UNIDAD 5:
GEOMETRÍA ANALÍTICA PLANA

VECTORES EN EL PLANO: EL PLANO VECTORIAL

0. INTRODUCCIÓN HISTÓRICA

La aparición de la Geometría Cartesiana enmarca la Geometría en la Edad Moderna, y se puede considerar que esta tiene su origen en una carta escrita a Isaac Beeckmann en 1628 por **Descartes**. En ella propone un nuevo método de resolver problemas geométricos, y por extensión, de investigar en Geometría, e indica que sus progresos habían sido tales que ya no estaba interesado en proseguir los estudios de aritmética y geometría.

El nuevo método se basa en la siguiente construcción: en un plano se trazan dos rectas perpendiculares (ejes), que por convenio se trazan de manera que una de ellas sea horizontal y la otra vertical, y cada punto del plano queda unívocamente determinado por las distancias de dicho punto a cada uno de los ejes, siempre y cuando se dé también un criterio para determinar sobre qué semiplano determinado por cada una de las rectas hay que tomar esa distancia, criterio que viene dado por un signo. Ese par de números, las coordenadas, quedará representado por un par ordenado (x, y), siendo x la distancia a uno de los ejes (por convenio será la distancia al eje vertical) e y la distancia al otro eje (al horizontal).

En la coordenada x, el signo positivo (que suele omitirse) significa que la distancia se toma hacia la derecha del eje vertical (eje de ordenadas), y el signo negativo (nunca se omite) indica que la distancia se toma hacia la izquierda. Para la coordenada y, el signo positivo (también se suele omitir) indica que la distancia se toma hacia arriba del eje horizontal (eje de abscisas), tomándose hacia abajo si el signo es negativo (tampoco se omite nunca en este caso). A la coordenada x se la suele denominar abscisa del punto, mientras que a la y se la denomina ordenada del punto.

Existe una cierta controversia aun hoy sobre la verdadera paternidad de este método. Lo único cierto es que se publica por primera vez como «*Geometría Analítica*», apéndice al «*Discurso del Método*», de Descartes, si bien se sabe que **Pierre de Fermat** conocía y utilizaba el método antes de su publicación por Descartes, y que también **Omar Khayyam** ya en el siglo XI utilizaba un método muy parecido para determinar ciertas intersecciones entre curvas.

Lo novedoso de la Geometría Analítica (como también se conoce a este método) es que permite representar figuras geométricas mediante fórmulas del tipo $f(x, y) = 0$, donde f representa una función. En particular, las rectas pueden expresarse como ecuaciones polinómicas de grado 1 ($f(x, y) = y - (mx + n)$) y las circunferencias ($f(x, y) = (x - a)^2 + (y - b)^2 - R^2$) y el resto de cónicas como ecuaciones polinómicas de grado 2. Esto convertía toda la Geometría griega en el estudio de las relaciones que existen entre polinomios de grados 1 y 2. Desde un punto de vista formal (aunque ellos aún no lo sabían), los geómetras de esta época encontraron una relación fundamental entre la estructura lógica que usaban los geómetras griegos (el plano, la regla, el compás...) y la estructura algebraica del ideal formado por los polinomios de grados 0, 1 y 2 del anillo de polinomios

$\mathbb{R}[x, y]$, resultando que ambas estructuras son equivalentes. Este hecho fundamental –no visto con nitidez[1] hasta el desarrollo del Álgebra Moderna y de la Lógica Matemática entre finales del siglo XIX y principios del siglo XX–, resulta fundamental para entender por qué la Geometría de los griegos puede desprenderse de sus axiomas y estudiarse directamente usando la axiomática de Zermelo-Fraenkel-Skolem (ZF), como el resto de la Matemática.

El método original de Descartes no es exactamente el que se acaba de explicar. Descartes utiliza solamente el eje de abscisas, calculando el valor de la segunda componente del punto (x, y) mediante la ecuación de la curva, dándole valores a la magnitud x. Por otro lado, Descartes solo considera valores positivos de las cantidades x e y, dado que en la época aun resultaban «sospechosos» los números negativos. Como consecuencia, en sus estudios existen ciertas anomalías y aparecen curvas sesgadas. Con el tiempo se aceptaron las modificaciones que muestran el método tal y como lo conocemos hoy en día.

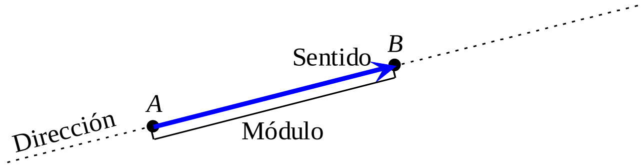
El matemático inglés **Clifford** (1845-1879), en sus «*Elements of dynamics*» (*Elementos de dinámica*), introduce los vectores, así como las operaciones usuales de adición y multiplicación de vectores y sus propiedades.

1. VECTORES LIBRES: ESTRUCTURA

Un vector fijo $\overrightarrow{AB}$ es un segmento orientado que tiene su origen en el punto A y su extremo en el punto B.
Gráficamente se representará por una flecha que empiece en A y acabe en B.

Los tres elementos característicos de un vector son:

- Módulo de $\overrightarrow{AB}$: es la longitud del segmento y se representa por $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.
- Dirección de $\overrightarrow{AB}$: es la dirección de la recta que pasa por A y B.
- Sentido de $\overrightarrow{AB}$: es el recorrido de la recta cuando nos trasladamos de A a B.



El vector fijo nulo (vector fijo en el que coinciden origen y extremo) no tiene, ni dirección ni sentido definidos, y su módulo es cero.

Dos vectores fijos no nulos son equipolentes si tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido.

El conjunto de todos los vectores fijos del plano queda clasificado en clases de equivalencia; cada clase de equivalencia estará formada por un vector fijo y todos los equipolentes a él. A cada una de estas clases la llamaremos vector libre[2].

[1] Si bien tanto Euler (1707-1783) como Möbius (1790-1868) ya habían trabajado en Geometría Afín.

[2] Esto no es nada extraño; de hecho, ya conoces otro conjunto en el que pasa lo mismo, es el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales. Recuerda que cuando se trabaja con fracciones se puede elegir la que más nos convenga de todas las que son

Al conjunto formado por todos los vectores libres lo representaremos por V^2:

$$V^2 = \{\text{vectores libres del plano}\}$$

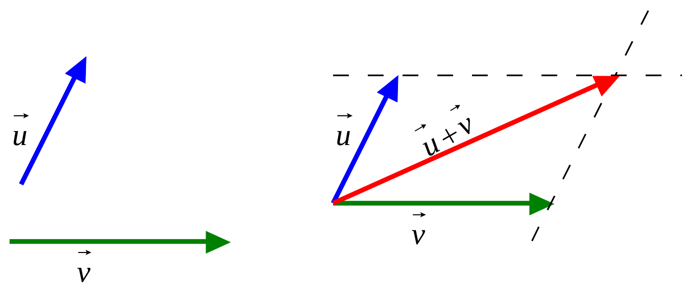
El conjunto que acabamos de definir, V^2, puede ser enriquecido con operaciones que lo doten de una estructura algebraica (en concreto la de espacio vectorial), que hará su estudio más cómodo, al poder ser identificado con otras estructuras similares más sencillas.

Las operaciones referidas son:

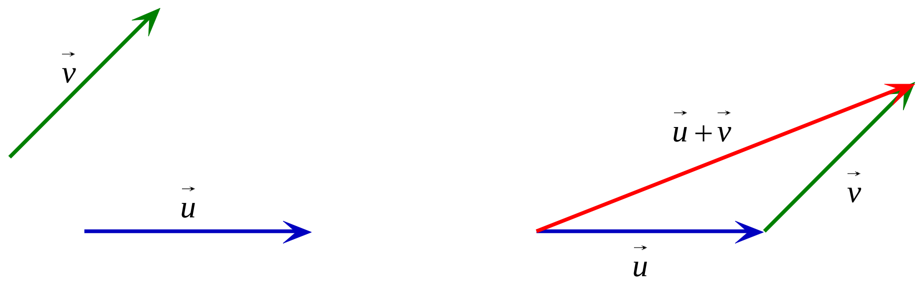
- Suma de vectores libres.
- Producto de un número real por un vector libre.

a) ***Suma***

Para sumar vectores libres basta tomar representantes con origen común y utilizar la regla del paralelogramo.

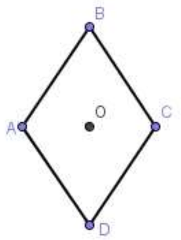


La suma de vectores se puede definir también del siguiente modo: en el extremo del primer vector se toma un representante del segundo; el vector cuyo origen es el del primer vector y cuyo extremo es el del segundo vector es el vector suma de los dos.



Ejercicio:

1. *Observa el rombo de la figura y calcula gráficamente:*



a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$

c) $\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{CA}$

d) $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$

Propiedades de la suma:

equivalentes a la que nos dan. Esto mismo es lo que vamos a hacer con los vectores. De todos los que son equipolentes entre sí, elegiremos el más apropiado en cada situación.

(1) Conmutativa: $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$

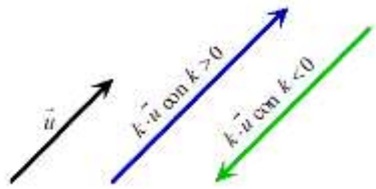
(2) Asociativa: $\vec{u}+\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\left(\vec{u}+\vec{v}\right)+\vec{w}$

(3) Existencia de elemento neutro: $\vec{0}$: $\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$

(4) Existencia de elemento opuesto: $\vec{u}+\left(-\vec{u}\right)=\vec{0}$

b) ***<u>Multiplicación de un vector por un número real</u>***

El producto del vector $\vec{u}$ por el número real k es el vector $k\vec{u}$ que tiene la misma dirección que $\vec{u}$, igual sentido si $k>0$, y sentido contrario si $k<0$, y cuyo módulo es igual a $k\left|\vec{u}\right|$.



<u>Propiedades</u> de la multiplicación por escalares:

(5) $k\left(\vec{u}+\vec{v}\right)=k\vec{u}+k\vec{v}$

(6) $\left(k+h\right)\vec{u}=k\vec{u}+h\vec{u}$

(7) $\left(kh\right)\vec{u}=k\left(h\vec{u}\right)$

(8) $1\vec{u}=\vec{u}$

Por verificar estas ocho propiedades se dice que la terna $\left(V^2,+,\cdot_{\mathbb{R}}\right)$ es un espacio vectorial real.

$\boxed{\left(V^2,+,\cdot_{\mathbb{R}}\right) \text{ es un espacio vectorial real}}$

<u>Ejercicios:</u>

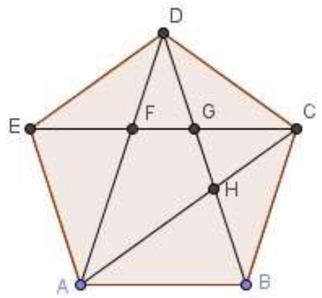
2. *Observa el pentágono regular de la figura, donde F, G y H son los puntos en los que se cortan las diagonales. Calcula:*

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BH}$

b) $\overrightarrow{AB}+\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}\right)$

c) $\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}\right)-\overrightarrow{AF}$

d) $\left(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{DE}\right)+\left(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}\right)$



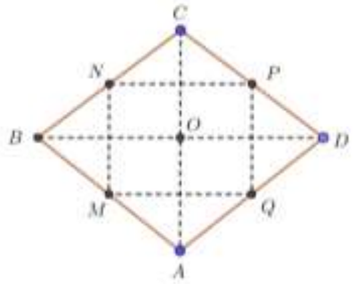
3. *A partir del siguiente rombo, calcula:*

a) $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MN}$

c) $\overrightarrow{MP}-\overrightarrow{PD}$

b) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{OP}$

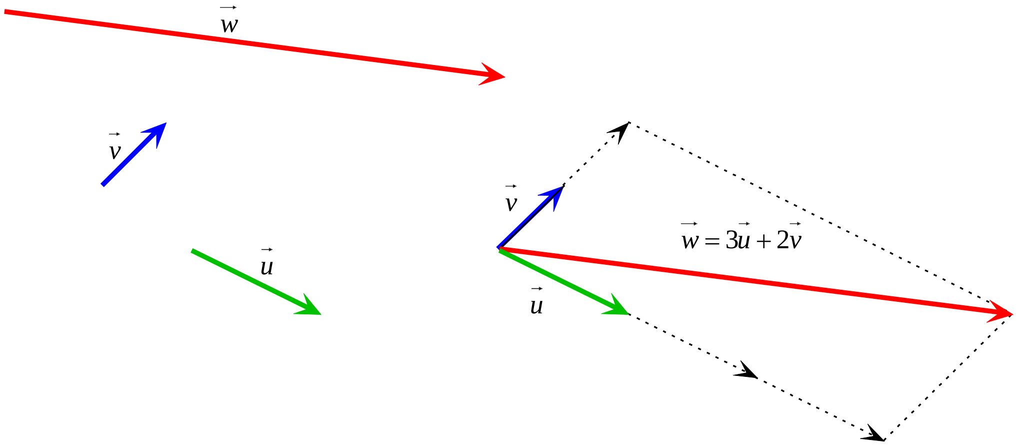
d) $\overrightarrow{AC}-\left(\overrightarrow{NQ}+\overrightarrow{PQ}\right)$



2. DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL

Dados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, llamamos combinación lineal[3] de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ al vector $\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}$, donde $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.

Un vector $\vec{w}$ es combinación lineal de otros dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, si existen dos números reales λ y μ, tales que $\vec{w}=\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}$.



Dos vectores libres $\vec{u}$ y $\vec{v}$ $\left(\vec{u},\ \vec{v}\in V^2\right)$ son linealmente dependientes si existen dos números reales λ y μ no simultáneamente nulos tales que $\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}=\vec{0}$.

Si la expresión anterior solo es cierta cuando $\lambda=\mu=0$, diremos que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente independientes.

Caracterizaciones:

(1) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente dependientes $\Leftrightarrow \vec{u}$ y $\vec{v}$ son paralelos (tienen la misma dirección) y escribiremos $\vec{u}\,||\,\vec{v}$.

(2) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente independientes $\Leftrightarrow \vec{u}$ y $\vec{v}$ no son paralelos y escribiremos $\vec{u}\nparallel\vec{v}$.

[3] Curiosidad: en computación cuántica (computación que hace uso de las propiedades cuánticas de la materia), un qubit puede estar en dos estados básicos, 0 y 1, o como una combinación lineal de los estados 0 y 1: $\alpha\cdot 0+\beta\cdot 1$, donde $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ tales que $|\alpha|^2+|\beta|^2=1$.

Una <u>base</u> de V^2 está formada por dos vectores no nulos y linealmente independientes.

Como el número de vectores linealmente independientes de una base de V^2 es dos, diremos que V^2 tiene <u>dimensión</u> dos.

3. EL ESPACIO VECTORIAL $\mathbb{R}^2$

En el plano cartesiano $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R} = \{(x,y) : x,y \in \mathbb{R}\}$ definimos las siguientes operaciones:

$$\left.\begin{array}{l}(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2)\\ \lambda(x,y)=(\lambda x,\lambda y)\end{array}\right\} \forall (x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2,\ \lambda\in\mathbb{R}$$

que verifican las siguientes propiedades:

1) Asociativa: $[(x_1,y_1)+(x_2,y_2)]+(x_3,y_3)=(x_1,y_1)+[(x_2,y_2)+(x_3,y_3)]$
2) Conmutativa: $(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_2,y_2)+(x_1,y_1)$
3) Existencia de elemento neutro: $(x,y)+(0,0)=(x,y)$
4) Existencia de elemento simétrico: $(x,y)+(-x,-y)=(0,0)$
5) Distributiva: $\alpha[(x_1,y_1)+(x_2,y_2)]=\alpha(x_1,y_1)+\alpha(x_2,y_2)$
6) Distributiva: $(\alpha+\beta)(x,y)=\alpha(x,y)+\beta(x,y)$
7) Asociativa: $(\alpha\beta)(x,y)=\alpha[\beta(x,y)]$
8) Elemento neutro: $1(x,y)=(x,y)$

Por cumplirse estas ocho propiedades, diremos que $(\mathbb{R}^2,+,\cdot_{\mathbb{R}})$ tiene estructura algebraica de espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$:

$$\boxed{(\mathbb{R}^2,+,\cdot_{\mathbb{R}}) \text{ es un espacio vectorial real}}$$

<u>Definición:</u> Los **<u>vectores numéricos</u>** $\vec{x}=(x_1,y_1)$ e $\vec{y}=(x_2,y_2)$ de $\mathbb{R}^2$ son **<u>iguales</u>** cuando se verifican las siguientes igualdades: $\begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$

Una <u>base</u> de $\mathbb{R}^2$ está formada por dos vectores numéricos no nulos y linealmente independientes, esto es, con componentes no proporcionales.

La base $B=\{\vec{e_1},\vec{e_2}\}$, donde $\vec{e_1}=(1,0)$ y $\vec{e_2}=(0,1)$, se denomina **<u>base canónica o usual</u>**, y es con la que se suele trabajar siempre, salvo que se indique lo contrario.

Como consecuencia de lo anterior, se tiene que

$$\boxed{(\mathbb{R}^2,+,\cdot_{\mathbb{R}}) \text{ es un espacio vectorial real de dimensión dos}}$$

<u>Ejercicios:</u>

4. *Dados los vectores* $\vec{x}=(1,-3)$, $\vec{y}=(-2,5)$ y $\vec{z}=(6,9)$ *calcula:*

a) $\vec{x}+\vec{y}+2\vec{z}$ *b)* $\left(\vec{x}+\vec{y}\right)-2\left(\vec{x}-3\vec{y}\right)$ *c)* $\dfrac{\vec{x}+\vec{y}}{2}-\dfrac{1}{3}\vec{z}$

5. *Comprueba si los siguientes pares de vectores son linealmente dependientes o linealmente independientes:*
a) $\vec{u}=(1,2)$ y $\vec{v}=(2,4)$ *b)* $\vec{u}=(1,0)$ y $\vec{v}=(0,1)$

6. *Comprueba que los vectores* $\vec{u}=(-1,1)$ y $\vec{v}=(1,1)$ *forman una base.*

4. COORDENADAS CARTESIANAS

4.1. Coordenadas de un vector respecto de una base

Llamaremos coordenadas cartesianas de $\vec{u}\in V^2$ en la base $B=\left\{\vec{e_1},\vec{e_2}\right\}$ al par de números reales (x,y) tales que $\vec{u}=x\vec{e_1}+y\vec{e_2}$. En cuyo caso escribiremos $\vec{u}=(x,y)$.

Como consecuencia de la introducción de las coordenadas, desde el punto de vista de la geometría, ***los espacios vectoriales*** $\left(V^2,+,\cdot_{\mathbb{R}}\right)$ ***y*** $\left(\mathbb{R}^2,+,\cdot_{\mathbb{R}}\right)$ ***son plenamente identificables, e indistinguibles*** como espacios vectoriales (se dice que son isomorfos), ya que cada vector tiene asociadas unas coordenadas únicas y, recíprocamente, dadas unas coordenadas, le podemos asociar un único vector. Esto se representa como sigue:

$$\left(V^2,+,\cdot_{\mathbb{R}}\right)\cong\left(\mathbb{R}^2,+,\cdot_{\mathbb{R}}\right)$$

y nos dice que cualquier relación geométrica de V^2 se traduce en una relación numérica en $\mathbb{R}^2$.

Cuando no se especifique la base se entenderá que estamos trabajando con la *base usual o canónica*, que es la base $B=\left\{\vec{e_1},\vec{e_2}\right\}=\left\{(1,0),(0,1)\right\}$.

Notación (no universal) para puntos y vectores en función de sus coordenadas:

Puntos: $P\left(p_1,p_2\right)$ (sin igual entre la letra que designa el punto y sus coordenadas)

Vectores: $\vec{u}=\left(u_1,u_2\right)$

Las **coordenadas del vector determinado por dos puntos** vienen dadas por

$$\left.\begin{array}{l}A\left(a_1,a_2\right)\\B\left(b_1,b_2\right)\end{array}\right\}\Rightarrow\boxed{\overrightarrow{AB}=\left(b_1-a_1,b_2-a_2\right)}$$

Caracterizaciones de la dependencia e independencia lineal:

(1) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente dependientes $\Leftrightarrow\vec{u}$ y $\vec{v}$ son paralelos $\Leftrightarrow$ sus coordenadas son proporcionales, y escribiremos $\vec{u}\parallel\vec{v}$.

(2) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente independientes $\Leftrightarrow\vec{u}$ y $\vec{v}$ no son paralelos $\Leftrightarrow$ sus coordenadas no son proporcionales, y escribiremos $\vec{u}\nparallel\vec{v}$.

Ejercicios:

7. *Como los vectores* $\vec{u}=(-1,1)$ y $\vec{v}=(1,1)$ *forman una base, determina las coordenadas del vector* $\vec{w}=\left(\sqrt{2},2\sqrt{2}\right)$ *respecto de dicha base.*

8. *Halla las coordenadas del vector* $\overrightarrow{AB}$ *que determinan los siguientes pares de puntos:*
a) $A(1,-2)$ *y* $B(3,4)$ *b)* $A(-2,1)$ *y* $B(-1,-5)$

9. *Halla los extremos de los vectores que figuran a continuación, sabiendo que su origen es el punto* $A(1,2)$*:*

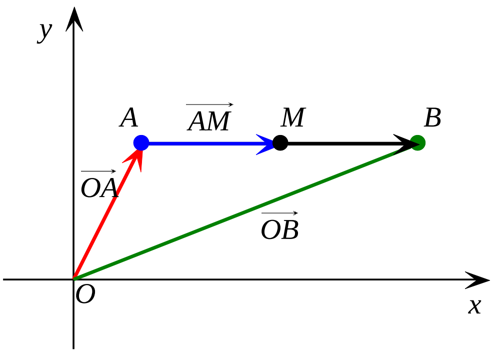
a) $\overrightarrow{AB}=(3,-2)$

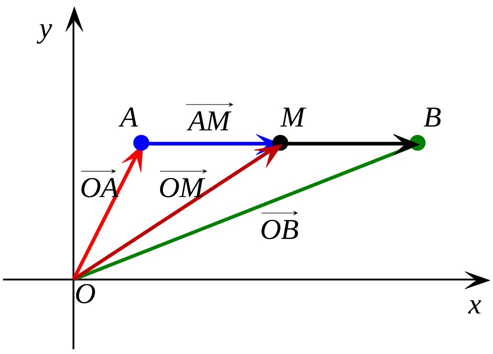
b) $\overrightarrow{AB}=(-1,-2)$

10. *Si el punto* $B(-2,1)$ *es el extremo de los siguientes vectores, halla su origen:*
a) $\overrightarrow{AB}=(3,4)$ *b)* $\overrightarrow{AB}=(2,5)$ *c)* $\overrightarrow{AB}=(-4,-1)$

11. *Dados los puntos* $A(1,3)$, $B(-2,4)$, $C(-1,-2)$ y $D(2,2)$, *calcular, analítica y geométricamente, la suma y la diferencia de los vectores* $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$.

4.2. Coordenadas del punto medio de un segmento





Se tiene que:

$$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{AM}\Rightarrow\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=2\overrightarrow{AM}\Rightarrow\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)=\overrightarrow{AM} \qquad [1]$$

y, por otra parte,

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}\Rightarrow\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}$$

Sustituyendo $\overrightarrow{AM}$ en [1]:

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}\Rightarrow\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OM}$$

de donde:

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$$

Simplificamos la notación, y lo volvemos a demostrar:
Sean $\vec{m}=\overrightarrow{OM}$, $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ y $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$. Se tiene que:

$$\vec{m} = \vec{a} + \overrightarrow{AM} = \vec{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \vec{a} + \frac{1}{2}\left(\vec{b} - \vec{a}\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$$

En coordenadas, se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} A(a_1,a_2) \\ B(b_1,b_2) \\ M(x_m,y_m) \end{array}\right\} \Rightarrow (x_m,y_m) = \frac{1}{2}\left[(a_1,a_2)+(b_1,b_2)\right] = \left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}\right)$$

$$\boxed{M(x_m,y_m) \text{ donde } \begin{cases} x_m = \dfrac{a_1+b_1}{2} \\ y_m = \dfrac{a_2+b_2}{2} \end{cases}}$$

Ejercicios:

12. *Halla el punto medio del segmento de extremos* $A(1,-4)$ *y* $B(6,-8)$.

13. *Si el punto medio del segmento* AB *es* $M(3,5)$, *dado* $A(9,7)$, *calcula el punto* B. *Luego obtén* A *con* $M(-1,5)$ y $B(4,-9)$.

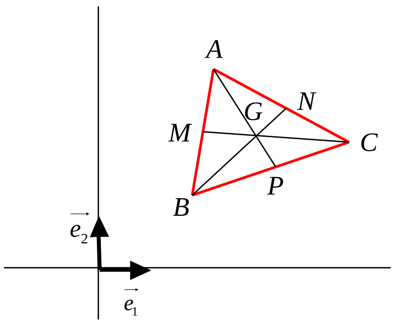
4.3. Baricentro de un triángulo

La **mediana** de un triángulo es el segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto.

Las medianas de un triángulo se cortan en un punto que se llama **baricentro**. Lo notaremos por G, y desde el punto de vista físico es el centro de gravedad del triángulo.

El baricentro de un triángulo está siempre situado a doble distancia sobre la mediana del vértice que del lado.

Determinamos sus coordenadas. Sea $\Re = \left\{ O;\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2 \right\}$ un sistema de referencia afín, y $A(a_1,a_2)$, $B(b_1,b_2)$ y $C(c_1,c_2)$ los vértices del triángulo.



El punto G, según la propiedad antes citada, verifica:

$$\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GP}$$

y expresando los vectores $\overrightarrow{AG}$ y $\overrightarrow{GP}$, en función de los vectores de posición de los puntos *A*, *G* y *P*:

$$\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OA} = 2\left(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OG}\right)$$

de donde:

$$\overrightarrow{OG}+2\overrightarrow{OG}=2\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OA}\Rightarrow 3\overrightarrow{OG}=2\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OA}\Rightarrow$$

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\left(2\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OA}\right)=\frac{1}{3}\left(2\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)+\overrightarrow{OA}\right)=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$$

Al igual que antes, simplificamos la notación, y lo volvemos a demostrar:

$$\vec{g}=\vec{m}+\overrightarrow{MG}=\vec{m}+\frac{1}{3}\overrightarrow{MA}\underset{(1)}{=}\vec{m}+\frac{1}{3}\left(\vec{a}-\vec{m}\right)\underset{(2)}{=}\frac{1}{2}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)+\frac{1}{3}\left[\vec{a}-\frac{1}{2}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\right]\underset{(3)}{=}$$

$$=\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}+\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{1}{6}\vec{b}-\frac{1}{6}\vec{c}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

donde en (1) hemos tenido en cuenta que $\overrightarrow{MG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{MA}$, en (2) que $\overrightarrow{MA}=\vec{a}-\vec{m}$ y en (3), que $\vec{m}=\frac{1}{2}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$.

En coordenadas, se tiene que:

$$\boxed{G=\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3},\frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)}$$

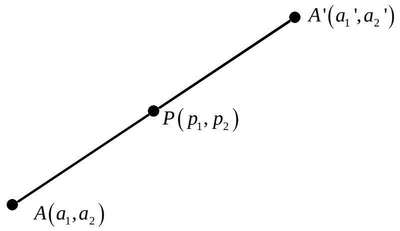
Ejercicio:

14. *Determina el baricentro del triángulo de vértices* $A(1,2), B(-3,4)$ y $C(0,-3)$ *y el baricentro del triángulo formado por los puntos medios de dicho triángulo. ¿Qué observas?*

4.4. Coordenadas del punto simétrico de un punto respecto de otro punto

El punto simétrico A' de un punto A respecto de otro punto M, será el punto tal que $\left|\overrightarrow{AM}\right|=\left|\overrightarrow{A'M}\right|$, esto es, cuando M sea el punto medio del segmento $\overline{AA'}$.

Las coordenadas del punto simétrico de $A(a_1,a_2)$ con respecto a $P(p_1,p_2)$ vienen dadas por:



$$\left.\begin{array}{l}A(a_1,a_2)\\P(p_1,p_2)\\A'(a_1',a_2')\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}a_1'=2p_1-a_1\\a_2'=2p_2-a_2\end{array}\right\}\Rightarrow\boxed{A'(2p_1-a_1,2p_2-a_2)}$$

(donde se ha tenido en cuenta que P es el punto medio del segmento $\overline{AA'}$).

Ejercicios:

15. *Dado el punto* $A(6,-1)$*, halla las coordenadas de su simétrico* A' *respecto de* $P(3,4)$.

16. *Si* $A(3,9)$ *y su simétrico es* $A'(8,-1)$*, determina el punto medio de dicho segmento.*

5. ELEMENTOS MÉTRICOS

Producto escalar de $\vec{u}$ y $\vec{v}$

$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\,|\vec{v}|\cos\alpha}$, donde $\alpha=$ ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$ $\quad\forall\vec{u},\vec{v}\in V^2$

Propiedades:

1) $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$ (conmutativo)
2) $\vec{u}\cdot\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ (distributivo)
3) $\vec{u}\cdot\vec{u}\geq 0$ y $\vec{u}\cdot\vec{u}=0\Leftrightarrow\vec{u}=\vec{0}$ (definido positivo)
4) $\vec{u}\cdot\vec{v}=0\Leftrightarrow\measuredangle\left\{\vec{u},\vec{v}\right\}=90^{\circ}\Leftrightarrow\vec{u}\perp\vec{v}$

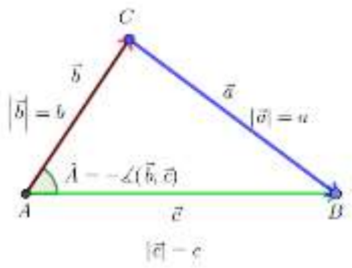
Ejercicio resuelto:

Demuestra el teorema del coseno usando la definición y las propiedades del producto escalar.

Solución:

En el triángulo ABC consideramos los vectores $\vec{a},\ \vec{b}$ y $\vec{c}$, que verifican: $\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$

Multiplicando escalarmente $\vec{a}$ por $\vec{a}$ se tiene:



$$\vec{a}\cdot\vec{a}=\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{b}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{c}=$$
$$=\vec{b}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{c}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow|\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2\vec{b}\cdot\vec{c}\Rightarrow$$
$$a^2=b^2+c^2+2bc\cos\measuredangle\left(\vec{b},\vec{c}\right)=$$
$$=b^2+c^2-2bc\cos A$$

Expresión en coordenadas del producto escalar

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=u_1\vec{e_1}+u_2\vec{e_2}=\left(u_1,u_2\right)\\ \vec{v}=v_1\vec{e_1}+v_2\vec{e_2}=\left(v_1,v_2\right)\end{array}\right\}\Rightarrow\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v}=u_1v_1+u_2v_2}$$

En efecto:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\left(u_1\vec{e_1}+u_2\vec{e_2}\right)\cdot\left(v_1\vec{e_1}+v_2\vec{e_2}\right)=u_1v_1\vec{e_1}\cdot\vec{e_1}+u_1v_2\vec{e_1}\cdot\vec{e_2}+v_1u_2\vec{e_2}\cdot\vec{e_1}+u_2v_2\vec{e_2}\cdot\vec{e_2}=$$
$$=u_1v_1+u_2v_2$$

ya que

$$\vec{e_1}\cdot\vec{e_1}=\vec{e_2}\cdot\vec{e_2}=1\ \text{ y }\ \vec{e_1}\cdot\vec{e_2}=\vec{e_2}\cdot\vec{e_1}=0$$

Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares u ortogonales, y escribiremos $\vec{u}\perp\vec{v}$, si $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

Ejercicios:

17. *Calcula el producto escalar de los vectores siguientes, sabiendo que sus coordenadas están referidas a la base canónica:*

a) $\vec{u}=(1,2),\ \vec{v}=(3,4)$ *c)* $\vec{u}=\left(-4,\sqrt{2}\right),\ \vec{v}=\left(\sqrt{8},3\right)$

b) $\vec{u}=(2,5),\ \vec{v}=(-1,3)$ *d)* $\vec{u}=(2,1),\ \vec{v}=(-3,5)$

18. *El producto escalar de dos vectores coincide con el producto de sus módulos. ¿Qué puedes decir de los vectores?*

<u>Módulo de</u> $\vec{u}$: $\boxed{\left|\vec{u}\right| = +\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}}$ $\quad \forall \vec{u} \in V^2$

<u>Expresión en coordenadas del módulo de un vector:</u> $\boxed{\left|\vec{u}\right| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}}$

<u>Ejercicios resueltos:</u>

(1) Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son vectores unitarios ($\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right| = 1$), demuestra que $\vec{a}+\vec{b} \perp \vec{a}-\vec{b}$.

<u>Solución:</u>

Para demostrarlo, calculamos el producto escalar de $\vec{a}+\vec{b}$ por $\vec{a}-\vec{b}$:

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right) = \vec{a}\cdot\vec{a} - \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{a} - \vec{b}\cdot\vec{b} = \left|\vec{a}\right|^2 - \left|\vec{b}\right|^2 = 1 - 1 = 0$$

(2) ¿Qué condición deben cumplir los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ para que $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right) = 0$?

<u>Solución:</u>

Sean $\vec{a} = (a_1, a_2)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2)$. Como $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right) = 0$ se tiene que:

$$(a_1+b_1, a_2+b_2)\cdot(a_1-b_1, a_2-b_2) = (a_1+b_1)(a_1-b_1) + (a_2+b_2)(a_2-b_2) = \left(a_1^2 - b_1^2\right) + \left(a_2^2 - b_1^2\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1^2 + a_2^2 = b_1^2 + b_2^2 \Rightarrow \left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right|$$

Por tanto, para que los vectores $\vec{a}+\vec{b}$ y $\vec{a}-\vec{b}$ sean ortogonales, se tiene que verificar que $\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right|$.

<u>Ángulo que forman</u> $\vec{u}$ y $\vec{v}$: se define el ángulo que forman dos vectores libres como el *menor* de los ángulos que forman dos de sus representantes con origen común.

$$\cos\measuredangle\left(\vec{u},\vec{v}\right) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|\ \left|\vec{v}\right|} \Rightarrow \boxed{\measuredangle\left(\vec{u},\vec{v}\right) = \arccos\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|\ \left|\vec{v}\right|} \in \left[0^{\circ}, 180^{\circ}\right]}$$

<u>Expresión en coordenadas del ángulo que forman</u> $\vec{u}$ y $\vec{v}$

$$\cos\measuredangle\left(\vec{u},\vec{v}\right) = \frac{u_1v_1 + u_2v_2}{\sqrt{u_1^2+u_2^2}\sqrt{v_1^2+v_2^2}} \Rightarrow \boxed{\measuredangle\left(\vec{u},\vec{v}\right) = \arccos\frac{u_1v_1 + u_2v_2}{\sqrt{u_1^2+u_2^2}\sqrt{v_1^2+v_2^2}}}$$

<u>Ejercicios:</u>

19. *Halla el ángulo que forman las parejas de vectores:*

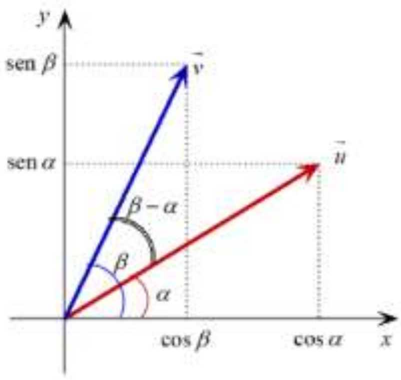
a) $\vec{u} = (1,2),\ \vec{v} = (2,-1)$ *c)* $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right),\ \vec{v} = (1,2)$

b) $\vec{u} = (0,1),\ \vec{v} = (1,1)$ *d)* $\vec{u} = \left(\sqrt{3}, 1\right),\ \vec{v} = \left(1, \sqrt{3}\right)$

20. *Calcula el valor del número real* x *para que los vectores* $\vec{u} = (1,2)$ y $\vec{v} = (x,1)$*:*

a) Sean ortogonales.
b) Formen un ángulo de 60º.
c) Sean paralelos.

Interpretación geométrica del producto escalar:



Sean $\vec{u},\vec{v}\in\mathbb{R}^2$ dos vectores unitarios (de módulo 1). Entonces, podemos encontrar ángulos $\alpha,\beta\in[0^\circ,360^\circ)$ tales que

$$\vec{u}=(\cos\alpha,\operatorname{sen}\alpha) \text{ y } \vec{v}=(\cos\beta,\operatorname{sen}\beta)$$

como se puede ver en la figura adjunta y, por tanto,

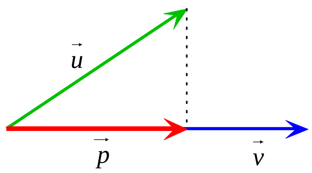
$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\cos\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta=\cos(\beta-\alpha)$$

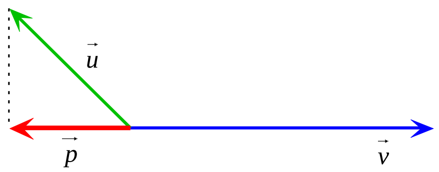
esto es, el producto escalar de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ coincide con el coseno del ángulo que determinan.

<u>Proyección ortogonal de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$</u>

La <u>*proyección ortogonal escalar*</u> de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ es la «longitud» con signo del vector $\vec{p}$. Si el signo es positivo indicará que la proyección coincide con el sentido que tiene el vector sobre el cual proyectamos ortogonalmente, y si es negativo que no coincide con el sentido del vector sobre el cual proyectamos ortogonalmente.

$$\boxed{P_{\vec{v}}\left(\vec{u}\right)=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left|\vec{v}\right|}}$$





Por otro lado, la <u>*proyección ortogonal (vectorial)*</u> de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ viene dada por:

$$\boxed{\operatorname{Proy}_{\vec{v}}\left(\vec{u}\right)=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left|\vec{v}\right|}\cdot\vec{v}}$$

<u>Ejercicio:</u>

21. *Calcula la proyección ortogonal escalar y vectorial de* $\vec{u}$ *sobre* $\vec{v}$:

a) $\vec{u}=(2,4)$ y $\vec{v}=(4,0)$

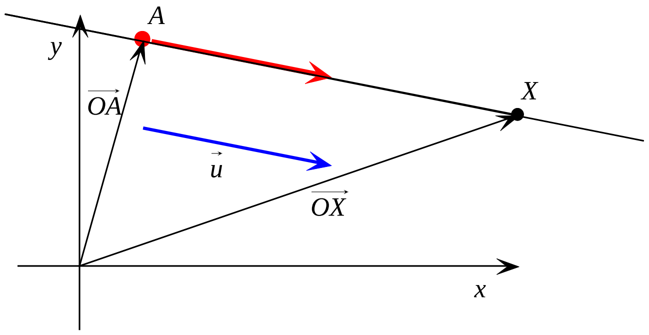
b) $\vec{u}=(-5,3)$ y $\vec{v}=(4,2)$

ECUACIONES DE LA RECTA

6. ECUACIONES DE LA RECTA

Se llama **determinación lineal de la recta** r al par $\left(A,\vec{u}\right)$ formado por un punto A, llamado punto base, y un vector (libre) no nulo $\vec{u}$ que se denomina vector director o de dirección de la recta.

6.1. Ecuación de la recta que pasa por el punto A con vector director $\vec{u}$



Del dibujo se deduce que

$$\overrightarrow{AX}=t\vec{u} \text{ con } t\in\mathbb{R}$$

o lo que es lo mismo, que

$$\overrightarrow{AX}=\overrightarrow{OX}-\overrightarrow{OA}=t\vec{u}$$

de dónde obtenemos que

$$\boxed{\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OA}+k\vec{u}}$$

que es la llamada ecuación vectorial de la recta.

En coordenadas:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} X(x,y) \\ A(a_1,a_2) \\ \vec{u}=(u_1,u_2) \end{array}\right\}(x,y)=(a_1,a_2)+t(u_1,u_2)}$$

6.2. Ecuaciones paramétricas de la recta

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} x=a_1+tu_1 \\ y=a_2+tu_2 \end{array}\right\} \text{ con } t\in\mathbb{R}}$$

6.3. Ecuación continua de la recta

$$\boxed{\frac{x-a_1}{u_1}=\frac{y-a_2}{u_2}}$$

Si $u_1=0$ y $u_2\neq 0$, lo que se hace es igualar a cero el numerador correspondiente, es decir, la ecuación de la recta es $x=a_1$ (ya que dicha recta es paralela al eje OY)

Si $u_2=0$ y $u_1\neq 0$, lo que se hace es igualar a cero el numerador correspondiente, es decir, la ecuación de la recta es $y=a_2$ (ya que dicha recta es paralela al eje OX)

6.4. Ecuación general o implícita de la recta

$$\boxed{Ax+By+C=0 \text{ con } \left\{\begin{array}{l} A=u_2 \\ B=-u_2 \\ C=u_1a_2-u_2a_1 \end{array}\right.}$$

En este caso el vector director es $\vec{u}=(-B,A)$

6.5. Ecuación explícita de la recta

$$\boxed{y = mx + n \ \text{ donde } \begin{cases} m = \dfrac{u_2}{u_1} = \text{ pendiente de la recta} \\ n = \text{ ordenada en el origen} \end{cases}}$$

6.6. Ecuación punto-pendiente de la recta

La recta que pasa por (x_0, y_0) con pendiente m es: $\boxed{y - y_0 = m(x - x_0)}$

6.7. Ecuación segmentaria de la recta

Corte de una recta con el eje OX

Se hace $y = 0$ y se tiene en cuenta, por ejemplo, la ecuación explícita de la recta, igualando ambas igualdades.

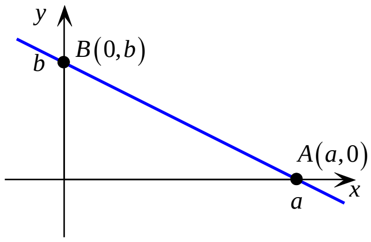
Corte de una recta con el eje OY

Se hace $x = 0$ y se tiene en cuenta, por ejemplo, la ecuación explícita de la recta, igualando ambas igualdades.

Ecuación segmentaria

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \ \text{ donde } \begin{cases} A(a,0) & \text{es el punto de corte con el eje OX} \\ B(0,b) & \text{es el punto de corte con el eje OY} \end{cases}}$$

Dicha ecuación recibe su nombre del hecho de que se obtiene en función de los segmentos *a* y *b*.



Ejercicios:

22. *Determina todas las ecuaciones de la recta que pasa por el punto* $A(1,2)$ *y lleva la dirección del vector* $\vec{v} = (3,4)$.

23. *Calcula las ecuaciones de las rectas de los lados del triángulo de vértices* $A(1,2)$, $B(-3,4)$ *y* $C(0,-3)$.

24. *Determina todas las ecuaciones de las rectas:*

a) $r \equiv 2x + 3y - 5 = 0$

b) $s \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - 3\lambda \end{cases}$

c) $t \equiv \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-1}{2}$

25. *Dados* $A(1,1), B(2,-1)$ y $C(3,2)$, *comprueba que no están alineados y determina las ecuaciones de las tres rectas que forman.*

26. *Dados* $A(2,-2), B(1,2)$ y $C(0,3)$, *calcula las coordenadas de un cuarto punto* D, *de forma que* $ABCD$ *sea un paralelogramo.*

27. *Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto* $(-2,0)$ *y por la intersección de las rectas* $\begin{cases} r \equiv x+y-2=0 \\ s \equiv x-y+2=0 \end{cases}$.

7. VECTORES PERPENDICULARES U ORTOGONALES. VECTOR NORMAL

Vectores perpendiculares u ortogonales

Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares u ortogonales, y escribiremos $\vec{u} \perp \vec{v}$, si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Si $\vec{u} = (u_1, u_2)$, entonces $\vec{v} = (-u_2, u_1)$ es perpendicular a $\vec{u}$.

Vector normal a la recta que pasa por A ***con vector director*** $\vec{u}$

Se llama así a cualquier vector $\vec{n}$ que sea ortogonal a $\vec{u}$.

Se suele tomar como vector normal a la recta que pasa por A con vector director $\vec{u} = (u_1, u_2)$, el vector:

$$\boxed{\vec{n} = (-u_2, u_1)}$$

Ejercicio:

28. *De las siguientes parejas de vectores, di cuáles de ellas son ortogonales:*

a) $\vec{u} = (1,2)$, $\vec{v} = (0,1)$ *c)* $\vec{u} = (3,1)$, $\vec{v} = (0,0)$

b) $\vec{u} = (2,4)$, $\vec{v} = (-2,1)$ *d)* $\vec{u} = (\sqrt{2},1)$, $\vec{v} = (3,-5)$

29. *Dado el triángulo de vértices* $A(-1,-1)$, $B(5,-1)$ y $C(0,4)$, *se pide:*

a) Ecuaciones de las medianas[4]*, y como intersección de ellas calcula el baricentro.*
b) Ecuaciones de las tres alturas[5]*, y como intersección de ellas calcula el ortocentro.*
c) Ecuaciones de las tres mediatrices[6] *de los lados, y como intersección de ellas el circuncentro.*
d) Perímetro de dicho triángulo.

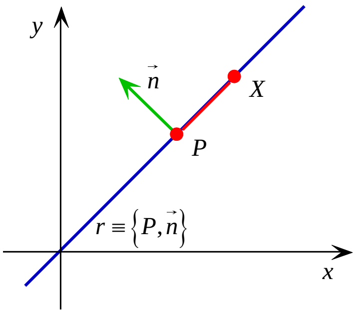
[4] *Mediana*: recta que une un vértice del triángulo con el punto medio del lado opuesto.
[5] *Altura*: recta perpendicular a un lado que pasa por el vértice opuesto a dicho lado.
[6] *Mediatriz*: recta perpendicular a un lado que pasa por su punto medio.

8. OTRAS ECUACIONES DE LA RECTA

8.1. Ecuación normal de la recta

La ecuación de la recta que pasa por el punto P con vector normal $\vec{n}$ es:

$$\boxed{\overrightarrow{PX}\cdot\vec{n}=0}$$



En coordenadas:

$$X(x,y),\ P(p_1,p_2),\ \vec{n}=(A,B)$$

$$\boxed{A(x-a_1)+B(y-a_2)=0}$$

Ejercicio:

30. *Determina la ecuación normal de la recta que pasa por el punto $A(1,2)$ y lleva la dirección del vector $\vec{v}=(3,4)$.*

8.2. Ecuación normal canónica de la recta

Si en la ecuación anterior hacemos que el vector normal sea unitario, obtenemos la *ecuación normal canónica*, cuya ecuación es:

$$\boxed{\overrightarrow{PX}\cdot\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}=0}$$

Ejercicio:

31. *Determina la ecuación normal canónica de la recta que pasa por el punto $A(-2,3)$ y lleva la dirección del vector $\vec{v}=(-1,2)$.*

9. POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS

Recordemos que:

- Dos rectas son secantes si solo tienen un punto en común.
- Dos rectas son paralelas si no tienen ningún punto en común.
- Dos rectas son coincidentes si tienen todos los puntos comunes.

	Forma explícita $r\equiv y=mx+n$ $s\equiv y=m'x+n'$	Forma implícita $r\equiv Ax+By+C=0$ $s\equiv A'x+B'y+C'=0$
r y s secantes	$m\neq m'$	$\frac{A}{A'}\neq\frac{B}{B'}$
r y s paralelas	$m=m'$ y $n\neq n'$	$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}\neq\frac{C}{C'}$
r y s coincidentes	$m=m'$ y $n=n'$	$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}$

Ejercicios:

32. *Estudia la posición relativa de los siguientes pares de rectas:*

a) $\begin{cases} r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda + 4 \end{cases} \\ s \equiv y = -x + 4 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} r \equiv \dfrac{x}{-1} = \dfrac{y}{1} \\ s \equiv \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 2\lambda \end{cases} \end{cases}$

33. *Determina M de forma que la recta* $r \equiv Mx + 2y + 3 = 0$*:*

a) *Contenga al punto* $(4,-5)$

b) *Sea paralela a* $s \equiv 5x + 3y = 0$

c) *Sea perpendicular a* $t \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2 - 3\lambda \end{cases}$

d) *Corte al eje X en el punto* $(3,0)$

34. *Determina M y N de forma que las rectas* $\begin{cases} r \equiv Mx + 5y - 4 = 0 \\ s \equiv 2x + Ny + 1 = 0 \end{cases}$*:*

a) *Se corten en el punto* $(1,1)$.

b) *Sean paralelas.*

c) *Sean perpendiculares.*

d) *Sean paralelas y r contenga al punto* $(1,2)$.

e) *Sean perpendiculares y* s *contenga al punto* $(2,1)$.

35. *Comprueba si forman triángulo las rectas* $r \equiv 2x + y + 1 = 0$, $s \equiv x + 2y = 0$ *y* $t \equiv y + 1 = 0$. *En caso afirmativo, calcula sus vértices.*

36. *Expresa la recta* $r \equiv 3x - 7y - 14 = 0$ *de todas las formas posibles y halla la ecuación de una paralela a ella que pase por el punto* $P(0,0)$.

37. *Determina los coeficientes* A y B *de las rectas* $\begin{cases} r \equiv 3x - Ay = 2 \\ s \equiv Bx + 4y = 5 \end{cases}$ *sabiendo que son paralelas y que la primera de ellas pasa por el punto* $(2,-2)$.

38. *Del paralelogramo* $ABCD$ *se conocen los vértices* $B(1,0), D(2,4)$ *y los lados*

$$BC \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -1 + \lambda \end{cases} \text{ y } CD \equiv \frac{x-3}{-1} = y - 3.$$

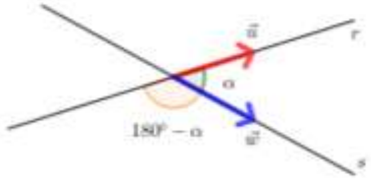
Determina los elementos que faltan.

39. *Del paralelogramo* $ABCD$ *se conocen el vértice* $A(1,1)$ *y los lados* $BC \equiv x + y = 10$ *y* $CD \equiv x - y = 10$. *Determina los restantes elementos de dicho paralelogramo.*

PROBLEMAS MÉTRICOS

10. ÁNGULO DE DOS RECTAS

Se llama ***ángulo formado por dos rectas secantes*** al menor de los ángulos que determinan dichas rectas al cortarse y, dicho ángulo coincide con el que forman los vectores directores de las rectas, en valor absoluto, ya que dos rectas al cortarse forman dos ángulos α y $180^{\circ} - \alpha$, que son complementarios y, por tanto, sus cosenos son opuestos: $\cos\alpha = -\cos(180^{\circ} - \alpha)$.



Así, si r es la recta de vector director $\vec{u}$ y s es la recta de vector director $\vec{w}$, se tiene que:

$$\cos\measuredangle(r,s) = \left|\cos\measuredangle(\vec{u},\vec{w})\right| = \frac{\left|\vec{u}\cdot\vec{w}\right|}{\left|\vec{u}\right|\;\left|\vec{w}\right|} \Rightarrow \boxed{\measuredangle(r,s) = \arccos\frac{\left|\vec{u}\cdot\vec{w}\right|}{\left|\vec{u}\right|\;\left|\vec{w}\right|} \in [0^{\circ}, 90^{\circ}]}$$

que podemos escribir en función de los coeficientes de las rectas:

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv Ax + By + C = 0 \\ s \equiv A'x + B'y + C' = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \cos\measuredangle(r,s) = \frac{\left|AA' + BB'\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}\sqrt{(A')^2 + (B')^2}}$$

Caracterizaciones de la perpendicularidad de dos rectas

$$r \perp s \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{w} \Leftrightarrow AA' + BB' = 0$$

$$m \cdot m' = -1 \Leftrightarrow m' = -\frac{1}{m}$$

Recuerda: si la recta nos la dan en forma general $r \equiv Ax + By + C = 0$, entonces $\vec{d} = (-B, A)$ es un vector director y $\vec{n} = (A, B)$ es un vector perpendicular a r (vector normal).

Ejercicio:

40. *Calcula los ángulos que forman las rectas del ejercicio 31.*

a) $\begin{cases} r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda + 4 \end{cases} \\ s \equiv y = -x + 4 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} r \equiv \dfrac{x}{-1} = \dfrac{y}{1} \\ s \equiv \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 2\lambda \end{cases} \end{cases}$

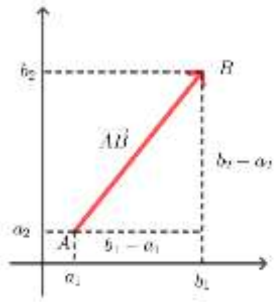
11. DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

Tenemos ya definido qué se entiende por plano vectorial euclídeo: es el conjunto V^2 de los vectores libres con el producto escalar que acabamos de definir.

Sabemos, por otra parte, que asociado al plano vectorial V^2 está el plano afín. Llamaremos <u>plano afín euclídeo</u> al plano afín asociado al plano vectorial euclídeo.

Para definir la estructura de <u>plano métrico</u> basta definir en el plano afín euclídeo el concepto de distancia entre dos puntos.

Sean $A(a_1,a_2)$ y $B(b_1,b_2)$ dos puntos cualesquiera del plano. Definimos la **<u>distancia</u>** entre ellos como el módulo del vector que determinan:



$$\left.\begin{array}{l} A(a_1,a_2) \\ B(b_1,b_2) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (b_1-a_1, b_2-a_2)$$

$$\boxed{d(A,B) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}}$$

Se pueden comprobar fácilmente las siguientes **<u>propiedades</u>** de la distancia así definida:

1) $d(A,B)=0 \Leftrightarrow A=B$
2) $d(A,B)=d(B,A)$
3) $d(A,C)\leq d(A,B)+d(B,C) \quad \forall B\in \overline{AC}$ (desigualdad triangular)

<u>Ejercicios:</u>

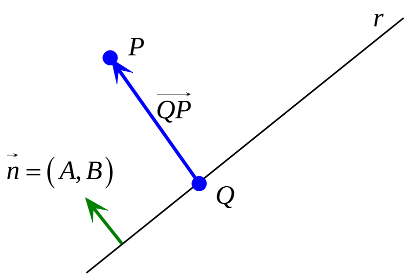
41. *Determina la distancia entre los puntos* $A(-4,4)$ y $B(2,-2)$*, el punto medio del segmento* AB *y el punto simétrico de* A *respecto de* B.

42. *Halla la distancia del punto* $P(3,-2)$ *al origen de coordenadas, y la distancia entre los puntos* P y $Q(-2,-3)$.

12. <u>DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA</u>

Se llama distancia del punto P a la recta r, al módulo del vector $\overrightarrow{QP}$, siendo Q el punto de intersección de r con la recta perpendicular a r que pasa por P.

$$\left.\begin{array}{l} r = \text{recta que pasa por } Q \text{ con vector director } \vec{u} \\ \vec{n} = \text{ vector normal a } r \\ P = \text{ punto del plano} \notin r \end{array}\right\} \Rightarrow d(P,r) = \frac{\left|\overrightarrow{QP}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{n}\right|}$$



$$\left.\begin{array}{l} r: Ax+By+C=0 \\ P(p_1,p_2) \end{array}\right\}$$

$$\boxed{d(P,r) = \frac{|Ap_1+Bp_2+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}}$$

Ejercicios:

43. *Halla la distancia del punto* $P(3,-2)$ *a las rectas:*

a) $-6x+8y-5=0$ *c)* $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{6}$

b) $\begin{cases} x=2-\lambda \\ y=2+2\lambda \end{cases}$ *d)* $y=\frac{4x-5}{3}$

44. *Calcula la distancia del origen de coordenadas a la recta que pasa por el punto* $A(-3,6)$ *y es paralela a la recta* $\frac{x-1}{-6}=\frac{y-2}{8}$.

13. DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS

Sean *r* y *s* dos rectas.

(1) Si r y s son ***secantes o coincidentes***, entonces:

$$\boxed{d(r,s)=0}$$

(2) Si las rectas son paralelas, se toma un punto de una de ellas y se calcula la distancia a la otra recta.

Sean r y s dos rectas ***paralelas***, y $\begin{matrix} r: Ax+By+C=0 \\ s: A'x+B'y+C'=0 \end{matrix}$ sus ecuaciones generales. Se tiene que:

$$\boxed{d(r,s)=\frac{|C'-C|}{\sqrt{A^2+B^2}}}$$

Observación: antes de calcular la distancia entre dos rectas es conveniente estudiar su posición relativa.

Ejercicio:

45. *Calcula la distancia entre los siguientes pares de rectas:*

a) $r\equiv y=\frac{-6x-4}{3}$ $s\equiv -4x+2y-1=0$

b) $r\equiv x+1=\frac{y-5}{2}$ $s\equiv y=\frac{4x-8}{2}$

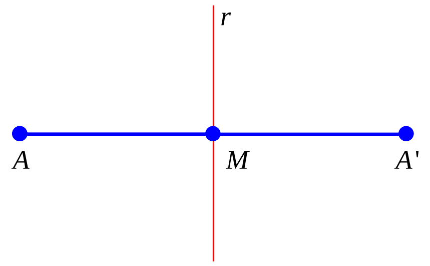
c) $r\equiv \begin{cases} x=2-\lambda \\ y=2+2\lambda \end{cases}$ $s\equiv y=\frac{4x-5}{3}$

14. SIMÉTRICO DE UN PUNTO RESPECTO DE UNA RECTA

Dos <u>puntos</u> A y A' <u>son simétricos respecto de la recta</u> r si ésta es la mediatriz del segmento que une A con B (es decir, la recta r es perpendicular al segmento $\overline{AB}$ que pasa por su punto medio).

Para calcular el simétrico, A', del punto A respecto de la recta r :

1) Hallamos el punto M de intersección de r con $\overline{AA'}$.
2) Tenemos en cuenta que
$$d(A,M) = d(A',M)$$



Ejercicios:

46. *Calcula el punto simétrico del punto* $P(3,-5)$ *respecto de la recta* $r \equiv 2x-4y-7=0$.

47. *Determina la recta paralela a* r *que pasa por el punto simétrico de* P *respecto de la recta* r.

a) $r \equiv 2x-3y+10=0$ $\qquad P(4,-7)$

b) $r \equiv \begin{cases} x=-2\lambda \\ y=2-\lambda \end{cases}$ $\qquad P(5,5)$

Ejercicios resueltos:

(1) Halla el área del paralelogramo cuyos lados no paralelos son los vectores $\vec{a}=4\vec{i}-3\vec{j}$ y $\vec{b}=2\vec{i}+3\vec{j}$.

Solución:

Por lo visto en el tema de trigonometría, sabemos que $A_{\text{paralelogramo}} = b\cdot h = |\vec{a}||\vec{b}| \operatorname{sen} \measuredangle\{\vec{a},\vec{b}\}$,donde

$$|\vec{a}| = \sqrt{4^2+(-3)^2} = \sqrt{25} = 5$$

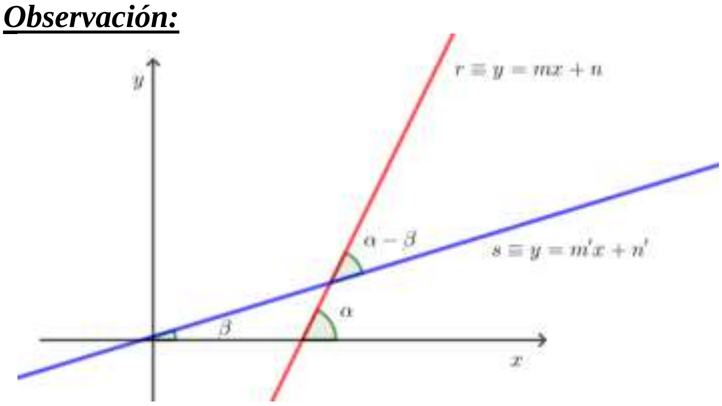
$$|\vec{b}| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$$

$$\alpha = \measuredangle\{\vec{a},\vec{b}\} = \arccos\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \arccos\frac{-1}{5\sqrt{13}} = 86^\circ\, 49'12,61''$$

Así,

$$A = 5\sqrt{13}\operatorname{sen} 86^\circ\, 49'12,61'' = 18 \text{ u}^2$$

Observación:



Como $m = \operatorname{tg}\alpha$ y $m' = \operatorname{tg}\beta$, se tiene que

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = \frac{m-m'}{1+mm'}$$

y como el ángulo que forman dos rectas se considera que es agudo, resulta que:

$$\operatorname{tg}(\theta) = \left|\frac{m-m'}{1+mm'}\right|$$

donde $\theta = \alpha-\beta$ es el ángulo que forman las rectas r y s.

(2) Halla la ecuación de la recta que contiene al punto $P(2,4)$ y forma un ángulo de 45º con la recta $r \equiv 2x+5y-3=0$.

Solución:

La pendiente de la recta r es $m=\frac{-2}{5}$ y, por tanto,

$$1=\operatorname{tg}45^\circ=\left|\frac{-\frac{2}{5}-m'}{1-\frac{2}{5}m'}\right|=\left|\frac{-2-5m'}{5-2m'}\right|$$

y así,

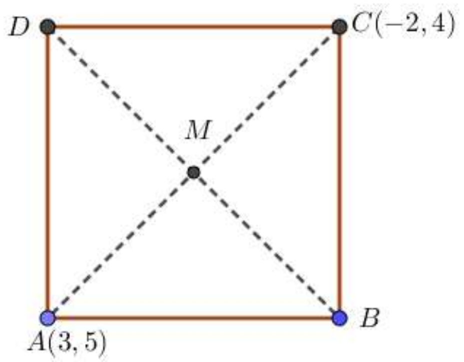
$$\begin{cases}1=\dfrac{-2-5m'}{5-2m'}\Rightarrow 5-2m'=-2-5m'\Rightarrow m'=\dfrac{7}{3}\\ -1=\dfrac{-2-5m'}{5-2m'}\Rightarrow -5+2m'=-2-5m'\Rightarrow m'=\dfrac{3}{7}\end{cases}$$

Es decir, hay dos soluciones:

$$\begin{cases}s\equiv y-4=-\dfrac{7}{3}(x-2)\\ t\equiv y-4=\dfrac{3}{7}(x-2)\end{cases}$$

(3) Dos vértices opuestos de un cuadrado son los puntos $A(3,5)$ y $B(-2,4)$. Calcular, analíticamente, los otros dos vértices.

Solución:



Los lados AB y AD están sobre rectas que contienen al punto A, y forman un ángulo de 45º con AC.
Por otra parte, la pendiente de AC es:

$$m=\frac{4-5}{-2-3}=\frac{1}{5}$$

y ambas pendientes verifican:

$$1=\operatorname{tg}45^\circ=\left|\frac{\frac{1}{5}-m'}{1+\frac{1}{5}m'}\right|=\left|\frac{1-5m'}{5+m'}\right|$$

Así,

$$\begin{cases}1=\dfrac{1-5m'}{5+m'}\Rightarrow m'=-\dfrac{2}{3}\Rightarrow AB\equiv y-5=-\dfrac{2}{3}(x-3)\\ -1=\dfrac{1-5m'}{5+m'}\Rightarrow m'=\dfrac{3}{2}\Rightarrow AD\equiv y-5=\dfrac{3}{2}(x-3)\end{cases}$$

Además, $d(A,C)=d(B,D)$, por lo que B y D están en la mediatriz de AC:

Pendiente de la mediatriz del lado $AC: m''=\dfrac{-1}{\frac{1}{5}}=-5$

Punto medio de AC: $M\left(\frac{3-2}{2},\frac{5+4}{2}\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{9}{2}\right)$

Ecuación de la mediatriz: $y-\frac{9}{2}=-5\left(x-\frac{1}{2}\right)$

Resolviendo los sistemas correspondientes, calculamos B y D:

$$B\begin{cases} y-5=-\frac{2}{3}(x-3) \\ y-\frac{9}{2}=-5\left(x-\frac{1}{2}\right) \end{cases}\Rightarrow B(0,7)$$

$$C\begin{cases} y-5=\frac{3}{2}(x-3) \\ y-\frac{9}{2}=-5\left(x-\frac{1}{2}\right) \end{cases}\Rightarrow D(1,2)$$

Ejercicios de repaso:

48. *Dado el triángulo de vértices* $A(3,2), B(2,-3)$ y $C(-1,5)$.

a) *Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto A y es paralela al lado BC.*
b) *Halla la ecuación de la recta que contiene la mediana que pasa por el vértice A.*
c) *Halla la ecuación de la recta que contiene a la altura que pasa por A.*
d) *Halla la ecuación de la recta que contiene a la mediatriz del lado BC.*

49. *Dados los puntos* $A(-1,0)$ y $B(3,-4)$, *el segmento AB es el diámetro de una circunferencia. Calcula el centro y el radio.*

50. *Halla las coordenadas de un punto P, interior al segmento $\overline{AB}$ y que está a una distancia 3 veces mayor de $A(-3,2)$ que de $B(5,-2)$.*

51. *Halla la superficie (área) comprendida entre los ejes de coordenadas y la recta de ecuación:*

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$$

52. *Dados los puntos* $A(-5,-3)$, $B(-2,1)$ y $C(3,4)$:

a) *Halla el cuarto vértice D para que formen un paralelogramo.*
b) *Halla la ecuación de la recta que contiene al lado AB.*
c) *Halla la ecuación de la recta que contiene a la diagonal AC.*

53. *Un rombo tiene dos vértices opuestos en los puntos* $B(3,2)$ y $D(5,4)$. *El vértice A se encuentra en el eje OX. Determina los vértices A y C.*

54. *Calcula el área del triángulo de vértices* $A(-6,-1)$, $B(3,2)$ y $C(-2,5)$.

55. *Dos rectas de ecuaciones* $r \equiv ax - y = 4$ y $s \equiv x - y = -b$ *son perpendiculares entre sí y cortan al eje de abscisas en dos puntos que distan 5 unidades. Calcula* a y b.

56. *Dos puntos* $A(-2,-4)$ y $B(4,-4)$ *son vértices de un triángulo isósceles, que tiene el tercer vértice,* C*, en la recta* $r \equiv 2x + y - 15 = 0$. *Calcula las coordenadas de* C *sabiendo que* CA y CB *son los lados iguales. Calcula además el área del triángulo.*

Esquema de la unidad