathbb{R} \to [-1,1]$$
$$x \mapsto \cos x$$

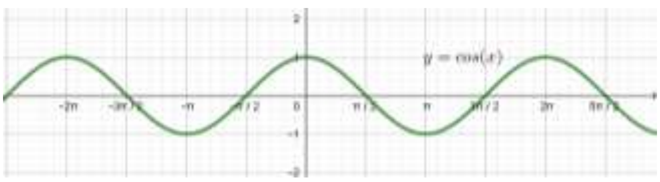
Propiedades:

1) La función coseno es par: $\cos(-x) = \cos x$
2) Es continua
3) $|\cos x| \le 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, es decir, está acotada
4) Es $2\pi -$periódica: $\cos(x + 2\pi) = \cos x$
5) cos es estrictamente $\begin{cases} \text{creciente en } (\pi(2k-1), 2\pi k) \\ \text{decreciente en } (2\pi k, \pi(2k+1)) \end{cases}$
6) Tiene máximos relativos en $(2\pi k, 1)$ y mínimos relativos en $(\pi(2k+1), -1)$.
7) Cortes con el eje OX: $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$ con $k \in \mathbb{Z}$
8) $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$ biyectiva
$\Rightarrow \exists \cos^{-1} = \arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$ tal que

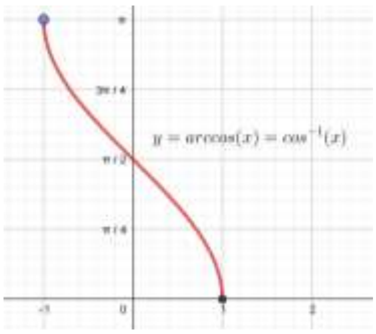
$$\cos(\arccos x) = x = \arccos(\cos x)$$

Ahora bien:

$$\cos(\arccos x) = x \text{ si } 0 \le \arccos x \le \pi$$
$$\arccos(\cos x) = x \text{ si } 0 \le x \le \pi$$



Función coseno


Función arcocoseno

■ **<u>Función tangente</u>**

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}: \mathbb{R}-\left\{k\pi+\frac{\pi}{2}: k\in\mathbb{Z}\right\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \operatorname{tg} x \end{aligned}$$

<u>Propiedades:</u>

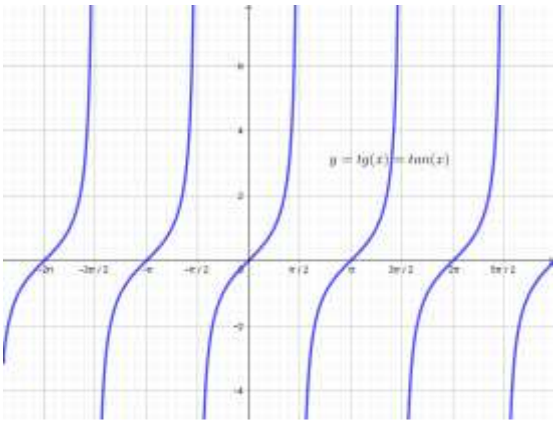
1) La función tangente es impar: $\operatorname{tg}(-x)=-\operatorname{tg} x$
2) Es continua
3) No está acotada ni superior ni inferiormente
4) Es $\pi-$periódica: $\operatorname{tg}(x+\pi)=\operatorname{tg} x$
5) Cortes con el eje OX: $x=\pi k$ con $k\in\mathbb{Z}$
6) tg es estrictamente creciente
7) No tiene extremos relativos
8) $\begin{aligned} \operatorname{tg}: \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[&\to \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \operatorname{tg} x \end{aligned}$ biyectiva $\Rightarrow \exists \operatorname{tg}^{-1}=\operatorname{arctg}:\mathbb{R}\to \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ tal que

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)=x=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$$

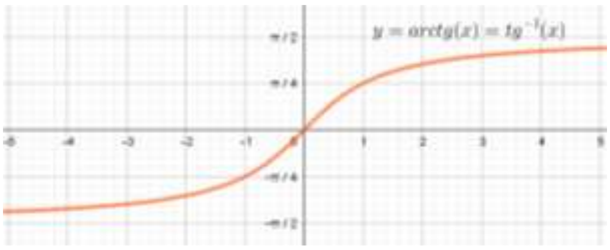
Ahora bien:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)=x \text{ si } -\frac{\pi}{2}<\operatorname{arctg} x<\frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)=x \text{ si } -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$$



Función tangente



Función arcotangente

10. <u>APLICACIÓN A LA ECONOMÍA: FUNCIONES DE OFERTA Y DEMANDA</u>

La función o curva de demanda del mercado muestra la relación entre la cantidad demandada de un bien por todos los individuos y su precio, manteniendo constantes otros factores (gustos, renta, precio de bienes relacionados…)

La **función de demanda**, $f_d(p)$, para cualquier bien o producto, es la función que nos da el número de unidades de producto en función del precio, p, de cada unidad que los consumidores están dispuestos a comprar.

En su expresión matemática más simple la función de demanda puede ser:

– Lineal: $f_d(p) = mp + n$ con $m < 0$

– Cuadrática: $f_d(p) = ap^2 + bp + c$ con $a < 0$

La función o curva de oferta del mercado muestra la relación entre la cantidad ofrecida de un bien por todos los productos y su precio, manteniendo constante otros factores (tecnología, precio de factores productivos…).

La **función de oferta**, $f_o(p)$, para cualquier bien o producto, es la función que nos da el número de unidades que los fabricantes están dispuestos a producir en función del precio unitario del producto.

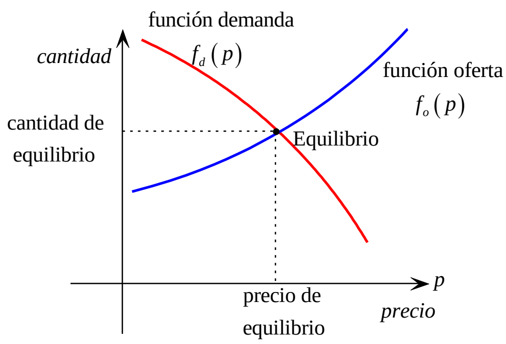
En su expresión matemática más simple la función de oferta puede ser:

- Lineal
  $f_o(p) = mp + n$ con $m > 0$
- Cuadrática
  $f_o(p) = ap^2 + bp + c$ con $a > 0$

Cuando se ponen en contacto consumidores y productores con sus respectivas funciones de demanda y oferta, podemos analizar cómo se lleva a cabo la coordinación de ambos tipos de agentes. Para ello debemos realizar un estudio conjunto de las gráficas de ambas funciones.

La **cantidad de equilibrio** es el número de unidades del producto que se debe fabricar para que la oferta y la demanda sean iguales.

El precio correspondiente a la cantidad de equilibrio, es decir, aquel precio en el que coinciden los planes de los demandantes o consumidores y de los ofertantes o productores se llama **precio de equilibrio**.



11. APLICACIONES A LA FÍSICA

Movimiento rectilíneo uniforme:

La partícula se mueve en línea recta con velocidad constante (en módulo y sentido). La relación entre la posición y el tiempo es:

$$x = x_0 + v(t - t_0)$$

donde x_0 es la posición inicial y t_0 el tiempo inicial.

Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado:

En este caso, la aceleración permanece constante, de modo que

$$x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$

Segunda Ley de Newton:

La aceleración que experimenta una partícula de masa m es proporcional a la fuerza neta, F, que actúa sobre ella:

$$F = ma$$

Ley de Coulomb

Cuando situamos una carga en las proximidades de otra, aparecen fuerzas (repulsivas o atractivas) entre ellas. La expresión de esta ley es la siguiente:

$$F = K\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

donde K es una constante que depende medio en el que se encuentran las cargas q_1 y q_2, y r es la distancia que entre las cargas

Ley de Ohm: resistencia eléctrica

La intensidad de corriente, I, es directamente proporcional a la diferencia de potencial aplicada entre sus extremos, $V_1 - V_2$, esto es,

$$V_2 - V_2 = I \cdot R$$

12. APLICACIONES A LA QUÍMICA

Concepto de pH

Las concentraciones de iones H_3O^+ en mol/L suelen variar entre los límites 10^{-14} y 10^0. Para expresar estas concentraciones mediante números sencillos, Sörensen, en 1909, introdujo el concepto de *pH*.

$$pH = -\log_{10}\left[H_3O^+\right]$$

Debido al signo negativo, la escala de *pH* va en sentido contrario al de la concentración de H_3O^+, es decir, que el *pH* de una disolución aumenta a medida que disminuye $\left[H_3O^+\right]$, o sea la acidez.

Molalidad o concentración molal:

Es la relación entre el número de moles y los kilogramos de disolvente. Se representa por *m* y sus unidades son mol/kg. Aparece en los cálculos de los aumentos ebulloscópicos y descensos crioscópicos que experimentan las disoluciones.

$$m = \frac{n_s}{M_d}$$

donde n_s es el número de moles de soluto, M_d el número de kg de disolvente.