UNIDAD 6:
FUNCIONES. CARACTERÍSTICAS

1. CONCEPTO DE FUNCIÓN

Las funciones son las herramientas para la descripción matemática de una situación real. De hecho, todas las fórmulas de la Física no son más que funciones, que expresan cómo ciertas magnitudes (por ejemplo, el volumen de un gas) dependen de otras (la temperatura y la presión).

Una función real de variable real es una aplicación de un conjunto $D \subseteq \mathbb{R}$ en el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, es decir, una ley que a cada valor del conjunto D asigna un único número real.

Intuitivamente, una función real de variable real asigna a cada elemento x de D un elemento y de $\mathbb{R}$, y solo uno.

Además, es importante tener en cuenta que una función queda determinada siempre que conozcamos la manera de asociar a cada elemento de D un único elemento de $\mathbb{R}$, esto es, no es necesario que exista una fórmula matemática que relacione dichos elementos, y, de hecho, una función se puede dar mediante una expresión algebraica, una tabla de valores, una gráfica…

La función f de $D \subseteq \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ se simboliza así:

$$\begin{aligned} f : D &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) := y \end{aligned}$$

(léase y es igual a « f de x» o « f evaluada en x»).

El conjunto D recibe el nombre de dominio de la función, y se representa por $\operatorname{Dom}(f)$, y el conjunto de los transformados mediante f recibe el nombre de recorrido o imagen de la función (conjunto de valores que toma la función), y se representa por $\operatorname{Img}(f)$ o $\operatorname{Rec}(f)$:

$$\operatorname{Dom}(f) = \{x : f(x) \text{ tiene sentido}\}$$

$$\operatorname{Img}(f) = \operatorname{Rec}(f) = \{y \in \mathbb{R} : \text{ existe al menos un } x \in D \text{ verificando que } y = f(x)\}$$

Las funciones también se suelen escribir en la forma $y = f(x)$, y se dice que x es la variable independiente e y la variable dependiente o función.

Una función puede venir dada en forma explícita o en forma implícita. Una función dada en ***forma explícita*** tiene la forma, ya que permite calcular directamente el valor de *y* dado el valor de *x*. Por el contrario, una función está en ***forma implícita*** si la variable dependiente no está explicitada respecto a la variable independiente, expresándose en la forma: $f(x, y) = 0$

Ejemplo:

Las funciones $y = \operatorname{sen} x$, $y = x^2 + x + 1$ e $y = \frac{1}{x}$ están dadas en forma explícita, mientras que las funciones $y^5 - xy^2 + 10 = 0$ y $\sqrt{xy} - xy - x = 10$ están dadas en forma implícita.

<u>Ejercicio:</u>

1. *Indica en cada caso si la función está expresada en forma implícita o explícita, y pasa de una forma a otra:*

a) $y = x^2 - 3x + 2$ *b)* $yx - y - x = 0$ *c)* $\dfrac{y-x}{x-1} + 3 = 0$

d) $yx - 1 = 0$ *e)* $y = \dfrac{x}{x-1}$ *f)* $y = \dfrac{x^2}{x^2-1}$

Dos <u>funciones</u> f y g son <u>iguales</u>, $f = g$, cuando

a) $\mathrm{Dom}(f) = \mathrm{Dom}(g)$ y

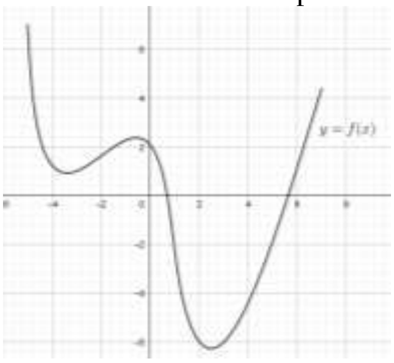
b) $f(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathrm{Dom}(f)$

<u>Ejemplos:</u>

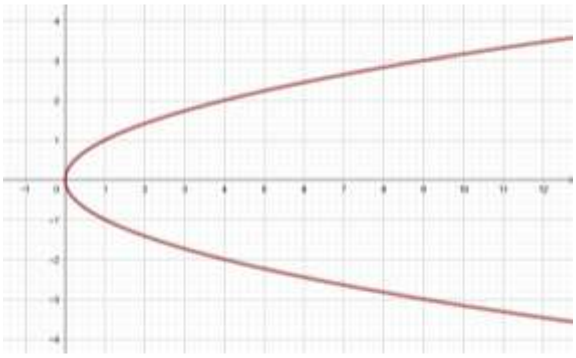
(1) Las funciones $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ y $g(x) = x+1$ son distintas, aunque simplificando la primera, se obtiene la segunda, ya que $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$, mientras que $\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R}$.

(2) Las unciones $f(x) = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ y $g(x) = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{Z}$ son distintas, ya que, aunque tienen la misma expresión algebraica, tienen distinto dominio: $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y $\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{Z}$.

Geométricamente, una correspondencia es una función cuando la gráfica de la correspondencia corta a cada recta vertical en un único punto.



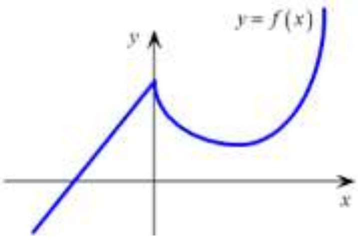
Correspondencia que es función

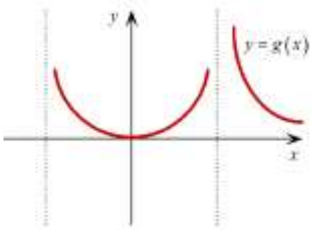


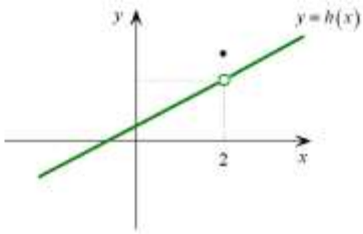
Correspondencia que no es función

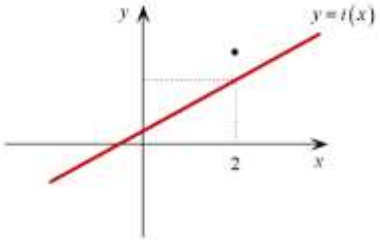
<u>Ejercicios:</u>

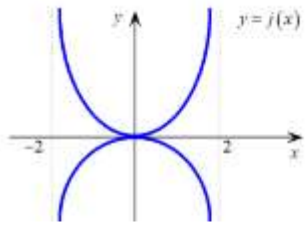
2. *Indica en cada una de las siguientes gráficas cuáles son representaciones de funciones y cuáles no:*

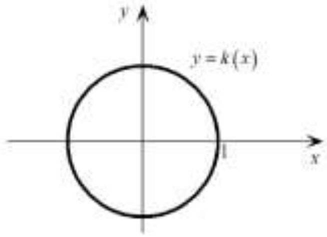












3. *De las siguientes parejas de funciones, indica cuáles son iguales y cuáles no:*

a) $y = x - 1 \;;\; 3x - 3y = 3y$

b) $y = \dfrac{x^2 - x}{x} \;;\; y = x - 1$

c) $y = x - 1 \;;\; 3x - 3y = 3$

d) $y = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases} \;;\; y = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

e) $y = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases} \;;\; y = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

4. *Calcula el dominio de las siguientes funciones:*

1) $y = x^2 + 3$

2) $yx + y - x = 0$

3) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x^2}$

4) $f(x) = \sqrt[5]{x^2 + 5}$

5) $f(x) = \dfrac{5}{x^2 - 9}$

6) $f(x) = \log\left(x^2 + 1\right)$

7) $y - x^2 - 3 = 0$

8) $y^2 - x = 0$

9) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

10) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

11) $f(x) = |\, x \,|$

12) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x^2}{x^2 - 4}}$

13) $f(x) = 3^{x+2}$

14) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 1 \\ \dfrac{x}{x+3} & \text{si } x < 1 \end{cases}$

15) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 1} & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

16) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

17) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

18) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$

19) $f(x) = \sqrt[4]{\dfrac{2x+1}{2x^2}}$

20) $f(x) = x - |x|$

2. <u>FUNCIONES ALGEBRAICAS</u>

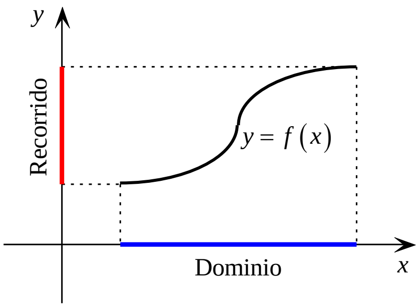
- Funciones polinómicas
  Son del tipo $f(x)=A(x)$ donde $A(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1 x + a_0$ es un polinomio.
  $\text{Dom}(f)=\mathbb{R}$

- Funciones racionales
  Son de la forma $f(x)=\dfrac{A(x)}{B(x)}$ donde $A(x)$ y $B(x)\neq 0$ son polinomios.
  $\text{Dom}(f)=\{x\in\mathbb{R}: B(x)\neq 0\}=\mathbb{R}-\{x\in\mathbb{R}: B(x)=0\}$

- Funciones irracionales
  Son funciones en las que normalmente su expresión algebraica viene dada por una raíz. Si $f(x)=\sqrt[k]{g(x)}$
  $$\text{Dom}(f)=\begin{cases}\{x:\ g(x)\geq 0\} & \text{si el índice de la raíz es par}\\ \text{Dom}(g) & \text{si el índice de la raíz es impar}\end{cases}$$

- Funciones definidas a trozos
  Cuando una función se define utilizando más de una expresión algebraica, se dice que está definida a trozos.
  Su dominio variará dependiendo de las expresiones algebraicas de los trozos.

La imagen o recorrido de una función la estudiaremos *teniendo en cuenta su representación gráfica*.



GeoGebra
Dominio y recorrido de funciones. Autor: Enrique Villa, Javier Cayetano Rodríguez Tema: Funciones https://www.geogebra.org/m/s8BJ932e

Ejercicio:

5. *Dibuja una gráfica que cumpla las condiciones dadas en cada uno de los siguientes casos:*

a) $\text{Dom}(f)=\mathbb{R}$ *e* $\text{Img}(f)=[-1,1]$

b) $\text{Dom}(f)=\mathbb{R}-\{3\}$ *e* $\text{Img}(f)=\mathbb{R}$

c) $\text{Dom}(f)=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ *e* $\text{Img}(f)=[-2,2]$

3. OPERACIONES CON FUNCIONES

Las funciones que vamos a usar pertenecen a la clase de las funciones elementales. Se llaman así porque pueden obtenerse a partir de ciertos tipos de funciones bien conocidas realizando las *operaciones* de suma, producto, cociente y composición de funciones, que son las que vamos a definir a continuación.

■ Función suma

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x) \quad \forall x\in \text{Dom}(f)\cap \text{Dom}(g)$$

■ Función producto de un número real por una función

$$(\lambda f)(x)=\lambda f(x) \quad \forall x\in \text{Dom}(f)$$

Ampliación: El conjunto $F(D,\mathbb{R})=\{\text{funciones } f:D\subseteq \mathbb{R}\to \mathbb{R}\}$ con la suma y el producto de un número real por una función, tiene estructura algebraica de espacio vectorial real:

$$\boxed{\left(F(D,\mathbb{R}),+,\cdot_{\mathbb{R}}\right)=\text{ espacio vectorial sobre } \mathbb{R}}$$

■ Función producto

$$(f\cdot g)(x)=f(x)g(x) \quad \forall x\in \text{Dom}(f)\cap \text{Dom}(g)$$

■ Función cociente

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)} \qquad \forall x: g(x)\neq 0$$

$$\text{Dom}\left(\frac{f}{g}\right)=\left[\text{Dom}(f)\cap \text{Dom}(g)\right]-\{x:g(x)=0\}$$

Ejercicios:

6. *Calcula* $(f+g)$, $\text{Dom}(f+g)$ y $(g-f)(-5)$ *en cada uno de los siguientes casos:*

a) $f(x)=x^2-1$ y $g(x)=2x^2-5x+1$

b) $f(x)=x^2$ si $x\in[0,50]$ y $g(x)=\sqrt{8-x}$

7. *Dadas las funciones* $f(x)=\sqrt{x-9}$ y $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4-x}}$, *comprueba si existe la función* $(f+g)$ *y la función* $(f-g)$.

8. *Halla las funciones* $(f+g)$ *y* $(f-g)$, *siendo:*

$$f(x)=\begin{cases} 2x & \text{si } x<0 \\ x^2+1 & \text{si } 0\le x\le 4 \\ \dfrac{1}{x-4} & \text{si } x>4 \end{cases} \qquad y \qquad g(x)=\begin{cases} -x & \text{si } x<0 \\ x^2 & \text{si } x\ge 0 \end{cases}$$

9. *Considera las funciones* $f(x)=x^3+1,\ \ g(x)=x^2-1$ *y* $h(x)=\dfrac{1}{x-1}$, *y calcula:*

a) $(f+g)+h$ *b)* $(fg)(2)$ *c)* $f-(g-h)$

10. *Dadas* $f(x)=x^2-1$ y $g(x)=\dfrac{1}{x-1}$*:*

a) Halla $(fg)(-1)$

b) Determina $\text{Dom}(fg)$

c) ¿Es cierta la igualdad $(fg)(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}=x+1$*?*

11. *Calcula:* $(3f)g$, *siendo* $f(x)=\begin{cases} x-1 & \text{si } x\neq 1 \\ x & \text{si } x=1 \end{cases}$ *y* $g(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & \text{si } x\neq 1 \\ 3x-4 & \text{si } x=1 \end{cases}$.

12. *Dadas las funciones* $f(x)=\begin{cases} x-1 & \text{si } x<0 \\ x^2+1 & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$ *y* $g(x)=\begin{cases} 2x-2 & \text{si } x\leq 2 \\ 3x-4 & \text{si } x>2 \end{cases}$

halla:

a) $(fg)(-1)$ *c)* $(fg)(3)$

b) $\text{Dom}(fg)$ *d)* $(fg)(1)$

13. *Sabiendo que* $f(x)=x+1$ y $g(x)=\sqrt{x^2-4}$ *calcula:*

a) $(fg)(2)$ *b)* $\text{Dom}\left(\dfrac{f}{g}\right)$ *c)* $\left(\dfrac{f}{g}\right)(3)$

■ Función compuesta

$(f\circ g)(x)=f(g(x))$ (se lee g compuesta[1] con f)

Para determinar el dominio de $f\circ g$ hay que determinar los valores de x que cumplen:

1. $x\in \text{Dom}(g)$
2. $g(x)\in \text{Dom}(f)$

En general, $\boxed{f\circ g\neq g\circ f}$

Ejercicios:

14. *Dadas* $f(x)=2x-1$ y $g(x)=x^2+1$, *determina:*

a) $f\circ g$ *b)* $g\circ f$ *c)* $\text{Dom}(f\circ g)$

[1] Se lee al revés de cómo se escribe, ya que primero aplicamos g y luego f .

15. *Si* $f(x)=\dfrac{1}{x}$ y $g(x)=x^3$, *halla* $(f\circ g)$ y $(g\circ f)$.

16. *Dadas* $f(x)=x-1$ y $g(x)=\dfrac{1}{x^2}$, *calcula:*

a) $(f\circ g)(1)$ *b)* $\mathrm{Dom}(g\circ f)$

17. *Considera las funciones* $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=x^2+1$ *y* $h(x)=\dfrac{1}{3x+1}$, *y determina:*

a) $(g\circ f)(2)$ *b)* $(g\circ(f\circ h))(2)$

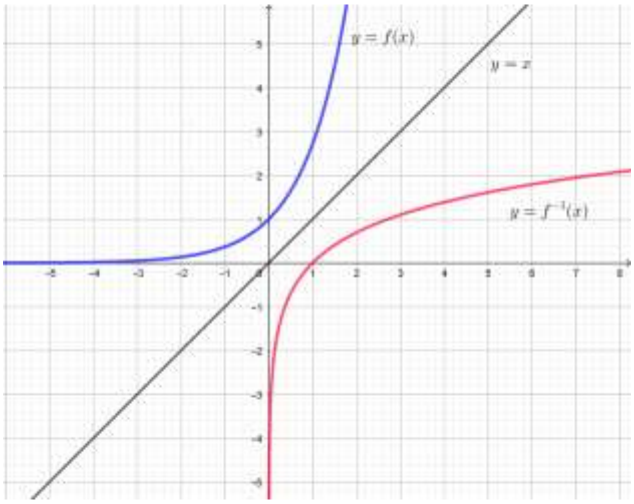
Definición:

Elemento simétrico: se representa por f^{-1} y está definido por $(f\circ f^{-1})(x)=(f^{-1}\circ f)(x)=I(x)$ donde $I(x)$ es la función identidad y está definida por $I(x)=x$. La función f^{-1} recibe el nombre de función inversa[2] de f.

■ Función inversa

- Cálculo de la función inversa (en casos sencillos):
  a) Expresar la variable y en función de la variable x.
  b) Despejar la variable x de la igualdad anterior con el fin de hallar la expresión de x en función de y.
  c) Intercambiar las variables, ya que cualquier función se suele expresar «siempre» a partir de la variable x.
  d) Realizar la comprobación.

Geométricamente, si existe la función inversa, su gráfica se obtiene tomando la simétrica de la gráfica de la función respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrantes.



[2] ¡Alerta! $f^{-1}\neq\dfrac{1}{f}$ (la función $\dfrac{1}{f}$ recibe el nombre de función recíproca de f, aunque también es «usual» en la bibliografía que llamen función recíproca a f^{-1})

Ejercicios:

18. *Halla la función inversa de las siguientes funciones, caso de existir:*

a) $y=3x-2$	*d)* $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$	*g)* $y=\dfrac{2x+1}{x-5}$
b) $y=\dfrac{x+1}{2}$	*e)* $y=x^3$	*h)* $y=\sqrt{x}$
c) $y=\dfrac{2}{x-1}$	*f)* $y=\dfrac{x^3}{x^3-1}$	*i)* $y=\sqrt[3]{x-1}$

4. CARACTERÍSTICAS DE LAS FUNCIONES

4.1. MONOTONÍA (crecimiento, decrecimiento), máximos y mínimos relativos.

Sea $f: I \to \mathbb{R}$ una función e $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto. Se dice que *f* es:

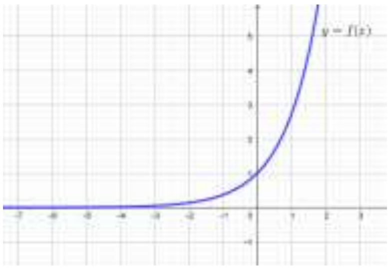
a) estrictamente creciente en I sii $\forall x_0, x_1 \in I : x_0 < x_1$ se tiene que $f(x_0) < f(x_1)$

b) creciente en I sii $\forall x_0, x_1 \in I : x_0 < x_1$ se tiene que $f(x_0) \leq f(x_1)$

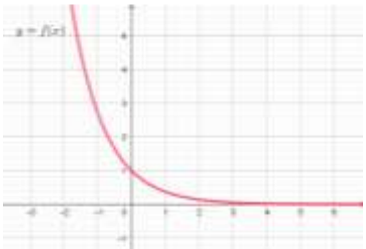
c) estrictamente decreciente en I sii $\forall x_0, x_1 \in I : x_0 < x_1$ se tiene que $f(x_0) > f(x_1)$

d) decreciente en I sii $\forall x_0, x_1 \in I : x_0 < x_1$ se tiene que $f(x_0) \geq f(x_1)$

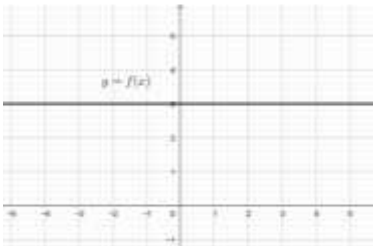
e) constante en I sii $\forall x_0, x_1 \in I : x_0 < x_1$ se tiene que $f(x_0) = f(x_1)$



Estrictamente creciente



Estrictamente decreciente



Función constante

Una función es estrictamente monótona sii es estrictamente creciente o estrictamente decreciente, y es monótona si es creciente o decreciente.

Criterio: cociente incremental

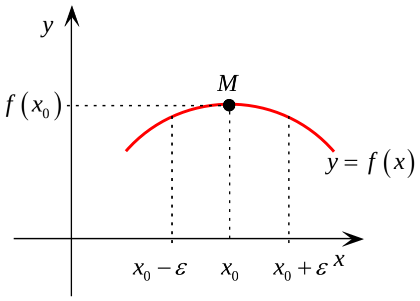
$$f \text{ es estrictamente} \begin{cases} \text{creciente en } I=(x_0,x_1) \text{ si } \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}>0 \\ \text{decreciente en } I=(x_0,x_1) \text{ si } \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}<0 \end{cases}$$

$$f \text{ es} \begin{cases} \text{creciente en } I=(x_0,x_1) \text{ si } \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}\geq 0 \\ \text{decreciente en } I=(x_0,x_1) \text{ si } \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}\leq 0 \end{cases}$$

Geométricamente una función continua tiene un máximo relativo cuando en ese punto la función pasa de ser creciente a ser decreciente y tiene un mínimo relativo cuando pasa de ser decreciente a ser creciente.

Diremos que f tiene un <u>máximo relativo</u> en $x_0 \in D$ sii existe un entorno abierto[3] de x_0, $E(x_0)$ tal que $f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in D \cap E(x_0)$.

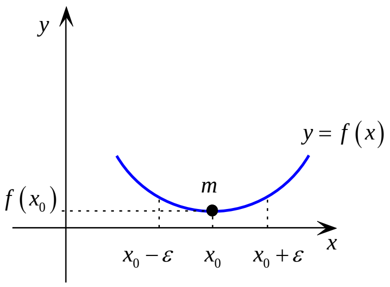
En cuyo caso, dicho máximo relativo tiene de *coordenadas* $(x_0, f(x_0))$.



Diremos que f tiene un <u>mínimo relativo</u> en $x_0 \in D$ sii existe un entorno abierto de x_0, $E(x_0)$ tal que

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in D \cap E(x_0).$$

En cuyo caso, dicho mínimo relativo tiene de *coordenadas* $(x_0, f(x_0))$.

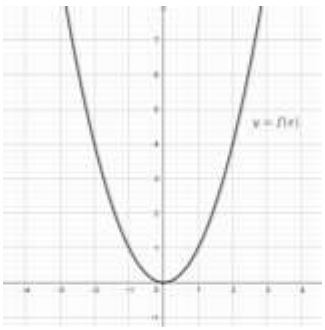


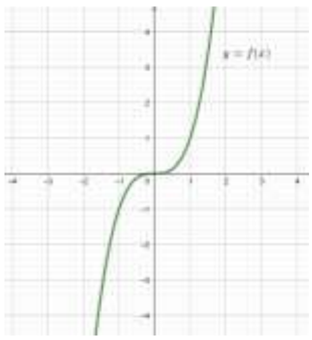
4.2. <u>SIMETRÍAS (funciones pares e impares)</u>

Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que f es

a) <u>par</u> o simétrica respecto del eje OY cuando $\begin{cases} -x \in D \\ f(-x) = f(x) \quad \forall x \in D \end{cases}$

b) <u>impar</u> o simétrica respecto del origen de coordenadas sii $\begin{cases} -x \in D \\ f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in D \end{cases}$


Función par


Función impar

<u>Ejemplos:</u>

1) La función $f(x) = |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$ es par, ya que $f(-x) = |-x| = |x| = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

---

[3] Un entorno abierto de x_0 es un intervalo de la forma $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ para algún $\varepsilon > 0$. Lo representaremos por $E(x_0)$ o $E(x_0, \varepsilon)$ si necesitamos precisar el radio, ε, que tiene.

2) La función $g(x)=x^3 \quad \forall x\in\mathbb{R}$ es impar, ya que $g(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}$
3) La función $h(x)=2x+1 \quad \forall x\in\mathbb{R}$ no es ni par ni impar (¡Compruébalo!).

Geométricamente una función es:

a) *par* si al doblar la gráfica respecto del eje OY las ramas positiva y negativa de la función coinciden.
b) *impar* si al girarla 180º su gráfica coincide con ella misma.

Ejercicio:

19. *Estudia la simetría de las siguientes funciones:*

a) $f(x)=x^5-x$

b) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^4+1}$

c) $f(x)=\sqrt{x^4+x^2-1}$

d) $f(x)=|x|$

e) $f(x)=x^2-|x|$

f) $f(x)=\begin{cases} x+\dfrac{\sqrt{x^2}}{x} & \text{si} \quad x\neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x=0 \end{cases}$ ¡Cuidado! $\sqrt{x^2}=|x|$

4.3. <u>PERIODICIDAD</u>

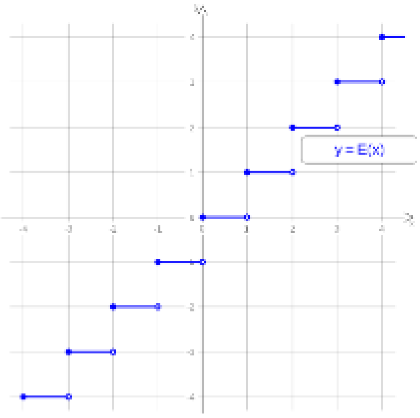
Una función $f:D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es <u>periódica</u> de período $T>0$ sii se cumplen las siguientes dos condiciones:

1) $f(x+T)=f(x) \quad \forall x\in D$
2) $T>0$ es el menor de los números que cumple 1).

Se estudiarán con más detalle en la unidad «Funciones elementales».

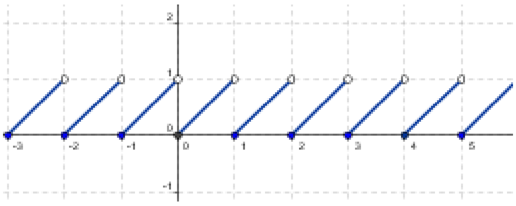
Ejemplos

(1) *Función parte entera*: función que asocia a cada número real el número entero más próximo, por defecto o por exceso (funciones suelo (por defecto) o piso (por defecto)



(2) *Función parte decimal o mantisa*: función que asocia a cada número real su parte decimal

$$Dec(x) = x - Ent(x)$$



4.4. CONTINUIDAD (funciones continuas)

Definición no rigurosa[4]: Diremos que una función $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en un punto $\boxed{x_0 \in D}$ sii en un entorno de dicho punto los puntos próximos a x_0 tienen imágenes próximas a $f(x_0)$ en otro entorno de dicho punto.

En el caso de que *f* sea continua en todos los puntos de un subconjunto $S \subseteq D$, se dice que *f* es continua en *S*.

Cuando una función no sea continua en un punto (de su dominio), se dice que es discontinua en dicho punto.

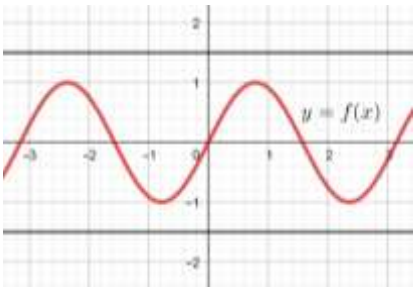
4.5. ACOTACIÓN (funciones acotadas). Máximo y mínimo absoluto.

Una función $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está:

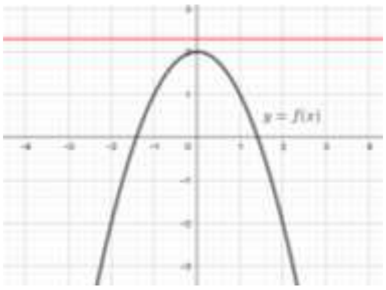
a) acotada sii $\exists M > 0 : |f(x)| \leq M \quad \forall x \in D$

b) acotada superiormente sii $\exists K \in \mathbb{R} \; : f(x) \leq K \quad \forall x \in D$

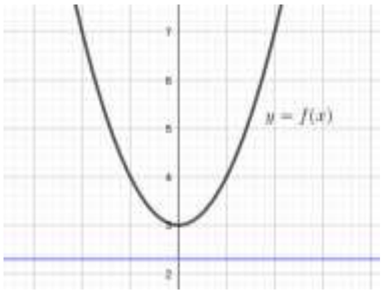
c) acotada inferiormente sii $\exists k \in \mathbb{R} \; : k \leq f(x) \quad \forall x \in D$



Función acotada



Función acotada superiormente



Función acotada inferiormente

Como consecuencia de lo anterior se tiene la siguiente **caracterización**:

$$f \text{ acotada} \Leftrightarrow f \text{ acotada superior e inferiormente}$$

Ejemplos:

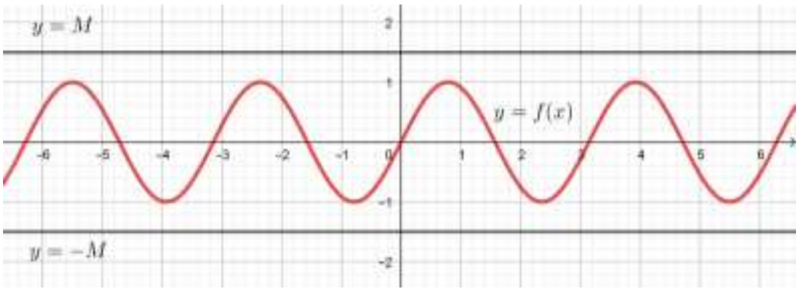
1) La función $f(x) = |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$ está acotada inferiormente por 0, pero no está acotada superiormente (luego $\mathrm{Img}(f) = [0, +\infty)$).

2) La función $g(x) = x^2 + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ está acotada inferiormente por 1, pero no está acotada superiormente (luego $\mathrm{Img}(g) = [1, +\infty)$).

[4] En la unidad de Límites y Continuidad daremos una definición rigurosa de función continua, que involucra límites.

3) La función $h(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ $\forall x\in\mathbb{R}$ está acotada superiormente por 1, pero no está acotada inferiormente (luego $\operatorname{Img}(h)=(-\infty,1]$).
4) La función $i(x)=x^3$ $\forall x\in\mathbb{R}$ no está acotada inferior ni superiormente (luego $\operatorname{Img}(i)=\mathbb{R}$).

Geométricamente, el hecho de que una función esté acotada (por un número $M>0$), se traduce en que su gráfica está entre las rectas $y=M$ e $y=-M$

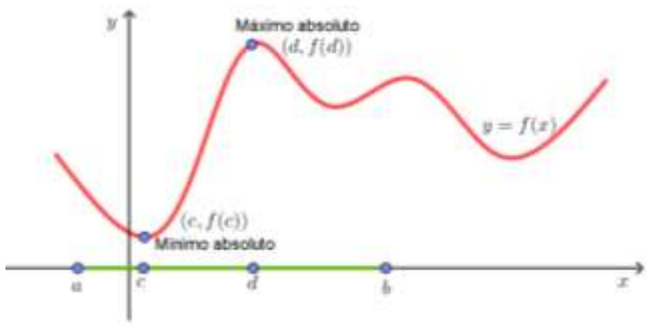


Si *f* está acotada superiormente, el número *M* recibe el nombre de cota superior. A la menor de las cotas superiores se le llama supremo de *f* en *D*. Si el supremo es alcanzado por la función *f*, es decir, $\exists x_1\in D: f(x_1)$ es el supremo, entonces el número $f(x_1)$ recibe el nombre de máximo absoluto de *f* en *D*. Las *coordenadas* del máximo absoluto son $(x_1, f(x_1))$.

Si *f* está acotada inferiormente el número *m* recibe el nombre de cota inferior. A la mayor de las cotas inferiores se le llama ínfimo de *f* en *D*. Si el ínfimo es alcanzado por la función *f*, es decir, $\exists x_0\in D: f(x_0)$ es el ínfimo, entonces el número $f(x_0)$ recibe el nombre de mínimo absoluto de *f* en *D*. Las *coordenadas* del mínimo absoluto son $(x_0, f(x_0))$.

Teorema de Weierstrass: Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es continua, entonces f tiene máximo y mínimo absolutos, es decir, $\exists c,d\in[a,b]: f(c)\le f(x)\le f(d)\quad \forall x\in[a,b]$.

Este resultado lo que ***nos dice*** es que la función tiene extremos absolutos, pero no nos dice dónde están ni cómo calcularlos.



Consecuencia del teorema de Weierstrass:

Sea $f(x)=a_nx^n+...+a_1x+a_0$ una función polinómica de grado par.

a) Si $a_n > 0$, entonces f alcanza un mínimo absoluto en $\mathbb{R}$.

b) Si $a_n < 0$, entonces f alcanza un máximo absoluto en $\mathbb{R}$.

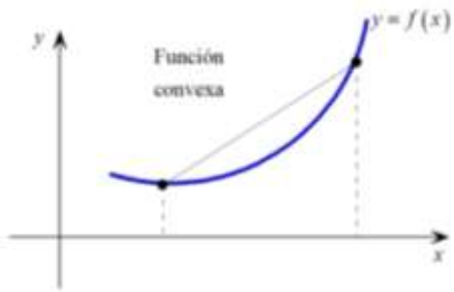
4.6. CURVATURA (funciones convexas y cóncavas). Puntos de inflexión

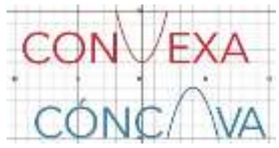
Daremos una definición[5] basada en la interpretación geométrica:

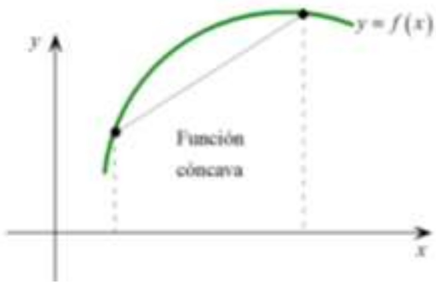
Una función $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donde I es un intervalo[6], es convexa sii para cualesquiera $a,b \in I$ con $a < b$ la gráfica de f restringida al intervalo $[a,b]$ «se halla situada por debajo» del segmento de extremos $(a, f(a))$, $(b, f(b))$.

Así, una función es convexa cuando el recinto del plano que queda por encima de su gráfica es un conjunto convexo (visto de arriba hacia abajo), esto es, cuando las rectas tangentes a la gráfica de la función quedan por debajo de ésta.

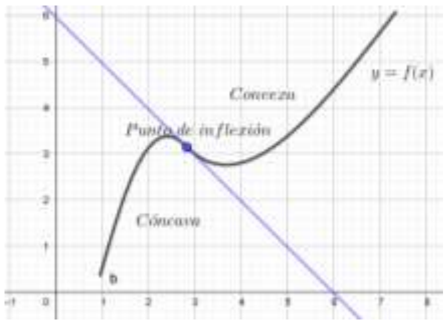
Diremos que $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donde I es un intervalo, es cóncava cuando $-f$ sea convexa.







Una función tiene un punto de inflexión, cuando en dicho punto la función pasa de ser convexa a ser cóncava o viceversa. En el primer caso se habla de punto de inflexión convexo-cóncavo y en el segundo de punto de inflexión cóncavo-convexo.



[5] ¡¡Ojo!! Al consultar la bibliografía es posible encontrar libros donde llaman función cóncava a lo que nosotros llamamos función convexa. También se usa la nomenclatura cóncava hacia arriba para las funciones convexas y cóncava hacia abajo para las cóncavas. Lo importante no es el nombre que se le dé, sino el concepto. Pero lo cierto es que no he encontrado un solo libro que no sea de Bachillerato donde la parábola $y = x^2$ sea cóncava.

[6] Un conjunto $I \subseteq \mathbb{R}$ se dice que es un intervalo si siempre que dos números están en I todos los números comprendidos entre ellos dos también están en I. El conjunto vacío, $\varnothing$, se considera también como un intervalo.

4.7. TENDENCIAS

Asíntotas verticales

Decir que $f(x) \to +\infty$ cuando $x \to a$, significa que cuando *x* tiende a *a* (se acerca cada vez más al punto *a*), con $x < a$, $f(x)$ toma valores cada vez mayores.

Análogamente, decir que $f(x) \to -\infty$ cuando $x \to a$, significa que cuando *x* tiende a *a*, con $x < a$, $f(x)$ toma valores cada vez más pequeños.

Llamamos asíntotas de una función a las rectas que se aproxima la función en el infinito.

La recta $x = a$ es una asíntota vertical de $f(x)$ si se da alguna de las siguientes situaciones:

$$f(x) \to \pm\infty \text{ cuando } x \to a \qquad f(x) \to \pm\infty \text{ cuando } x \to a+$$

$$f(x) \to \pm\infty \text{ cuando } x \to a-$$

Asíntotas horizontales

Decir que $f(x) \to b$ cuando $x \to +\infty$, significa que cuando *x* se hace tan grande como queramos, la función $f(x)$ toma valores cada vez más próximos al número *b*.

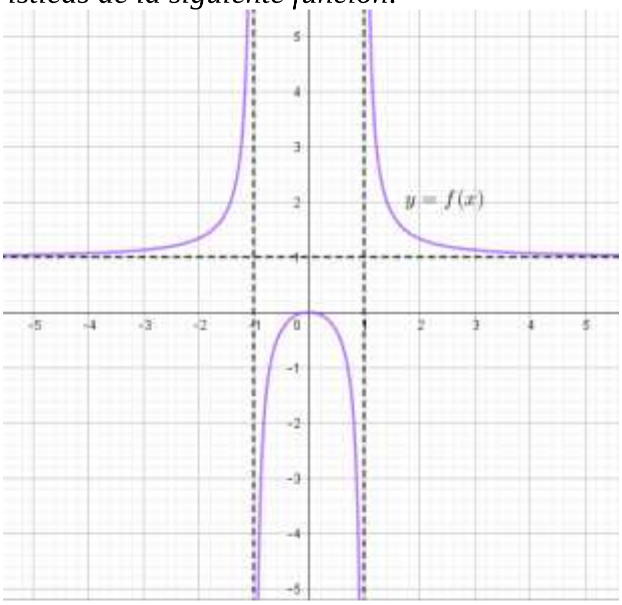
Análogamente, decir que $f(x) \to b$ cuando $x \to -\infty$, significa que cuando *x* se hace tan pequeño como queramos, la función $f(x)$ toma valores cada vez más próximos al número *b*.

La recta $y = k$ es una asíntota horizontal de $f(x)$ si se da alguna de las siguientes situaciones:

$$f(x) \to k \text{ cuando } x \to +\infty \quad \text{o} \quad f(x) \to k \text{ cuando } x \to -\infty$$

Ejercicios:

20. *Indica las características de la siguiente función:*



Dominio:

Imagen o recorrido:

Monotonía:

- *Creciente:*
- *Decreciente:*
- *Máximos relativos:*
- *Mínimos relativos:*

Simetrías:

Continuidad:

Periodicidad:

Acotación:

- *Cotas, supremo (ínfimo) y extremos absolutos en* $\left[-1,1\right]$*:*

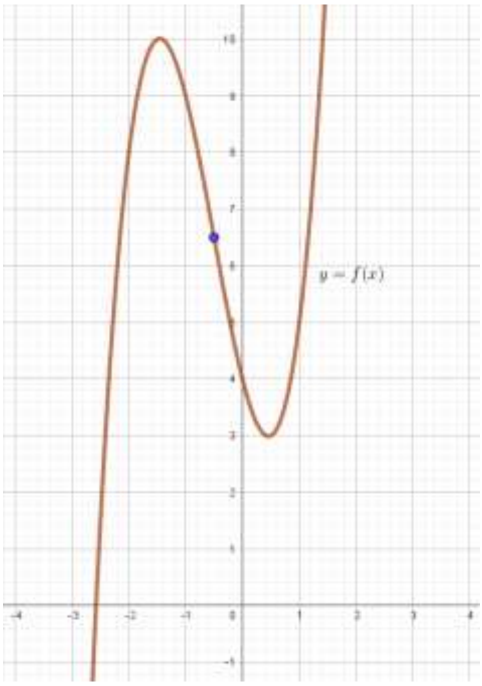
Curvatura:

- *Cóncava:*
- *Convexa:*

Tendencias:

$$\text{Cuando}\begin{cases} x\to 0 \\ x\to +\infty \Rightarrow f\left(x\right)\to \\ x\to -\infty \end{cases}\begin{cases} \\ \\ \\ \end{cases}$$

21. *Indica las características de la siguiente función:*



Dominio:

Imagen o recorrido:

Monotonía:

- *Creciente:*
- *Decreciente:*
- *Máximos relativos:*
- *Mínimos relativos:*

Simetrías:

Continuidad:

Periodicidad:

Acotación:

- *Cotas, supremo (ínfimo) y extremos absolutos:*

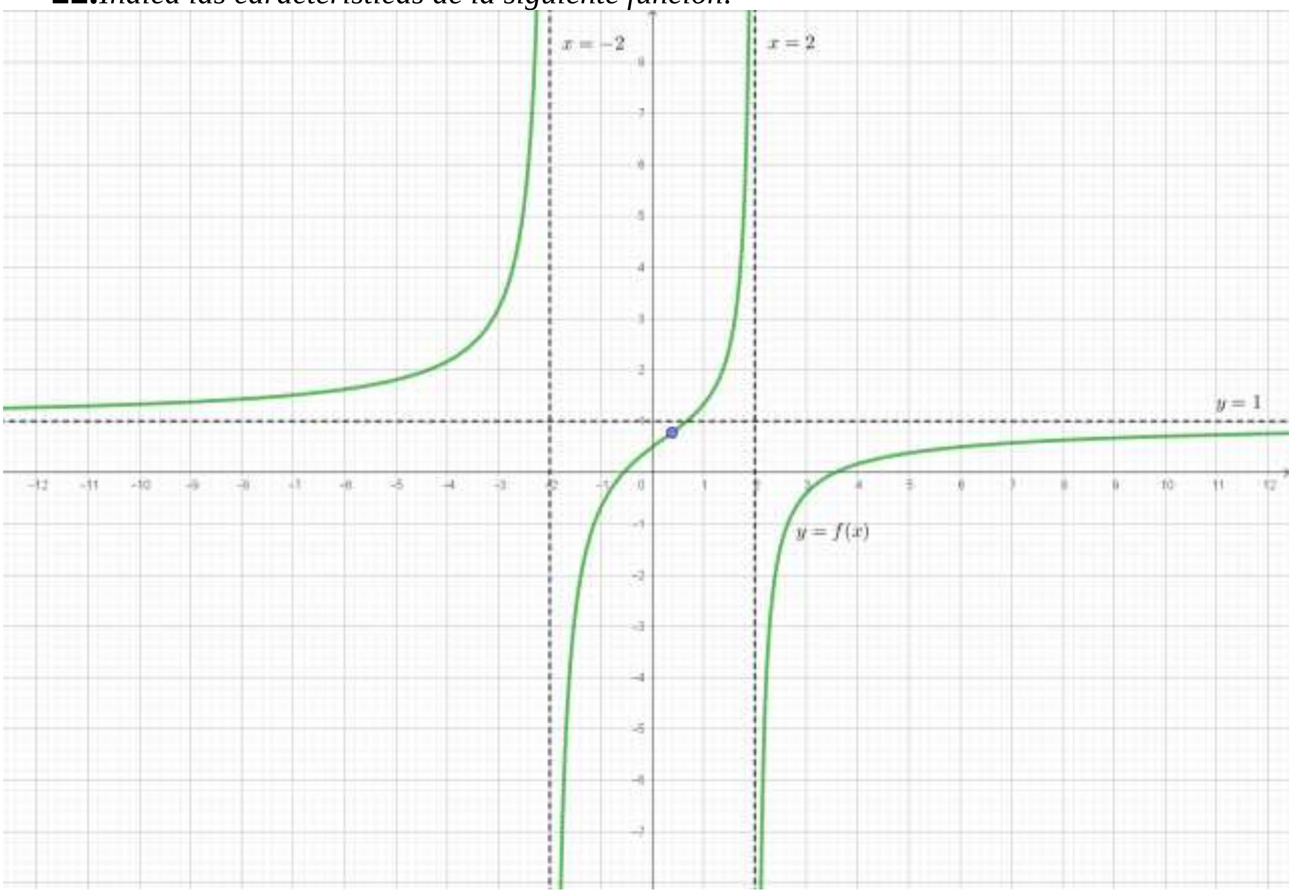
Curvatura:

- *Cóncava:*
- *Convexa:*

Tendencias:

$$\text{Cuando } \begin{cases} x \to 0 \\ x \to +\infty \Rightarrow f\left(x\right) \to \\ x \to -\infty \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right.$$

22. *Indica las características de la siguiente función:*



Dominio:

Imagen o recorrido:

Monotonía:

- *Creciente:*
- *Decreciente:*
- *Máximos relativos:*
- *Mínimos relativos:*

Simetrías:

Continuidad:

Periodicidad:

Acotación:

- *Cotas, supremo (ínfimo) y extremos absolutos:*

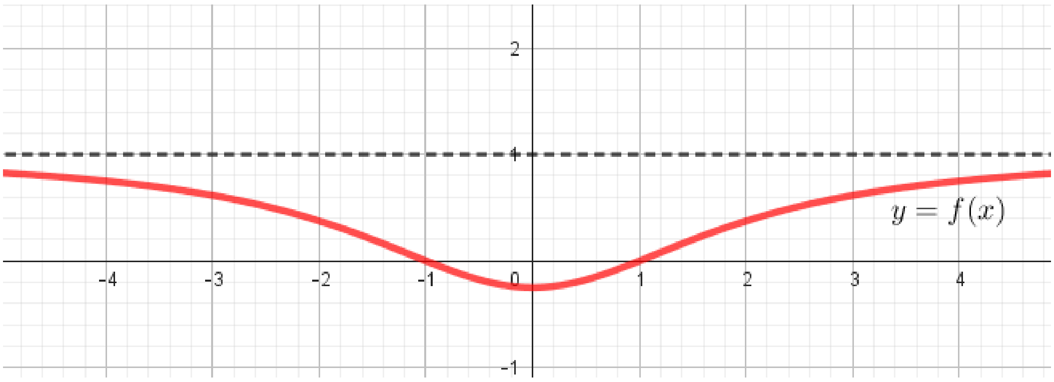
Curvatura:

- *Cóncava:*
- *Convexa:*

Tendencias:

$$\text{Cuando } \begin{cases} x \to 0 \\ x \to -3 \\ x \to 3 \\ x \to +\infty \\ x \to -\infty \end{cases} \Rightarrow f(x) \to \begin{cases} \\ \\ \\ \\ \\ \end{cases}$$

23. *Indica las características de la siguiente función:*



Dominio:

Imagen o recorrido:

Monotonía:

- *Creciente:*
- *Decreciente:*
- *Máximos relativos:*
- *Mínimos relativos:*

Simetrías:

Continuidad:

Periodicidad:

Acotación:

- *Cotas, supremo (ínfimo) y extremos absolutos:*

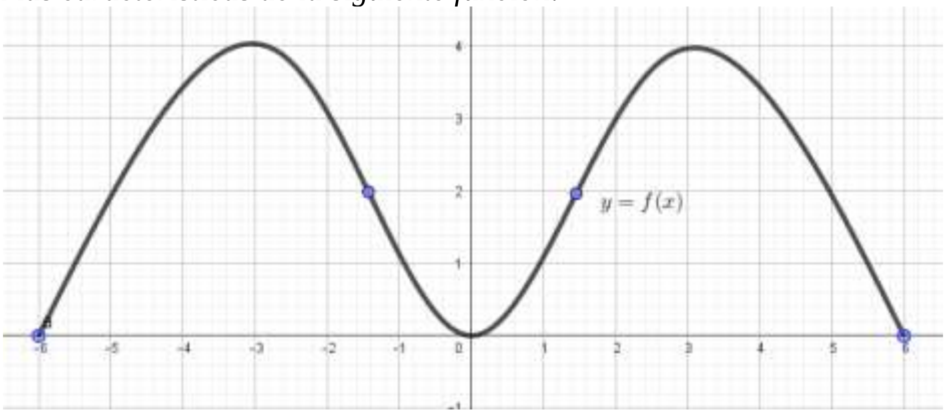
Curvatura:

- *Cóncava:*
- *Convexa:*

Tendencias:

$$\text{Cuando } \begin{cases} x \to 0 \\ x \to +\infty \Rightarrow f(x) \to \\ x \to -\infty \end{cases} \begin{cases} \\ \\ \\ \end{cases}$$

24. *Indica las características de la siguiente función:*



Dominio:

Imagen o recorrido:

Monotonía:

- *Creciente:*
- *Decreciente:*
- *Máximos relativos:*
- *Mínimos relativos:*

Simetrías:

Continuidad:

Periodicidad:

Acotación:

- *Cotas, supremo (ínfimo) y extremos absolutos:*

Curvatura:

- *Cóncava:*

- *Convexa:*

Tendencias:

$$\text{Cuando } \begin{cases} x \to +\infty \\ x \to -\infty \end{cases} \Rightarrow f(x) \to \begin{cases} \\ \end{cases}$$

25. *Una determinada empresa nos formula la siguiente oferta para conectarnos a Internet:*

- *Cuota mensual de abono: 6 €*
- *Cada hora de conexión: 1 €*

a) *Encuentra la función que nos indique el precio a pagar mensualmente, según las horas que se haya establecido conexión.*

b) *Representa gráficamente esta función.*

c) *La empresa carga un 18 % de IVA. ¿Cómo afecta esto a la función anterior y a su gráfica?*

26. *Queremos encuadernar todos los libros de la biblioteca de nuestro centro y nos cobran 7 € por cada libro si el número de páginas no supera las 200. A partir de 200 páginas, por cada página más se incrementa el precio en 0,02 €. Responde a las siguientes cuestiones:*

a) *Encuentra la función que nos da el precio a pagar por la encuadernación de un libro dependiendo del número de páginas de este.*

b) *Representa gráficamente esta función.*

27. *Los costes de producción (en euros) de una empresa vienen dados por:*

$$C(q) = 40\ 000 + 20q + q^2$$

donde q es el número de unidades producidas. El precio de venta de cada unidad producida es de 1 000 euros.

a) *Expresa en función de q, el beneficio de la empresa y represéntalo gráficamente.*

b) *¿Cuántas unidades hay que producir para que el beneficio sea máximo?*

28. *La dosis de un fármaco comienza con 10 mg y cada día debe aumentar 2 mg hasta llegar a 20 mg. Debe seguir 15 días con esa cantidad y a partir de entonces ir disminuyendo 4 mg cada día.*

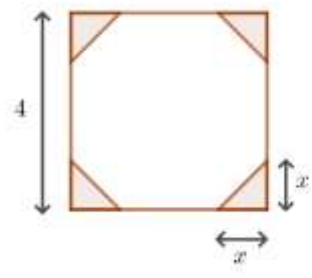
a) *Representa gráficamente la función que describe el enunciado y determina su expresión algebraica.*

b) *Indica su dominio y su recorrido.*

29. *De un cuadrado de 4 cm de lado, se cortan en las esquinas triángulos rectángulos isósceles cuyos lados iguales miden x.*

a) Escribe el área del octógono que resulta en función de x.

b) ¿Cuál es el dominio de esa función? ¿Y su recorrido?



30. *Una empresa fabrica envases con forma de prisma de dimensiones x, $\frac{x}{2}$ y $2x$ cm.*

a) Escribe la función que da el volumen del envase en función de x.

b) Halla su dominio sabiendo que el envase más grande tiene 1 l de volumen.

c) ¿Cuál es su recorrido?

31. *Una compañía de autobuses interurbanos ha comprobado que el número de viajeros (N) diarios depende del precio del billete (p) según la expresión:*

$$N(p) = 300 - 6p$$

1) Dar la expresión que nos proporciona los ingresos diarios (I) de esa compañía en función del precio del billete. 2) ¿Qué ingreso diario se obtiene si el precio del billete es 15 euros? 3) ¿Cuál es el precio del billete que hace máximo los ingresos diarios? 4) ¿Cuáles son esos ingresos máximos?

32. *La altura en metros, H, que alcanza una pelota lanzada verticalmente hacia arriba, viene dada en función del tiempo en segundos por la expresión:* $H(t) = 20t - 2t^2$.

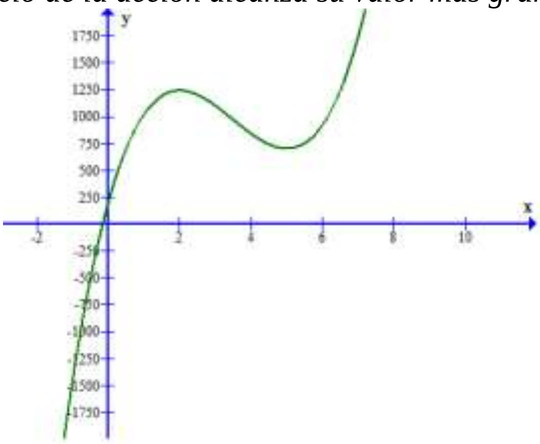
1) ¿Qué altura habrá alcanzado a los tres segundos?
2) ¿En qué momentos alcanzará 32 m de altura?
3) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza? ¿Dónde?

33. *En un estudio sobre el coste de producción de una empresa de ordenadores, se ha concluido que producir* x *unidades de un determinado componente tiene un coste expresado por la función* $C(x) = -0,01x^2 + x + 1$ *. La venta de* x *unidades de ese componente proporciona unos ingresos que vienen determinados por la función* $I(x) = (6 - 0,25x)x$*, siendo* x *el número de unidades producidas.*
a) Calcular el número de unidades que deben producir para que los costes sean mínimos.
b) Hallar la expresión, en función de x*, de los beneficios, suponiendo que se venden todas las unidades que se producen.*
c) Calcular el número de unidades que deben producir y vender para que los beneficios sean máximos.

34. *El precio, en euros, que la acción de una empresa alcanza en el transcurso de una sesión de bolsa, viene dado por la función*

$$p(t) = 40t^3 - 420t^2 + 1200t + 200$$

en donde t *es el tiempo en horas a contar desde el inicio de la sesión. Supongamos que la sesión comienza a las 10 de la mañana y finaliza 7 horas después. Se pide:*
a) ¿Entre qué horas el precio de acción sube?
b) ¿Entre qué horas el precio de la acción baja?
c) ¿A qué hora el precio de la acción alcanza un máximo relativo? ¿Cuál es ese valor?
d) ¿A qué hora el precio de la acción alcanza un mínimo relativo? ¿Cuál es ese valor?
e) ¿A qué hora el precio de la acción alcanza su valor más grande? ¿Cuál es ese valor?

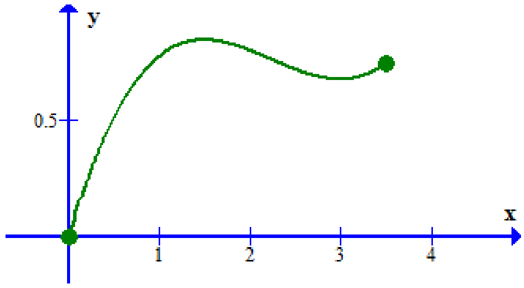


35. *El consumo de agua de un colegio viene dado por la función:*

$$f(t)=\begin{cases} 0 & si \quad t<0 \\ 0{,}1t^3-0{,}675t^2+1{,}35t & si \quad 0\le t\le 3{,}5 \\ 0 & si \quad t>3{,}5 \end{cases}$$

en donde t es el tiempo en horas a contar desde la apertura del colegio y f(t) es el consumo en m^3. Se supone que la jornada escolar comienza a las 10 horas y finaliza a las 13,5 horas. Se pide:

1) *¿Cuándo el consumo de agua es creciente? ¿Cuándo el consumo es decreciente?*
2) *¿En qué momento el consumo es máximo y en qué momento es mínimo?*



4.8. <u>AMPLIACIÓN: FUNCIONES INYECTIVAS, SOBREYECTIVAS Y BIYECTIVAS</u>

Una función $f:D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es <u>inyectiva</u> sii $\forall x,y\in D$ si $f(x)=f(y)\Rightarrow x=y$ o equivalentemente

$$\forall x,y\in D \text{ si } x\neq y\Rightarrow f(x)\neq f(y).$$

es decir, si elementos distintos de D tienen imágenes distintas en $\mathbb{R}$.

Geométricamente, una función es inyectiva si cualquier recta paralela al eje OX solo corta a la gráfica de la función *<u>en un único punto</u>*.

Algunas **<u>propiedades</u>** importantes son las siguientes:

1) Si $f:D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es estrictamente monótona, entonces f es inyectiva.
2) Si $f:D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es inyectiva, entonces $\exists f^{-1}:f(D)\to D$.
3) Si $f:D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es continua e inyectiva, entonces f es estrictamente monótona.

Una función $f:D\subseteq\mathbb{R}\to R\subseteq\mathbb{R}$ es <u>sobreyectiva</u> sii $\forall x\in R\ \ \exists y\in D$ tal que $f(x)=y$, es decir, cuando $\operatorname{Img}(f)=R$. Esto es, si todo elemento de R es imagen de alguno de D.

Geométricamente, esto significa que cada recta horizontal del plano con altura $y\in R$ corta a la gráfica de f *<u>por lo menos en un punto</u>*.

Diremos que $f:D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es <u>biyectiva</u> sii es inyectiva y sobreyectiva.

Geométricamente, esto significa que cada recta horizontal del plano con altura $y\in R$ corta a la gráfica de f *<u>en exactamente un punto</u>*.