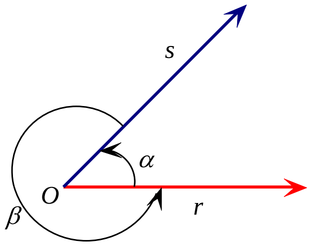
UNIDAD 4:
TRIGONOMETRÍA

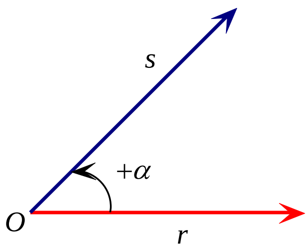
1. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

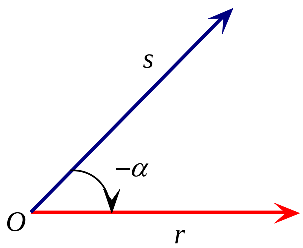
La palabra tri-gono-metría significa «medida de las figuras con tres esquinas», es decir, de los triángulos. La trigonometría estudia las relaciones entre las longitudes de los lados de un triángulo y las medidas de sus ángulos. Por ello, las razones trigonométricas se definieron originariamente mediante triángulos rectángulos. No obstante, interesa definirlas usando la circunferencia unidad, es decir, en la llamada ***circunferencia goniométrica***.

Ángulos en el plano y criterio de orientación

Dos semirrectas r y s, con origen común O, dividen el plano en dos regiones, cada una de las cuales determina un ángulo.





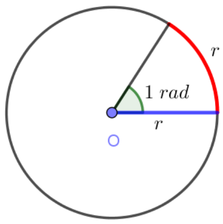


Unidades para medir ángulos

Las unidades más utilizadas para medir ángulos son:

º = grado sexagesimal (un grado sexagesimal es la medida del ángulo central correspondiente a una de las 360 partes en que se divide una circunferencia)

rad = radián (un radián es la medida del ángulo central que subtiende un arco igual al radio)

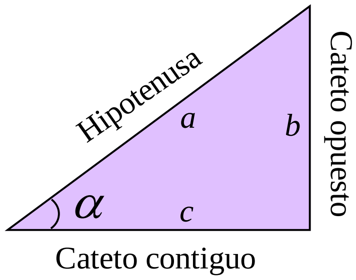


Para convertir grados sexagesimales en radianes, y viceversa, basta tener en cuenta la siguiente relación:

$$\boxed{180^\circ = \pi \text{ rad}}$$

Hay una tercera unidad de medida, que se utiliza en topografía y en ingeniería civil, que es el grado centesimal o gon: el valor de un grado centesimal se define como el ángulo central subtendido por un arco, cuya longitud es la cuadringentésima (1/400) parte de una circunferencia. La equivalencia con los grados sexagesimales es: $360^\circ = 400^g$.

En un **triángulo rectángulo**, las *razones trigonométricas* de un ángulo agudo α son las distintas razones (cocientes) que hay entre los lados.



Razones trigonométricas fundamentales:

$$\text{seno: sen } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

$$\text{coseno: } \cos\alpha = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

Otras razones trigonométricas:

$$\text{tangente: tg } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{b}{c} = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\text{cosecante: cosec } \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{a}{b} = \frac{1}{\text{sen } \alpha}$$

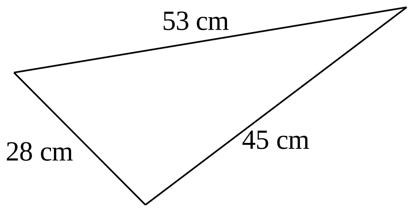
$$\text{secante: } \sec\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{a}{c} = \frac{1}{\cos\alpha}$$

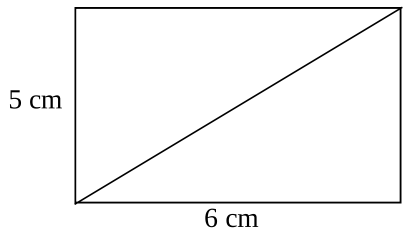
$$\text{cotangente: cotg } \alpha = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{c}{b} = \frac{1}{\text{tg}\alpha}$$

Ejercicios:

1. Expresa los siguientes ángulos en:
a) Radianes: 315º, 300º, 135º, 2 210º
b) Grados sexagesimales: $\frac{\pi}{6}$ rad , $\frac{9\pi}{5}$ rad , 5π rad

2. Calcula las razones trigonométricas de los ángulos agudos de las siguientes figuras:





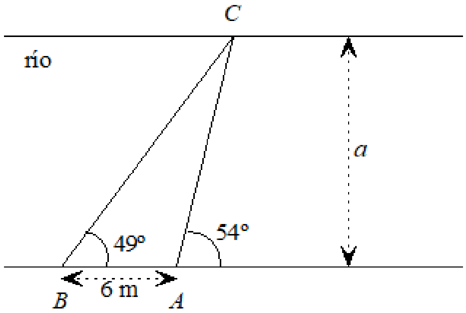
3. Calcula la altura y el área de un triángulo equilátero de lado 6 cm, sin utilizar el teorema de Pitágoras.

4. Si la altura de un triángulo equilátero mide 5,196 cm; calcula cuánto mide el lado del triángulo, sin utilizar el teorema de Pitágoras.

5. Calcula la longitud de las diagonales de un rombo sabiendo que sus ángulos son 60º y 120º, y que sus lados miden 6 cm.

6. En un terreno horizontal se divisa una torre desde un punto A bajo un ángulo de 30º. Si nos aproximamos 20 m se llega a un punto B, desde el que observamos la torre bajo un ángulo de 45º. Calcula la altura de la torre.

7. Para medir la distancia entre los márgenes de un río un topógrafo se coloca en un punto A de uno de ellos y, fijándose en un árbol C que está al otro lado mide el ángulo que forma su visual respecto a la dirección del río. Este ángulo es de 54º. A continuación, se aleja 6 m y se coloca en un punto B. El ángulo ahora es de 49º. ¿Cuánto mide el río de ancho?



2. RELACIONES ENTRE RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Como es habitual, usaremos la siguiente notación: $\operatorname{sen}^2\alpha = (\operatorname{sen}\alpha)^2$

$$\boxed{\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

Relación fundamental (teorema de Pitágoras)

$: \operatorname{sen}^2\alpha$ $\quad$ $: \cos^2\alpha$

$$\boxed{1 + \operatorname{cotg}^2\alpha = \operatorname{cosec}^2\alpha} \qquad \boxed{1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha}$$

Ejercicio:

8. Calcula las razones trigonométricas directas (seno, coseno y tangente) del ángulo si:

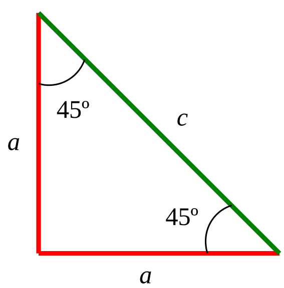
a) $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{1}{4}$ $\qquad$ c) $\cos\alpha = \dfrac{2}{3}$

b) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{5}{2}$ $\qquad$ d) $\operatorname{sen}\alpha = 0,2$

3. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ALGUNOS ÁNGULOS

Un bonito y, a la vez, interesante ejercicio, es calcular las razones trigonométricas de los siguientes ángulos: 30º, 45º y 60 º (te recomiendo que tapes lo que sigue a continuación y lo pienses).

Razones trigonométricas de 45º:



Consideremos un triángulo rectángulo isósceles. Aplicando el teorema de Pitágoras

$$c^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$

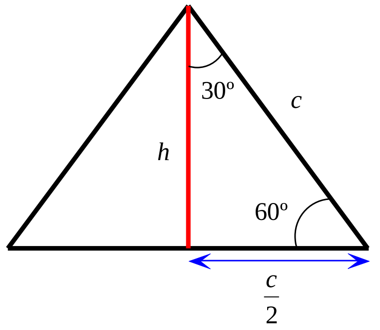
de donde, $c = \sqrt{2}a$.

Así:

$$\operatorname{sen} 45^\circ = \frac{a}{c} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{a}{c} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Razones trigonométricas de 30º y 60º:



Consideremos un triángulo equilátero y apliquemos el teorema de Pitágoras a uno de los dos triángulos rectángulos que se obtienen al trazar una altura:

$$c^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + h^2 \Rightarrow h = \sqrt{c^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3c^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}c$$

Así:

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{\frac{c}{2}}{c} = \frac{1}{2} \qquad \operatorname{sen} 60^\circ = \frac{h}{c} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}c}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{h}{c} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}c}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60^\circ = \frac{\frac{c}{2}}{c} = \frac{1}{2}$$

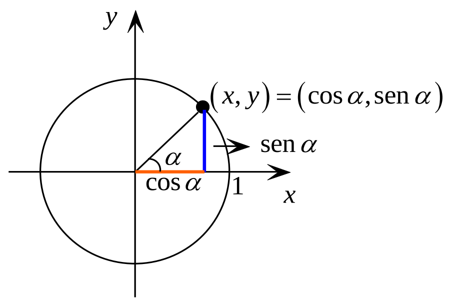
Una forma fácil de recordar los valores de las razones trigonométricas anteriores es la siguiente:

	0º	30º	45º	60º	90º
sen	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$

	0º	30º	45º	60º	90º
sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

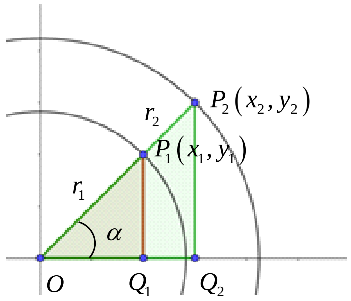
4. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO CUALQUIERA

En un sistema de ejes coordenados consideremos una circunferencia de radio unidad y un ángulo α que tenga uno de sus lados sobre el eje *OX*. Entonces, a dicho ángulo α se le puede asociar de manera única un punto, sobre la circunferencia, de coordenadas (x, y) de manera que $(x, y) = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$



La circunferencia anterior se llama **circunferencia goniométrica**.

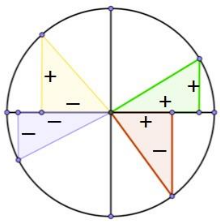
Veamos que ***las razones trigonométricas fundamentales (y como consecuencia las demás) solo dependen de la medida del ángulo*** α y no del radio de la circunferencia utilizada para definirlas.



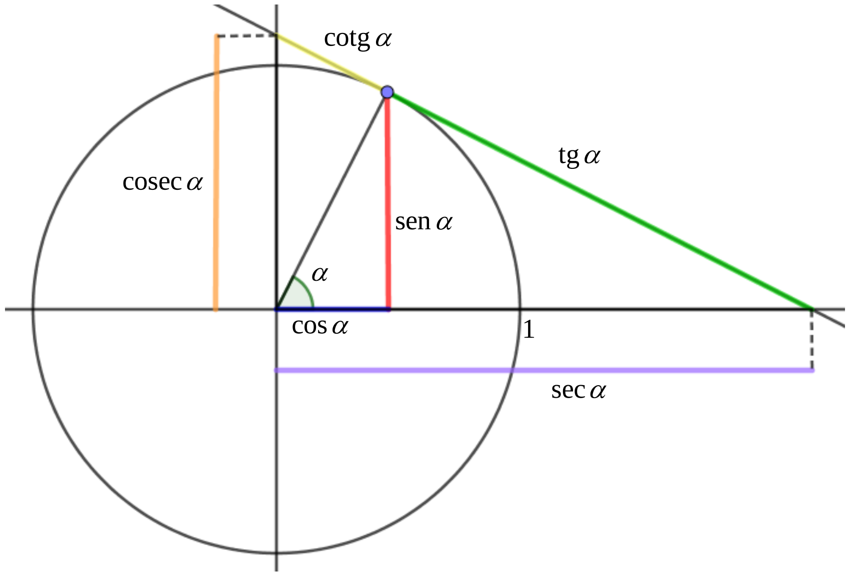
En efecto, si consideramos la circunferencia de centro O y radio r_1, el punto asociado al ángulo α es $P_1(x_1, y_1)$, y si trazamos otra circunferencia de centro O y radio r_2, el punto asociado al ángulo α es $P_2(x_2, y_2)$. Ahora bien, como los triángulos OQ_1P_1 y OQ_2P_2 tienen los tres ángulos iguales, resulta que son semejantes y, por tanto, sus lados son proporcionales. Esto es:

$$\frac{y_1}{r_1} = \frac{y_2}{r_2} = \operatorname{sen}\alpha \qquad \text{y} \qquad \frac{x_1}{r_1} = \frac{x_2}{r_2} = \cos\alpha$$

Dependiendo del cuadrante en el que se encuentre el ángulo, los **signos** de las razones trigonométricas fundamentales son:



La **interpretación geométrica de todas las razones trigonométricas** es la siguiente:

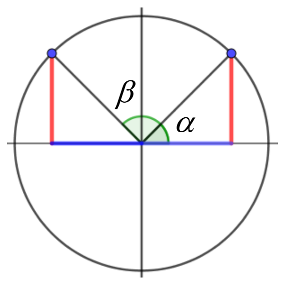


Reducción de ángulos al primer cuadrante

Sea α el ángulo del primer cuadrante relacionado, en cada caso, con el ángulo β.

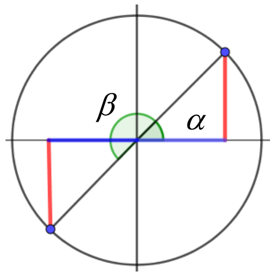
- Si β es un ángulo del segundo cuadrante, se tiene que $\alpha + \beta = 180^\text{o}$ y, por tanto:

  $$\operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}\alpha \qquad \cos\beta = -\cos\alpha$$



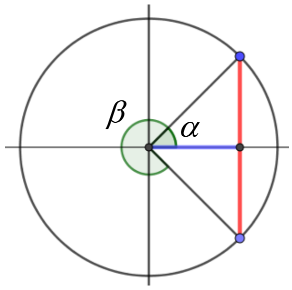
- Si β es un ángulo del tercer cuadrante, se tiene que $\beta = 180^{\circ} + \alpha$ y, por tanto:

$$\operatorname{sen}\beta = -\operatorname{sen}\alpha \qquad \cos\beta = -\cos\alpha$$



- Si β es un ángulo del cuarto cuadrante, se tiene que $\alpha + \beta = 360^{\circ}$ y, por tanto:

$$\operatorname{sen}\beta = -\operatorname{sen}\alpha \qquad \cos\beta = \cos\alpha$$



<u>Ejemplos:</u>

(1) Si $\beta = 160^{\circ}$ (ángulo del segundo cuadrante), se tiene que $180^{\circ} - 160^{\circ} = 20^{\circ} = \alpha$ y, por tanto,
$$\begin{cases} \operatorname{sen}160^{\circ} = \operatorname{sen}20^{\circ} \\ \cos 160^{\circ} = -\cos 20^{\circ} \end{cases}$$

(2) Si $\beta = 200^{\circ}$ (ángulo del tercer cuadrante), se tiene que $200^{\circ} = 180^{\circ} + \alpha \Rightarrow \alpha = 20^{\circ}$ y, por tanto,
$$\begin{cases} \operatorname{sen}200^{\circ} = -\operatorname{sen}20^{\circ} \\ \cos 200^{\circ} = -\cos 20^{\circ} \end{cases}$$

(3) Si $\beta = 330^{\circ}$ (ángulo del segundo cuadrante), se tiene que $360^{\circ} - 330^{\circ} = 30^{\circ} = \alpha$ y, por tanto,
$$\begin{cases} \operatorname{sen}330^{\circ} = -\operatorname{sen}30^{\circ} \\ \cos 330^{\circ} = \cos 30^{\circ} \end{cases}$$

Ángulos mayores de 360º

Si α es un ángulo mayor de 360º, entonces α y λ, donde $\lambda \in [0^{\circ}, 360^{\circ}]$ es el resto de dividir α entre 360º, tienen las mismas razones trigonométricas.

<u>Ejemplo:</u>

Vamos a expresar las razones trigonométricas del ángulo de 3 335º en función de un ángulo del primer cuadrante:

$$\begin{array}{r|l} 3\,335^{\circ} & 360^{\circ} \\ \hline 95^{\circ} & 9 \end{array} \Rightarrow 3\,335^{\circ} = 360^{\circ} \cdot 9 + 95^{\circ}$$

$$\begin{cases} \operatorname{sen}3335^{\circ} = \operatorname{sen}95^{\circ} = \operatorname{sen}85^{\circ} \\ \cos 3335^{\circ} = \cos 95^{\circ} = -\cos 85^{\circ} \end{cases}$$

<u>Ejercicios:</u>

9. Indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) El seno de un ángulo puede ser mayor que uno.
b) El seno de un ángulo puede ser negativo.
c) La tangente de un ángulo puede ser mayor que uno.
d) La tangente de un ángulo puede ser cero.

e) La secante de un ángulo puede ser negativa.
f) La secante de un ángulo puede ser cero.

10. Expresa las razones trigonométricas de los siguientes ángulos en función de ángulos del primer cuadrante:

a) 135º b) 245º c) 345º
d) 405º e) 845º f) 1 247º

11. Averigua las restantes razones trigonométricas del ángulo α sabiendo:

a) $\operatorname{sen}\alpha = \frac{2}{9}$ y $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ b) $\operatorname{cotg}\alpha = -5$ y $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

12. Razona si existe algún ángulo para el que se verifique:

a) $\operatorname{sen}\alpha = 0{,}3$ y $\cos\alpha = 0{,}8$
b) $\operatorname{sen}\alpha = 0{,}72$ y $\operatorname{tg}\alpha = 1{,}04$

Se tienen, además las siguientes **propiedades**:

a) $-1 \le \operatorname{sen}\alpha \le 1$ o equivalentemente $|\operatorname{sen}\alpha| \le 1$

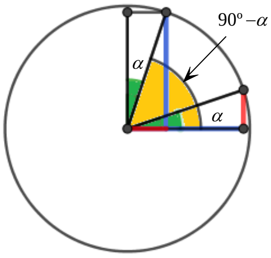
b) $-1 \le \cos\alpha \le 1$ o equivalentemente $|\cos\alpha| \le 1$

c) $\operatorname{tg}\alpha \in \mathbb{R} - \{\alpha : \cos\alpha = 0\} = \mathbb{R} - \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2} \text{ con } k \in \mathbb{Z} \right\}$

5. RELACIÓN ENTRE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS DE DIFERENTES CUADRANTES

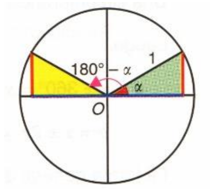
(i) Ángulos complementarios: α **y** $90^\circ - \alpha$

$$\boxed{\begin{array}{l} \operatorname{sen}(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha \\ \cos(90^\circ - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha \end{array}}$$



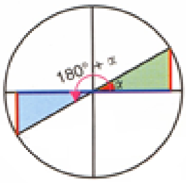
(ii) Ángulos suplementarios: α **y** $180^\circ - \alpha$

$$\boxed{\begin{array}{l} \operatorname{sen}(180^\circ - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha \\ \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha \end{array}}$$



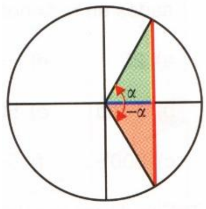
(iii) Ángulos que difieren en 180º: α **y** $180^\circ + \alpha$

$$\boxed{\begin{array}{l} \operatorname{sen}(180^\circ + \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha \\ \cos(180^\circ + \alpha) = -\cos\alpha \end{array}}$$



(iv) **<u>Ángulos opuestos</u>** α **<u>y</u>** $-\alpha$ **<u>o que suman 360º:</u>** α **<u>y</u>** $360^{\circ}-\alpha$

$$\boxed{\begin{array}{l} \operatorname{sen}\,(-\alpha)=\operatorname{sen}\,(360^{\circ}-\alpha)=-\operatorname{sen}\,\alpha \\ \cos\,(-\alpha)=\cos\,(360^{\circ}-\alpha)=\cos\alpha \end{array}}$$



<u>Ejercicios:</u>

13. Calcula $\operatorname{sen}150^{\circ}$, $\cos 240^{\circ}$, $\operatorname{tg}330^{\circ}$, $\operatorname{sen}\dfrac{2\pi}{3}$ y $\cos\dfrac{4\pi}{3}$.

14. Calcula las razones trigonométricas de los siguientes ángulos:

a) 120º	c) 210º	e) 300º
b) 135º	d) 225º	f) –45º

<u>6. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE LA SUMA, LA DIFERENCIA, DEL ÁNGULO DOBLE Y DEL ÁNGULO MITAD</u>

(i) **Razones trigonométricas de la suma y diferencia de ángulos**

$$\boxed{\begin{array}{l} \operatorname{sen}\,(\alpha\pm\beta)=\operatorname{sen}\,\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\,\operatorname{sen}\,\beta \\ \cos\,(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\operatorname{sen}\,\alpha\,\operatorname{sen}\,\beta \\ \operatorname{tg}\,(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\,\alpha\pm\operatorname{tg}\,\beta}{1\mp\operatorname{tg}\,\alpha\,\operatorname{tg}\,\beta} \end{array}}$$

(ii) **Razones trigonométricas del ángulo doble**

$$\boxed{\begin{array}{ll} \operatorname{sen}\,(2\alpha)=2\,\operatorname{sen}\,\alpha\cos\alpha & \\ \cos\,(2\alpha)=\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha & \operatorname{tg}\,(2\alpha)=\dfrac{2\,\operatorname{tg}\,\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} \end{array}}$$

(iii) **Razones trigonométricas del ángulo mitad**

$$\boxed{\begin{array}{ll} \operatorname{sen}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}} & \\ \cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}} & \operatorname{tg}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \end{array}}$$

El signo + o – depende del cuadrante en el que se sitúe $\dfrac{\alpha}{2}$.

<u>Ejercicios:</u>

15. Demuestra:

a) $\dfrac{\operatorname{sen}x+\cos x}{\cos x}=\operatorname{sen}x\cdot\sec x+1$

b) $\dfrac{\operatorname{sen} x+\operatorname{cotg} x}{\operatorname{tg} x+\operatorname{cosec} x}=\cos x$

c) $\cos\alpha\cos(\alpha+\beta)+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\cos\beta$

d) $\operatorname{sen}3x=3\operatorname{sen}x\cos^2 x-\operatorname{sen}^3 x$

16. Simplifica:

a) $\dfrac{\operatorname{sen}(\pi+x)\cdot\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)-\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)}{-\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)\cdot\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)}$

f) $\dfrac{\operatorname{cosec}^2\alpha-\operatorname{cosec}\alpha}{\operatorname{cotg}^2\alpha}$

b) $\dfrac{\left(1-\operatorname{sen}^2 x\right)^2}{\cos^2 x\cdot\left(1-\operatorname{cosec}^2 x\right)}$

g) $\dfrac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{1-\cos^2\alpha}$

c) $1+\operatorname{cotg}^2\alpha$

h) $\dfrac{\cos^4\alpha-\operatorname{sen}^4\alpha}{\cos(2\alpha)}$

d) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}+\dfrac{1+\cos x}{\operatorname{sen} x}$

i) $\dfrac{1+\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{cosec}^2\alpha}$

e) $\sec\alpha-\sec\alpha\cdot\sec^2\alpha$

j) $\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\operatorname{tg}(\pi+\alpha)}{\operatorname{sen}(-\alpha)}$

17. Expresa en función de $\operatorname{tg} x$:

a) $\operatorname{tg}(2\pi+x)$

b) $\operatorname{tg}(3\pi+x)$

c) $\operatorname{tg}(2\pi-x)$

d) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)$

18. ¿Cuáles de las siguientes igualdades son ciertas?

a) $\operatorname{tg}(\pi+x)=-\operatorname{tg} x$

c) $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\operatorname{sen} x$

b) $\cos(2\pi-x)=\cos x$

d) $\cos(x+2\pi)=-\cos x$

19. En un tramo de carretera la inclinación es de 6°. Si ascendemos 45 m más de altura, ¿cuánto hemos avanzado sobre la carretera?
(Sol.: 430,50 m)

20. Calcula los ángulos que forma una diagonal con los lados de un rectángulo de 110 m de base y 60 m de altura.
(Sol.: 28º 36’ 37,65’’ y 61º 23’ 22,35’’)

21. Calcula los ángulos de un trapecio isósceles cuyas bases miden 83 y 51 m y la altura, 60m.
(Sol.: 75º 4’ 6,9’’ y 104º 55’ 53,1’’)

22. Calcula el perímetro de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de 30 cm de diámetro.

(Sol.: 88,20 cm)

23. Si las puntas de un compás distan 8 cm y cada rama mide15cm, ¿qué ángulo forman éstas?
(Sol.: 30º 55’ 55,27’’)

24. Una escalera de 35 m está apoyada sobre una pared formando con la horizontal un ángulo de 50º. ¿A qué distancia de la pared está colocada la escalera? ¿A qué altura del suelo se encuentra el extremo superior de la escalera?
(Sol.: 22,50 m y 26,81 m)

7. ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Una **ecuación trigonométrica** es una ecuación en la que aparecen una o varias razones trigonométricas.

Para resolverlas hay que expresar dicha ecuación en función de un mismo ángulo y de una sola razón trigonométrica, o factorizarla. Para ello se usarán las fórmulas vistas en los apartados anteriores.

En este tipo de ecuaciones **siempre hay que comprobar** que los valores obtenidos verifican la ecuación original, es decir, son solución.

Ejercicios:

25. Calcula, razonadamente, todas las soluciones de las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\cos x = -\dfrac{1}{2}$

b) $2\operatorname{sen} x = \sqrt{3}$

c) $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(-30^{\circ})$

d) $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{4}$

e) $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(3\pi)$

f) $\cos x = \cos 25^{\circ}$

g) $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 40^{\circ}$

h) $\operatorname{sen}(2x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

i) $\operatorname{tg}\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

j) $\operatorname{cosec} x = -2$

26. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\operatorname{tg} \alpha = 2\operatorname{sen} \alpha$

b) $\cos(2\alpha) = \cos\alpha$

c) $\operatorname{sen}(3\alpha) = 2\operatorname{sen}\alpha$

d) $\operatorname{sen}\alpha = \cos\alpha$

e) $\cos(2\alpha) = 1 + 4\operatorname{sen} x$

f) $\operatorname{sen} x + \cos x = 1$

g) $\operatorname{sen}(2\alpha) = \operatorname{sen}\alpha$

h) $\cos^2 x - 3\cos x + 2 = 0$

i) $4\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(2\alpha)$

j) $\operatorname{sen}\alpha = \cos 40^{\circ}$

k) $\operatorname{tg} x \cdot \sec x = \sqrt{2}$

l) $\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x = \dfrac{1}{2}$

8. TRANSFORMACIONES

$$\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta=2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\beta=2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(\alpha+\beta)+\operatorname{sen}(\alpha-\beta)\right]$$

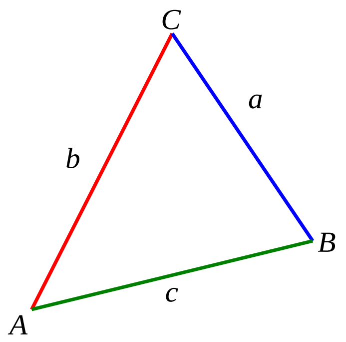
$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(\alpha+\beta)-\operatorname{sen}(\alpha-\beta)\right]$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]$$

$$\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta=-\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\right]$$

9. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

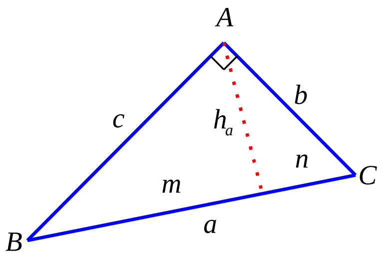
Resolver un triángulo es obtener sus elementos desconocidos (lados y ángulos) a partir de los elementos conocidos.



En un **triángulo cualquiera** se verifican:

1) $\boxed{A+B+C=180^{\circ}}$

2) Cualquier lado de un triángulo es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.



En un **triángulo rectángulo** se verifican:

$$\boxed{a^2=b^2+c^2 \quad \text{(Teorema de Pitágoras)}}$$

$$\boxed{h_a{}^2=mn \quad \text{(Teorema de la altura)}}$$

$$\boxed{\begin{cases} b^2=am \\ c^2=an \end{cases} \quad \text{(Teorema del cateto)}}$$

$$\boxed{\begin{cases} \operatorname{sen}\ B=\cos C \\ \cos B=\operatorname{sen}\ C \end{cases}}$$

Formas de **<u>determinar un triángulo rectángulo</u>**:

(1) Conocida la hipotenusa y un ángulo agudo

(2) Conocidos un cateto y un ángulo agudo

(3) Conocidos la hipotenusa y un cateto

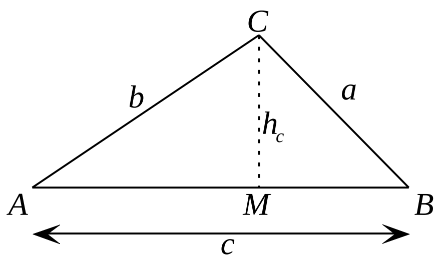
(4) Conocidos los dos catetos

10. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS NO RECTÁNGULOS

Teorema de los senos[1]:
Los lados de un **triángulo no rectángulo** (acutángulo u obtusángulo) son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos:

$$\frac{a}{\text{sen } A}=\frac{b}{\text{sen } B}=\frac{c}{\text{sen } C}$$

Demostración:
Trazamos una de las alturas, por ejemplo, la correspondiente al vértice *C*, h_C, en el triángulo ABC, obteniendo los triángulos rectángulos AMC y MBC, donde *M* es el punto es el punto en el que dicha altura corta al lado *AB*.



En el triángulo *AMC*:

$$\text{sen } A=\frac{h_C}{b}\rightarrow h_C=b\cdot\text{sen } A$$

En el triángulo *MBC*:

$$\text{sen } B=\frac{h_C}{a}\rightarrow h_C=a\cdot\text{sen } B$$

Igualamos los resultados obtenidos para h_c:

$$b\cdot\text{sen } A=a\cdot\text{sen } B$$

lo que podemos expresar como

$$\frac{a}{\text{sen } A}=\frac{b}{\text{sen } B}$$

Si repetimos el proceso con la altura h_A, obtendríamos:

$$\frac{b}{\text{sen } B}=\frac{c}{\text{sen } C}$$

que es lo que queríamos probar.

Como **consecuencia**:

$$\frac{a}{\text{sen } A}=\frac{b}{\text{sen } B}=\frac{c}{\text{sen } C}=2R$$

donde R es el radio de la circunferencia circunscrita[2] al triángulo ABC.

Teorema del coseno[3]:
El cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros lados menos el doble producto de estos lados por el coseno del ángulo comprendido:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

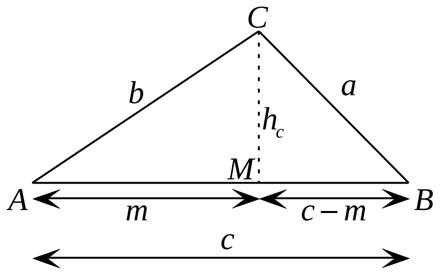
$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

[1] Según Glen Van Brummelen, «La ley de los senos está basada en las soluciones de triángulos rectángulos de Regiomontanus (matemático alemán del siglo XV)». Dichas soluciones aparecen en el Libro IV de su «De Triangulis Omnimodis». A su vez, dichas soluciones fueron la base de sus soluciones de triángulos generales.
[2] La *circunferencia circunscrita* a un triángulo es la circunferencia que pasa por los tres vértices del triángulo.
Las tres mediatrices de los lados de un triángulo se cortan en el *circuncentro*, que equidista de los tres vértices y que es el centro de la circunferencia circunscrita del triángulo.
[3] Se debe al matemático Ghiyath al-Kashi (1380-1429), de la escuela de Samarcanda. Sin embargo, esta propiedad fue popularizada en occidente por François Viète quien, al parecer, lo redescubrió independientemente.

<u>1ª demostración:</u>

Trazamos una de las alturas, por ejemplo, la correspondiente al vértice *C*, h_C, en el triángulo ABC, obteniendo los triángulos rectángulos AMC y MBC, donde *M* es el punto en el que dicha altura corta al lado *AB*.



En el triángulo *AMC*:

$$\text{sen } A = \frac{h_C}{b} \rightarrow h_C = b \cdot \text{sen } A$$

En el triángulo *MBC*:

$$\text{sen } B = \frac{h_C}{a} \rightarrow h_C = a \cdot \text{sen } B$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo *MBC*:

$$a^2 = (c-m)^2 + h_C{}^2$$

Ahora bien, como $h_C = b \cdot senA$ y $m = b \cdot cosA$, se tiene que

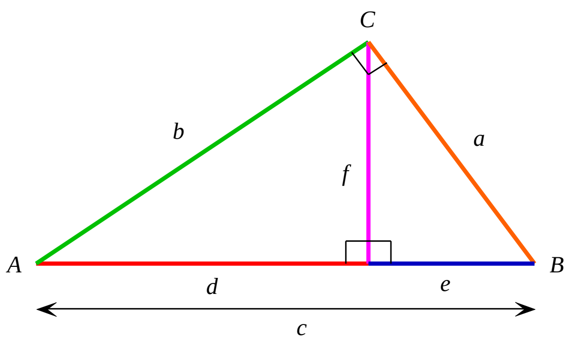
$$a^2 = (c-m)^2 + h_C{}^2 = \left(c - b \cdot \cos A\right)^2 + \left(b \cdot \text{sen } A\right)^2 =$$

$$= c^2 - 2cb \cdot \cos A + b^2 \cdot \cos^2 A + b^2 \cdot \text{sen}^2 A = c^2 - 2cb \cdot \cos A + b^2\left(\cos^2 A + \text{sen}^2 A\right) =$$

$$= c^2 + b^2 - 2cb \cdot \cos A$$

De forma análoga se obtendrían las otras dos igualdades. Que es lo que queríamos probar.

<u>2ª demostración:</u>



Por el teorema de Pitágoras $a^2 = e^2 + f^2$, y como $e = c - d$, se tiene que

$$a^2 = (c-d)^2 + f^2$$

Desarrollamos el cuadrado:

$$a^2 = c^2 - 2cd + d^2 + f^2 \qquad [1]$$

Por otra parte, por el teorema de Pitágoras $b^2 = d^2 + f^2$, luego sustituyendo en [1]:

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2cd \qquad [2]$$

Por último, como $\dfrac{d}{b} = \cos\left(A\right)$, resulta que $d = b\cos\left(A\right)$, y sustituyendo en [2]

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2cb\cos\left(A\right)$$

Que es lo que queríamos probar.

<u>Consecuencia:</u> si alguno de los ángulos es recto, el teorema del coseno se reduce al teorema de Pitágoras.

Teorema de la tangente o de Neper[4]:
En cualquier triángulo:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}},\quad \frac{a+c}{a-c}=\frac{\operatorname{tg}\frac{A+C}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-C}{2}}\quad \text{y}\quad \frac{b+c}{b-c}=\frac{\operatorname{tg}\frac{B+C}{2}}{\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}}$$

Demostración:
Por el teorema del seno

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A}=\frac{b}{\operatorname{sen} B}\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B}$$

y aplicando la siguiente propiedad de las proporciones:

$$\left[\text{Si } \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \text{ entonces } \frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}\right]$$

se obtiene:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\operatorname{sen} A+\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A-\operatorname{sen} B}=\frac{2\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\cos\frac{A+B}{2}\operatorname{sen}\frac{A-B}{2}}$$

y teniendo en cuenta que $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$ resulta:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}\operatorname{cotg}\frac{A-B}{2}}{2}=\frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}$$

De manera análoga se demuestran las otras dos identidades. C.Q.D.

Resolución de triángulos:

CASO I: Conocidos un lado y dos ángulos

Datos	Incógnitas	Fórmulas
a	A	$A=180^{\circ}-B-C$
B	b	$b=\frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A}\cdot a$
C	c	$c=\frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}\cdot a$

La solución de este problema es única y existe siempre que $B+C<180^{\circ}$ **.**

CASO II: Conocidos dos lados y el ángulo comprendido

[4] Matemático escocés del siglo XVII. Sin embrago, dicha ley ya aparece el «*Canon Mathematicus* (1579)» de François Viéte, en el que además reúne las fórmulas para la resolución de triángulos planos rectos y oblicuos.

Datos	Incógnitas	Fórmulas
a	c	$c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos C}$
b	A	$\operatorname{sen} A=\frac{a}{c}\operatorname{sen} C$
C	B	$B=180^{\circ}-A-C$

El problema siempre tiene solución y ésta es única.

Hay que tener en cuenta que la ecuación $\operatorname{sen} A=\frac{a}{c}\operatorname{sen} C$ tiene dos soluciones: una α y otra $\pi-\alpha$ (pues los senos de los ángulos suplementarios son iguales). De estas dos soluciones solamente una de ellas es solución del problema. Como a mayor lado se opone mayor ángulo y solamente puede haber, como máximo, un ángulo obtuso, por ser $a<c$ ***la solución del problema será la que corresponde al ángulo agudo***.

<u>CASO III:</u> Conocidos dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos

Datos	Incógnitas	Fórmulas
a	A	$\operatorname{sen} A=\frac{a}{b}\operatorname{sen} B$
b	C	$C=180^{\circ}-A-B$
B	c	$c=\frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}\cdot a$

Se pueden presentar los siguientes **casos**:

a) Si $\operatorname{sen} A=\frac{a}{b}\operatorname{sen} B>1$, ***la ecuación no tiene solución*** y por tanto ***el problema también carece de solución***.

b) Si $\operatorname{sen} A=\frac{a}{b}\operatorname{sen} B=1$, entonces $A=90^{\circ}$. Se presentan dos subcasos:

- **(i)** Si $B\geq 90^{\circ}$, ***el problema carece de solución***.
- **(ii)** Si $B<90^{\circ}$, ***el problema admite una única solución***.

c) Si $\operatorname{sen} A=\frac{a}{b}\operatorname{sen} B<1$, entonces dicha ecuación tiene dos soluciones, una en el primer cuadrante A_1 y otra A_2, que es el ángulo suplementario de A_1. Las dos soluciones del problema dependen de que las desigualdades

$$\begin{cases} A_1+B<180^{\circ} \\ A_2+B<180^{\circ} \end{cases}$$

sean las dos, una o ninguna cierta. ***En el primer caso tendremos dos soluciones, una para el segundo y ninguna para el tercero***.

<u>CASO IV:</u> Conocidos los tres lados

Datos	Incógnitas	Fórmulas

a	A	$\cos A = \dfrac{-a^2+b^2+c^2}{2bc}$
b	B	$\cos B = \dfrac{a^2-b^2-c^2}{2ac}$
c	C	$C = 180^\circ - A - B$

La solución del problema es única y existe siempre que la suma de dos lados arbitrarios sea mayor que el tercero.

Ejemplos:

1. CASO I: conocidos dos ángulos y un lado

De un triángulo conocemos un lado $a = 6$ m y los ángulos $B = 45^\circ$ y $C = 105^\circ$. Resolver dicho triángulo.

El problema tiene solución única por que $B + C = 45^\circ + 105^\circ < 180^\circ$

El tercer ángulo mide $A = 180^\circ - 45^\circ - 105^\circ = 30^\circ$

Por el teorema de los senos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} \rightarrow b = \frac{\operatorname{sen} 45^\circ}{\operatorname{sen} 30^\circ} \cdot 6 = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} \cdot 6 = 6\sqrt{2} \text{ m}$$

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} \rightarrow c = \frac{\operatorname{sen} 105^\circ}{\operatorname{sen} 30^\circ} \cdot 6 = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1\right)}{\frac{1}{2}} \cdot 6 = 3\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right) \text{ m}$$

2. CASO II: conocidos dos lados y el ángulo comprendido

De un triángulo conocemos los lados $a = 10$ m y $b = 7$ m y el ángulo $C = 30^\circ$. Resolver el triángulo.

Este tipo de triángulos siempre tienen solución y ésta es única.

Por el teorema del coseno

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos C} = \sqrt{100 + 49 - 140\cos 30^\circ} = 5,26 \text{ m}$$

Calculamos ahora el ángulo que corresponde al menor de los dos lados:

$$\frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} \rightarrow \operatorname{sen} B = \frac{b}{c}\operatorname{sen} C = \frac{7}{5,26}\operatorname{sen} 30^\circ = 0,665 \rightarrow B = \begin{cases} 41^\circ\, 40'' \\ 138^\circ\, 20' \end{cases}$$

La solución del problema corresponde al ángulo $B = 41^\circ\, 40'$, ya que en este caso **la solución del problema se corresponde con la del ángulo agudo (pues a mayor lado se opone mayor ángulo).**

El tercer ángulo vale $A = 180^\circ - 30^\circ - 41^\circ\, 40' = 108^\circ\, 20'$

3. CASO III: conocidos dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos

1.1 CASO IIIA:

$\operatorname{sen} A = \frac{a}{b}\operatorname{sen} B > 1$ donde B es el ángulo conocido

De un triángulo conocemos los lados $a = 52$ m y $b = 32$ m y el ángulo $B = 40^{o}\,30'$. Resolver el triángulo.

Aplicamos el teorema de los senos para calcular el ángulo A:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} \rightarrow \operatorname{sen} A = \frac{a}{b}\operatorname{sen} B = \frac{52}{32}\operatorname{sen} 40^{o}\,32' = 1,055$$

Por ser $\operatorname{sen} A > 1$, **el problema carece de solución**.

1.2 CASO IIIB:

$\operatorname{sen} A = \frac{a}{b}\operatorname{sen} B = 1 \ (\Rightarrow A = 90^{o})$ donde B es el áng. conocido

3.2.1 $B \geq 90^{o}$ donde B es el ángulo conocido

En este caso el triángulo **no tiene solución**, ya que $A + B = 90^{o} + B \geq 180^{o}$.

3.2.2 $B < 90^{o}$ donde B es el ángulo conocido

De un triángulo conocemos los lados $a = 20$ m y $b = 10$ m, y ángulo conocido $B = 30^{o}$. Resolver el triángulo.

Este problema siempre tiene solución y es única.
Por el teorema del seno

$$\operatorname{sen} A = \frac{20}{10}\operatorname{sen} 30^{o} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \rightarrow A = 90^{o}$$

Calculamos el lado que falta: c

$$c = \sqrt{20^2 - 10^2} = 10 \text{ por el teorema de Pitágoras}$$

Calculamos el ángulo C:

$$C = 90^{o} - 30^{o} = 60^{o}$$

1.3 CASO IIIC:

$\operatorname{sen} A = \frac{a}{b}\operatorname{sen} B < 1$ donde B es el ángulo conocido

De un triángulo conocemos los lados $a = 10$ m y $b = 20$ m y ángulo conocido $B = 30^{o}$. Resolver el triángulo.

Por el teorema del seno

$$\operatorname{sen} A = \frac{10}{20}\operatorname{sen} 30^{o} = 0,25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_1 = 14^{o}\,28'39,04'' \\ A_2 = 180^{o} - 14^{o}\,28'39,04'' = 165^{o}\,31'20,9'' \end{cases}$$

El problema puede tener 2, 1 o 0 soluciones dependiendo de que las desigualdades

$$\begin{cases} A_1 + B < 180^o \\ A_2 + B < 180^o \end{cases}$$

sean ciertas las dos, una o ninguna.

En nuestro caso $\begin{cases} 14^o\,28'39,04''+30^o<180^o \text{ que es cierta} \\ 165^o\,31'20,9''+30^o>180^o \end{cases}$ y, por tanto, el triángulo admite una sola solución que se corresponde con el ángulo $165^o\,31'20,9''$.

Calculamos el ángulo C:

$$C = 180^o - 30^o - 14^o\,28'39,04'' = 135^o\,31'20,9''$$

Calculamos en lado que falta: c

Por el teorema del coseno:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos C} =$$
$$= \sqrt{10^2 + 20^2 - 2\cdot 10\cdot 20\cdot \cos 135^o\,31'20,9''} = 28,03 \text{ m}$$

4. CASO IV: conocidos los tres lados

De un triángulo conocemos los tres lados $a = 15\text{m}$, $b = 22$ m y $c = 17$ m. Resolver el triángulo.

El problema tiene solución única (pues la suma de dos lados arbitrarios es mayor que el tercero y su diferencia, menor que el otro).

Aplicamos el teorema del coseno para calcular los tres ángulos:

$$\cos A = \frac{-a^2+b^2+c^2}{2bc} = \frac{-225+484+289}{748} = 0,7326 \rightarrow A = 42^o\,54'$$
$$\cos B = \frac{a^2-b^2+c^2}{2ac} = \frac{225-484+289}{510} = 0,0588 \rightarrow B = 86^o\,38'$$
$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{225+484-289}{660} = 0,6363 \rightarrow C = 50^o\,28'$$

11. ÁREA DE UN TRIÁNGULO

Sea S el área del triángulo. Se tienen las siguientes fórmulas:

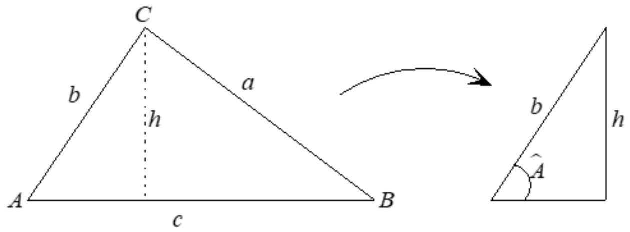
(1) Conocido un lado y la altura correspondiente

$$S = \frac{b\cdot h}{2}$$

(2) Conocidos dos lados y el ángulo comprendido

$$\boxed{S = \frac{b\cdot c\cdot \text{sen } A}{2}} \quad \text{o} \quad S = \frac{a\cdot b\cdot \text{sen } C}{2} \quad \text{o} \quad S = \frac{a\cdot c\cdot \text{sen } B}{2}$$

Vamos a deducir la primera:



$$\left.\begin{array}{l} S=\dfrac{1}{2}\text{base}\cdot\text{altura}=\dfrac{1}{2}c\cdot h \\ \text{sen}\,A=\dfrac{h}{b}\Rightarrow h=b\,\text{sen}\,A \end{array}\right\}\Rightarrow S=\frac{1}{2}bc\,\text{sen}\,A$$

(3) **<u>Conocidos dos ángulos y un lado</u>**

$$\boxed{S=\frac{b^2\cdot\text{sen}\,A\cdot\text{sen}\,C}{2\,\text{sen}\,B}} \quad \text{o} \quad S=\frac{a^2\cdot\text{sen}\,B\cdot\text{sen}\,C}{2\,\text{sen}\,A} \quad \text{o} \quad S=\frac{c^2\cdot\text{sen}\,A\cdot\text{sen}\,B}{2\,\text{sen}\,C}$$

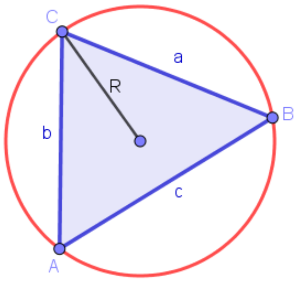
Deducimos la primera:

Usando el teorema del seno y sustituyendo en la fórmula anterior:

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{b}{\text{sen}\,B}=\dfrac{c}{\text{sen}\,C}\Rightarrow c=\dfrac{b\,\text{sen}\,C}{\text{sen}\,B} \\ S=\dfrac{bc\,\text{sen}\,A}{2} \end{array}\right\}\Rightarrow S=\frac{b^2\,\text{sen}\,C\,\text{sen}\,A}{2\,\text{sen}\,B}$$

(4) **<u>Conocidos los lados y el radio de la circunferencia circunscrita</u>**

$$\boxed{S=\frac{abc}{4R}}$$



Por el teorema del seno

$$\frac{a}{\text{sen}\,A}=\frac{b}{\text{sen}\,B}=\frac{c}{\text{sen}\,C}=2R\Rightarrow\text{sen}\,A=\frac{a}{2R}$$

y sustituyendo en

$$S=\frac{b\cdot c\cdot\text{sen}\,A}{2}$$

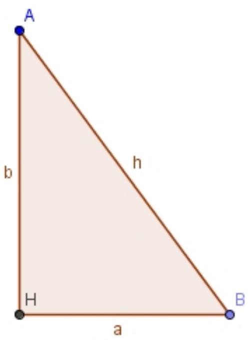
obtenemos: $S=\dfrac{abc}{4R}$

(5) **<u>Conocidos los lados (Fórmula de Herón)</u>**

$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ donde $s=\dfrac{a+b+c}{2}$ es el semiperímetro.

<u>Ejercicios:</u>

27. Resuelve los siguientes triángulos rectángulos:



a) $a=2$ cm, $h=5$ cm

b) $a=4$ cm, $A=45^{\circ}$

c) $h=3$ cm, $\hat{B}=50^{\circ}$

d) $a=15$ cm, $\hat{B}=30^{\circ}$

e) $\hat{B}=30^{\circ}$, $b=4$ cm

f) $h=13$ cm, $b=5$ cm

28. Resuelve, cuando sea posible, los siguientes triángulos:

a) $a = 51\,cm,\ \hat{B} = 40^{\circ},\ \hat{C} = 55^{\circ}$

b) $a = 13\,cm,\ b = 12\,cm,\ c = 5\,cm$

c) $a = 6\,cm,\ b = 7\,cm,\ c = 5\,cm$

d) $b = 6\,cm,\ c = 8\,cm,\ \hat{A} = 50^{\circ}$

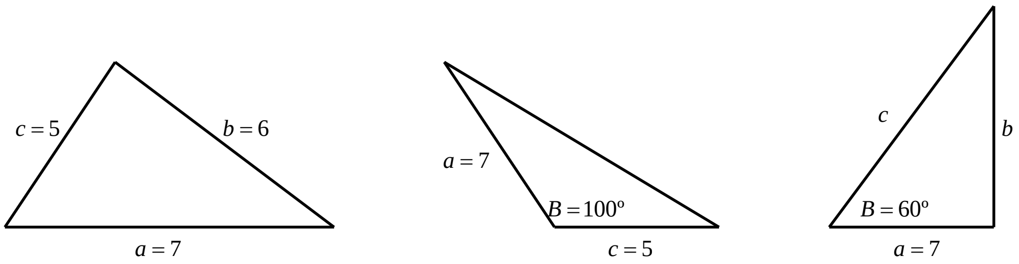
e) $a = 5\,cm,\ b = 4\,cm,\ \hat{C} = 30^{\circ}$

f) $a = 42\,cm,\ b = 50\,cm,\ \hat{B} = 85^{\circ}$

g) $a = 10\,cm,\ c = 12\,cm,\ \hat{A} = 57^{\circ}50'$

h) $b = 11{,}5\ cm,\ \ c = 17\ cm,\ \ \hat{B} = 41^{\circ}\,23'$

29. Resuelve los siguientes triángulos:



30. Resuelve el triángulo ABC sabiendo que $a = 3$ cm, $b = 5$ cm y el radio de la circunferencia que circunscribe a dicho triángulo mide 3 centímetros.

31. El área de un triángulo es 210 cm^2 y dos de sus ángulos miden 105º y 30º. ¿Cuánto miden sus lados?

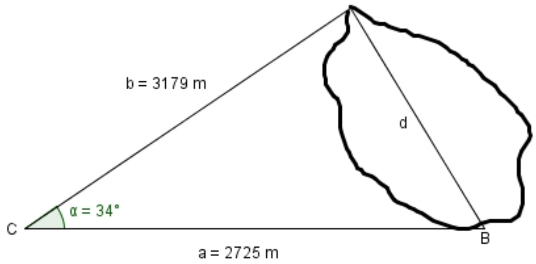
32. Calcula el perímetro de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de 7,5 centímetros de radio.

33. Calcula los ángulos de un rombo sabiendo que sus diagonales miden 20 cm y 40 cm.

34. Dos coches salen del mismo punto en el mismo instante por dos carreteras que forman 45°. Si la velocidad de los coches es de 80 km/h, calcula qué distancia los separa al cabo de una hora y media.

35. Desde dos puntos *A* y *B* separados 500 metros se dirigen dos visuales a un avión. El observador situado en *A* ve el avión bajo un ángulo de 47º y el observador situado en *B* bajo un ángulo de 50°. ¿A qué altura vuela el avión? (*A*, *B* y el avión están en el mismo plano vertical).

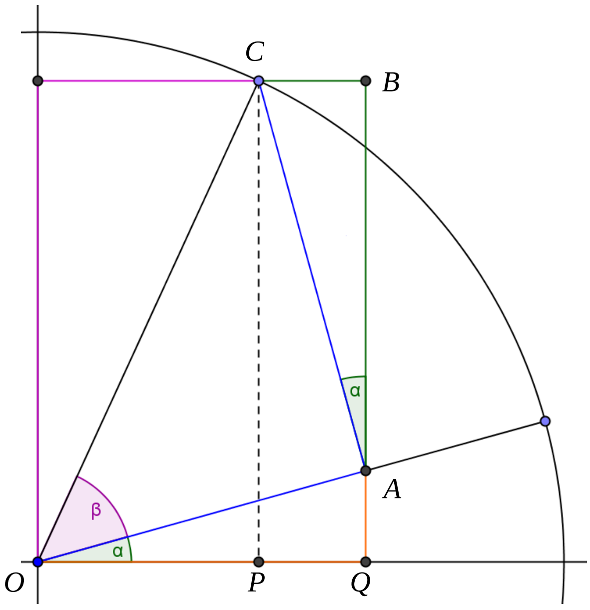
36. Para calcular la anchura *AB* de un lago se dirigen sendas visuales desde el punto *C* a *A* y a *B*. Sabiendo que las visuales forman un ángulo de 34° y observando los datos del dibujo, calcula la anchura del lago.



12. DEMOSTRACIONES

Razones trigonométricas del ángulo suma

Seno



Construcción del dibujo:

1. Consideramos una circunferencia de radio 1, el ángulo α como se ve en el dibujo (por comodidad), y el ángulo β a continuación (por simplicidad).
2. El punto en el que el segundo lado del ángulo β corta a la circunferencia, lo llamamos C, y trazamos una paralela al eje y que pase por C. El punto en el que dicha paralela corta al eje x, lo llamamos P.
3. Después, dibujamos el triángulo azul, de forma que sea rectángulo en A.
4. Construimos Q y B y los triángulos correspondientes, trazando una paralela al eje y, que pase por A
5. El ángulo de vértice A, es α, ya que los triángulos OQA y ABC tienen sus lados perpendiculares.

En el triángulo OAC, se tiene que:

$$\operatorname{sen}\beta = \overline{AC}$$
$$\cos\beta = \overline{OC}$$

En el triángulo OPC, se tiene que:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \frac{\overline{PC}}{\overline{OC}} = \overline{PC} \qquad [1]$$

Además, $\overline{PC} = \overline{QA} + \overline{AB}$

En el triángulo OQA, se tiene que:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{QA}}{\overline{OA}} \Rightarrow \overline{QA} = \overline{OA}\operatorname{sen}\alpha = \cos\beta\operatorname{sen}\alpha$$
$$\cos\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \Rightarrow \overline{AB} = \overline{AC}\cos\alpha = \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$$

Como consecuencia,

$$\overline{PC} = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta \qquad [2]$$

Igualando [1] y [2]:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$

C.Q.D.

Coseno

$$\cos(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\left[90^{o}+(\alpha+\beta)\right]=\operatorname{sen}\left[(90^{o}+\alpha)+\beta\right]=\operatorname{sen}(90^{o}+\alpha)\cos\beta+\cos(90^{o}+\alpha)\operatorname{sen}\beta=$$
$$=\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

C.Q.D.

Tangente

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}=\frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=$$
$$=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

C.Q.D.

Razones trigonométricas del ángulo diferencia

Seno

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\operatorname{sen}(\alpha+(-\beta))=\operatorname{sen}\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\operatorname{sen}(-\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$

C.Q.D.

Coseno

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha+(-\beta))=\cos\alpha\cos(-\beta)-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}(-\beta)==\cos\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

C.Q.D.

Tangente

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\operatorname{tg}(\alpha+(-\beta))=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}(-\beta)}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(-\beta)}=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

C.Q.D.

Razones trigonométricas del ángulo doble

Seno

$$\operatorname{sen}(2\alpha)=\operatorname{sen}(\alpha+\alpha)=\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha=2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$

C.Q.D.

Coseno

$$\cos(2\alpha)=\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\alpha=\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha$$

C.Q.D.

Tangente

$$\operatorname{tg}(2\alpha)=\operatorname{tg}(\alpha+\alpha)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\alpha}=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$$

C.Q.D.

Razones trigonométricas del ángulo mitad

Seno y coseno

Por una parte

$$\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}=1 \qquad [1]$$

y por otra:

$$\cos\alpha=\cos\left[2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} \qquad [2]$$

Restando las igualdades anteriores ([1] y [2]:

$$1-\cos\alpha=2\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}\Rightarrow \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

y sumando las igualdades anteriores ([1] y [2]:

$$1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}\Rightarrow \cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

C.Q.D.

Tangente

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}}{\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

C.Q.D.

Transformaciones de sumas o diferencias en productos

Vamos a demostrar las siguientes cuatro identidades:

$$1)\ \operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta=2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$2)\ \operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\beta=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$3)\ \cos\alpha+\cos\beta=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$4)\cos\alpha-\cos\beta=-2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Demostración de la relación 1):

Sumando las relaciones [1] y [2]:

$$\operatorname{sen}(a+b)=\operatorname{sen}a\cdot\cos b+\cos a\cdot\operatorname{sen}b \qquad [1]$$

$$\operatorname{sen}(a-b)=\operatorname{sen}a\cdot\cos b-\cos a\cdot\operatorname{sen}b \qquad [2]$$

se obtiene:

$$\operatorname{sen}(a+b)+\operatorname{sen}(a-b)=2\operatorname{sen}a\cdot\cos b \qquad [3]$$

Se hacen los cambios de variable:

$$\left.\begin{array}{l} a+b=\alpha \\ a-b=\beta \end{array}\right\}$$

Resolviendo el sistema, se obtiene:

$$a=\frac{\alpha+\beta}{2} \quad ; \quad b=\frac{\alpha-\beta}{2}$$

y, sustituyendo en la relación [3], se obtiene:

$$\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta=2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Demostración de la relación 2):

Restando las relaciones [1] y [2] anteriores, se obtiene:

$$\operatorname{sen}(a+b)-\operatorname{sen}(a-b)=2\cos a\cdot\operatorname{sen}b \qquad [4]$$

Realizando los mismos cambios de variable que antes, y sustituyendo en la relación [4] se llega a que:

$$\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\beta=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Demostración de las relaciones 3) y 4):

A partir de las relaciones:

$$\cos(a+b)=\cos a\cdot\cos b-\operatorname{sen}a\cdot\operatorname{sen}b$$

$$\cos(a-b)=\cos a\cdot\cos b+\operatorname{sen}a\cdot\operatorname{sen}b$$

y siguiendo el mismo proceso que hemos seguido anteriormente, se llega a que:

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

C.Q.D.

Transformaciones de productos en sumas o diferencias

Vamos a demostrar las siguientes cuatro identidades:

$$5)\ \operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(\alpha+\beta)+\operatorname{sen}(\alpha-\beta)\right]$$

$$6)\ \cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(\alpha+\beta)-\operatorname{sen}(\alpha-\beta)\right]$$

$$7)\ \cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]$$

$$8)\ \operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta=-\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\right]$$

<u>Demostración de la relación 5):</u>

Sabemos que

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)+\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cancel{\cos\alpha\operatorname{sen}\beta}+\operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\cancel{\cos\alpha\operatorname{sen}\beta}=2\operatorname{sen}\alpha\cos\beta$$

de donde se deduce que:

$$\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(\alpha+\beta)+\operatorname{sen}(\alpha-\beta)\right]$$

<u>Demostración de la relación 6):</u>

Sabemos que

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\cancel{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta}+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta-\left[\cancel{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta}-\cos\alpha\operatorname{sen}\beta\right]=2\cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$

de donde se deduce que:

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(\alpha+\beta)-\operatorname{sen}(\alpha-\beta)\right]$$

<u>Demostración de la relación 7):</u>

Sabemos que

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\cancel{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}+\cos\alpha\cos\beta+\cancel{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}=2\cos\alpha\cos\beta$$

de donde se deduce que:

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]$$

<u>Demostración de la relación 8):</u>

Sabemos que

$$\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=\cancel{\cos\alpha\cos\beta}-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta-\left[\cancel{\cos\alpha\cos\beta}+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\right]=-2\operatorname{sen}\alpha\cos\beta$$

de donde se deduce que:

$$\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta=-\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\right]$$