PROBLEMAS DE ECUACIONES (RESUELTOS)

1. Si aumentamos en 4 cm la arista de un cubo, su volumen se multiplicaría por 8. Determina la medida de la arista.

2. La apotema de un hexágono regular mide 8 cm. Calcula la medida de su lado y de su área.

3. Un ciclista y un coche parten uno al encuentro del otro desde dos ciudades separadas por 180 km. Sabiendo que el ciclista avanza cuatro veces más despacio que el coche y que tardan 1 h 48 min en encontrarse, ¿cuál es la velocidad de cada uno?

4. Un camión sale de una ciudad a 80 km/h y dos horas después parte en la misma dirección un coche a 100 km/h. ¿Cuánto tardará en alcanzarlo y cuánta distancia habrán recorrido hasta ese momento?

5. Para cercar una finca rectangular de 750 m^2 se han utilizado 110 m de cerca. Calcular las dimensiones de la finca.

6. Una plaza rectangular de cinc es 4 cm más larga que ancha. Con ella se construye una caja de 840 cm^2 cortando un cuadrado de 6 cm de lado en cada esquina y doblando los bordes. Hallar las dimensiones de la caja.

7. EL número 365 que indica el número de días de un año es un número con una propiedad curiosa. Es la suma de los cuadrados de tres números naturales consecutivos y además, es suma de los cuadrados de los dos siguientes. Halla dichos números.

8. Dos torres, una de 30 pasos[1] y otra de 40, están separadas 50 pasos. Entre las dos torres se encuentra una fuente hacia la que descienden dos pájaros que están en las almenas de las torres. Yendo con igual velocidad llegan al mismo tiempo. ¿A qué distancia de las torres se encuentra la fuente?

9. A una fiesta asistieron 20 personas. María bailó con siete chicos. Olga con ocho; Vero con nueve, y así hasta llegar a Nina, que baló con todos ellos. ¿Cuántos chicos había en la fiesta?

10. A una finca de regadío de Ciudad Real se le asignan mensualmente 48 horas de riego, distribuidas entre los productores que la cultivan, proporcionalmente al terreno que tienen cada uno a su cargo. EL productor A tiene 1,5 ha; el B, 1 ha y 40 áreas y el C, 70 áreas. Calcular las horas de riego que corresponden a cada uno. (Recuerda: 1 área = 100 m^2 y 1 ha = 10 000 m^2)

11. ¿Es posible construir una caja de 6 m^3 que tenga un metro menos de ancho que de largo y un metro menos de altura que de ancho? ¿Cuántas formas hay de hacerlo?

12. Si se disminuye en 10 cm el lado de un cuadrado, su área disminuye en 400 cm^2. ¿Cuánto medía el lado del cuadrado original?

[1] El paso es una medida de intervalo usada por casi todos los pueblos.
El paso hebreo se cree que era de seis pies o dos varas, aunque no se puede asegurar. El paso griego contenía seis pies o cuatro codos y equivalía a dos varas o a un estado y este sería el paso geométrico.
Fuente: [*https://acortar.link/9wuN6Z*](https://acortar.link/9wuN6Z)

SOLUCIONES

Problema 1:
Sea $x=$longitud de la arista del cubo. La ecuación que se obtiene es:

$$(x+4)^3=8x^3$$

Desarrollando el miembro de la izquierda y agrupando:

$$-7x^3+12x^2+48x+64=0$$

Resolvemos esta ecuación por Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc} & -7 & 12 & 48 & 64 \\ 4 & & -28 & -64 & -64 \\ \hline & -7 & -16 & -16 & 0 \end{array}$$

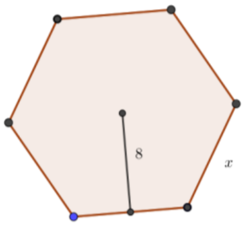
Es decir, $-7x^3+12x^2+48x+64=(x-4)(-7x^2-16x^2-16)$

Ya tenemos una solución, pero resolvemos la ecuación de segundo grado por si hay más soluciones:

$$-7x^2-16x-16=0 \Rightarrow x=\frac{-16\pm\sqrt{-192}}{14}\notin\mathbb{R}$$

Solución: la arista mide 4 cm.

Problema 2:



Sea $x=$lado del hexágono. La ecuación que se obtiene del enunciado es, aplicando el teorema de Pitágoras[2]:

$$x^2=8^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

Calculando el paréntesis, reduciendo a común denominador y agrupando:

$$3x^2=256 \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{256}{3}}=\pm\frac{16\sqrt{3}}{3}$$

Solución: el lado del hexágono mide $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ cm y su área:

$$A_{\text{Hexágono}}=\frac{p\cdot a}{2}=\frac{6\cdot\frac{16\sqrt{3}}{3}\cdot 8}{2}=128\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

Problema 3:
1ª forma: En este problema, usar dos incógnitas nos puede simplificar el planteamiento, aunque al final lo que vamos a hacer es resolver una ecuación.
Sea $x=$distancia recorrida por el ciclista y $v=$velocidad del ciclista.
Hay que tener en cuenta que 1 h 48 min = 1,8 h (mediante una regla de tres). Así:

$$\left.\begin{array}{r} x=1{,}8v \\ 180-x=7{,}2v \end{array}\right\} \Rightarrow 180-1{,}8v=7{,}2v \Rightarrow v=20$$

[2] Recuerda que en un hexágono regular: lado $=$ radio

Por tanto, la velocidad del ciclista es de 20 km/h y la velocidad del coche es de $\dfrac{180-(1{,}8\cdot 20)}{1{,}8}=80$ km/h.

2ª forma: Sea $v=$velocidad del coche. Entonces, como 1 h 48 min = 1,8 h, se tiene que:

$$v+\frac{v}{4}=\frac{180}{1{,}8}$$
$$4v+v=400$$
$$5v=400$$
$$v=80$$

Así, el coche circula a 80 km/h y el ciclista a $\dfrac{80}{4}=20$ km/h.

Problema 4:

Al igual que en el caso anterior, es más sencillo plantear un sistema de ecuaciones.
Sea $x=$distancia recorrida por el camión y $t=$tiempo que tarda en alcanzarlo. Entonces:

$$\left.\begin{array}{l} x=80t \\ x+160=100t \end{array}\right\} \Rightarrow 80t+160=100t \Rightarrow t=8$$

Así, tardará 8 h en alcanzarlo y habrá recorrido $100\cdot 8=800$ km.

Problema 5:

Como se ha utilizado 110 m de cerca, los lados miden x y $55-x$ m, respectivamente. Por la fórmula del área del rectángulo, se tiene que:

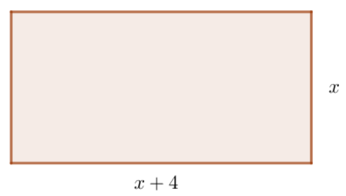
$$x(55-x)=750$$

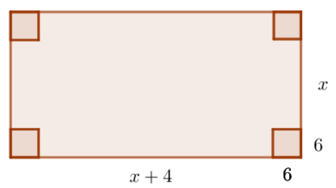
Operando resulta:

$$x^2-55x+750=0 \Rightarrow x=\begin{cases} 30 \\ 25 \end{cases}$$

Así, las dimensiones de la finca son: largo 30 m y ancho, 25 m.

Problema 6:





Como el volumen de un paralelepípedo de lados $a,\ b,\ c$ es

$$V_{\text{paralelepípedo}}=abc$$

se tiene que:

$$6(x-12)(x+4-12)=840$$

Desarrollando:

$$x^2-20x-44=0 \Rightarrow x=\begin{cases} 22 \\ \cancel{-2} \end{cases}$$

Como consecuencia, las dimensiones de la pieza son:

Largo: $22+4=26$ cm
Ancho: 22 cm

Problema 7:

En realidad, las dos condiciones son dos formas distintas de resolver el problema:
1ª forma: Los números son $x,\ x+1$ y $x+2$ y la ecuación que resulta:

$$x^2+(x+1)^2+(x+2)^2=365$$

Operando, resulta:

$$3x^2+6x-360=0 \Rightarrow x=\begin{cases}10\\ \cancel{-12}\end{cases}$$

Así, los números pedidos son: 10, 11, 12, 13 y 14, ya que

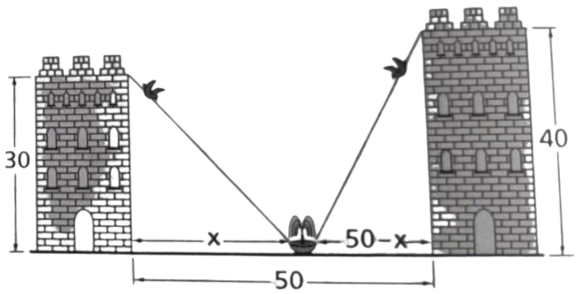
2ª forma: Podemos considerar los números x y $x+1$, y tener en cuenta la segunda condición:

$$x^2+(x+1)^2=365 \Rightarrow 2x^2+x-182=0 \Rightarrow x=\begin{cases}13\\ \cancel{-14}\end{cases}$$

Y, por tanto, los números que verifican las condiciones del problema son 10, 11, 12, 13 y 14, ya que

$$10^2+11^2+12^2=365=13^2+14^2$$

Problema 8:



Sean x y $50-x$ las distancias de la fuente a los pies de las torres. Por el teorema de Pitágoras:

$$30^2+x^2=(50-x)^2+40^2$$

Realizando las operaciones:

$$900+x^2=2500-100x+1600$$

$$100x=3200$$

$$x=\frac{3200}{100}=32$$

Así, las distancias a las torres son: 32 pasos y 18 pasos.

Problema 9:

Sea $x=$número de chicas.

Se tiene que: $\begin{cases}\text{María bailó con } 6+1=7\\ \text{Olga bailó con } 6+2=8\\ \text{Vera bailó con } 6+3=9\\ \ldots\\ \text{Nina bailó con } 6+x\end{cases}$. Así, la ecuación que hay que resolver es:

Así, la ecuación que hay que resolver es:

$$x+(6+x)=20 \Rightarrow 2x=14 \Rightarrow x=7$$

Por tanto, en la fiesta había 7 chicas y 13 chicos.

Problema 10:

Las horas de regadío son proporcionales a 1,5 ha = 15 000 m^2, a 1 ha y 40 áreas = 14 000 m^2 y a 70 áreas = 7 000 m^2 o también a 15, 14 y 7. Por tanto, podemos tomar como tiempos empleados $15x$, $14x$ y $7x$ como tiempos empleados, ya que son proporcionales a 15, 14 y 7, respectivamente.

Así, la ecuación resultante es:

$$15x+14x+7x=48 \Rightarrow 36x=48 \Rightarrow x=\frac{48}{36}=\frac{4}{3}=1,\widehat{3}\text{ h}=1\text{ h }20\text{ min}$$

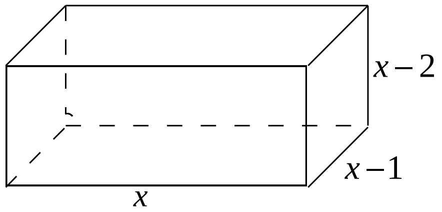
Así, las horas de riego de cada uno son:

Agricultor A: $\frac{4}{3}\cdot 5=20$ h

Agricultor B: $\frac{4}{3}\cdot 14 = 18,\widehat{6}\text{ h} = 18\text{ h }40\text{ min}$

Agricultor C: $\frac{4}{3}\cdot 7 = 9,\widehat{3}\text{ h} = 9\text{ h }20\text{ min}$

Problema 11:



Si x es el largo, $x-1$ el ancho y $x-2$ la altura, se tiene que

$$x(x-1)(x-2)=6$$
$$\left(x^2-x\right)(x-2)=6$$
$$x^3-3x^2+2x-6=0$$

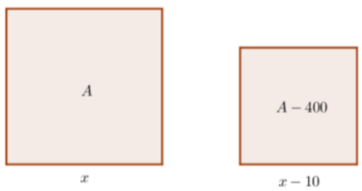
Factorizamos el polinomio por Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -3 & 2 & -6 \\ 3 & & 3 & 0 & 6 \\ \hline & 1 & 0 & 2 & 0 \end{array} \Rightarrow x^3-3x^2+2x-6=(x-3)\left(x^2+2\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x^2+2=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}i \notin \mathbb{R} \end{cases}$$

Como consecuencia, la construcción es posible y solo hay una solución, que es:

Largo: 3 m
Ancho: 2m
Alto: 1 m

Problema 12:



Sea $x=$lado del cuadrado. Entonces:

$$(x-10)^2 = x^2-400$$
$$x^2-20x+100=x^2-400$$
$$500=2x$$
$$x=\frac{500}{20}=25$$

Por tanto, el lado del primer cuadrado mide 25 cm.