CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

Evaluación para el Acceso a la Universidad
Curso 2021/2022

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá resolver **CUATRO** de los ocho ejercicios propuestos. Si resuelve más, se corregirán solo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntuará 2,5 puntos. Duración de la prueba: 1 hora y 30 minutos.

1. *a*) **[1,5 puntos]** Encuentra todas las matrices X que conmutan con la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

es decir, que verifican que $AX = XA$.

b) **[1 punto]** ¿Existe alguna matriz simétrica que conmute con A y cuyo determinante valga 4?

2. *a*) **[1,5 puntos]** Tres lápices, un cuaderno y una agenda han costado 5 euros, lo mismo que dos cuadernos y una agenda. ¿Podemos saber el precio de cada artículo si ninguno es gratis y en céntimos todos son múltiplos de 50?

b) **[1 punto]** Calcula razonadamente el siguiente límite:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}.$$

3. *a*) Sea la curva $f(x) = a - x^2$.

a.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué valores puede tomar $a \in \mathbb{R}$ para que la curva $f(x) = a - x^2$ corte al eje de abscisas (eje OX) en dos puntos y, por tanto, delimite con dicho eje un recinto cerrado?

a.2) **[1 punto]** Encuentra razonadamente $a \in \mathbb{R}$ para que el área de dicho recinto valga 36.

b) **[1 punto]** Resuelve la siguiente integral:

$$\int \frac{2x}{\sqrt{1+3x^2}}dx.$$

El cambio de variable $t = 1 + 3x^2$ te puede ayudar.

4. Sean las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x &= 2\lambda \\ y &= -\lambda \\ z &= a \end{cases}, \quad s \equiv \begin{cases} x &= -1 \\ y &= \mu \\ z &= -5\mu \end{cases},$$

donde λ y μ son los parámetros y $a \in \mathbb{R}$.

a) **[1,5 puntos]** Estudia su posición relativa en función de los valores que toma a.

b) **[1 punto]** Encuentra razonadamente un plano que contenga a s y que sea paralelo a r.

5. *a*) **[1 punto]** Expresa razonadamente en forma de ecuaciones paramétricas la recta intersección de los planos $\pi_1 \equiv x = y + 1$ y $\pi_2 \equiv y + 2z = 5$.

b) **[1,5 puntos]** Enuncia el teorema del valor medio del cálculo integral. Encuentra razonadamente el punto al que hace alusión dicho teorema para la función $f(x) = 3/x^2$ en el intervalo $[1, 3]$. Interpreta geométricamente lo hallado.

6. *a*) **[1,5 puntos]** Estudia el rango de la matriz M en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$, siendo

$$M = \begin{pmatrix} 2 & m & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & m \\ 4 & 1 & m & 2 \end{pmatrix}.$$

b) **[1 punto]** Sean los planos $\pi_1 \equiv 2x + my = 1$, $\pi_2 \equiv 2x + y = m$ y $\pi_3 \equiv 4x + y + mz = 2$. Estudia su posición relativa según los valores de m. Puedes utilizar los resultados obtenidos en el apartado anterior.

7. *a*) **[1,25 puntos]** Sean los vectores $\vec{u} = (1, 1, 1)$ y $\vec{v} = (1, 0, 1)$. Calcula el plano que pasa por el punto $A = (0, 0, 1)$ y con vector normal el producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

b) El EVAU club de fútbol tiene una probabilidad del 90 % de ganar un partido cuando juega Benceno (su delantero estrella) y del 60 % cuando no lo hace. Se sabe que la probabilidad de que Benceno juegue un partido es del 80 %.

a.1) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que el EVAU C.F. gane un partido cualquiera?

b.1) **[0,75 puntos]** Si el EVAU C.F. acaba de ganar un partido, ¿cuál es la probabilidad de que Benceno haya jugado?

8. *a*) Se calcula que una quinta parte de los niños españoles presentan algún tipo de intolerancia alimentaria. En una cantina escolar los niños se sientan al azar en mesas de 4 comensales.

a.1) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que en una mesa haya algún niño con intolerancia alimentaria?

a.2) **[0,75 puntos]** Cuando en una mesa hay algún niño con intolerancia alimentaria, a esa mesa se le sirve el pan sin gluten. Si un día hay ocupadas 8 mesas, ¿cuál es la probabilidad de que haya que servir pan sin gluten en alguna mesa?

b) El peso de los paquetes de 1 kg arroz que comercializa determinada marca siguen una distribución normal de 985 g de media y 25 g de desviación típica.

b.1) **[0,5 puntos]** ¿Cuántos pesarán más de un kilo?

b.2) **[0,75 puntos]** ¿Cuánto pesará el más ligero del 70 % de los que más pesan?

a	**0.00**	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
0.10	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.20	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.30	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.40	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.50	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.60	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549

1 a) $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$AX=XA \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ a-c & b-d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a+b & -b \\ 2c+d & -d \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a+b=2a \Rightarrow b=0 \\ 2c+d=a-c \Rightarrow a=3c+d \\ -d=b-d \Rightarrow b=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{X=\begin{pmatrix} 3\alpha+\beta & 0 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}} \text{ con } \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

$c=\alpha$
$d=\beta$

b) Las matrices que conmutan con A son de la forma $X=\begin{pmatrix} 3\alpha+\beta & 0 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$.

Como además tiene que ser simétrica ($X=X^T$), entonces $\alpha=0$.

Ahora imponemos que $|X|=4$:

$$|X|=\begin{vmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{vmatrix}=\beta^2=4 \Rightarrow \beta=\pm\sqrt{4}=\pm 2$$

Las matrices $\boxed{X_1=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}$ y $\boxed{X_2=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}}$ cumplen lo que se pide.

2 a) x = precio de un lápiz
y = " " " cuaderno
z = " " una agenda

$$\left.\begin{array}{r} 3x+y+z=500 \\ 2y+z=500 \end{array}\right\} \text{ con } \begin{array}{l} x,y,z\in\mathbb{N} \\ x,y,z=\dot{50} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} 3x+y+z=500 \\ 2y+z=500 \end{array}\right\} \xrightarrow{\cdot(-1)} \begin{array}{r} 3x+y+z=500 \\ -2y-z=-500 \\ \hline 3x-y=0 \Rightarrow 3x=y \end{array}$$

Por otra parte: $2y+z=500 \Rightarrow z=500-6x$

Como x,y,z son múltiplos de 50:

$$\left.\begin{array}{l} x=50\lambda \\ y=150\lambda \\ z=500-300\lambda \end{array} \text{ con } \lambda\in\mathbb{N}\right\} \longrightarrow 500-300\lambda>0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 500>300\lambda \Rightarrow \frac{500}{300}>\lambda \Rightarrow \frac{5}{3}>\lambda \Rightarrow \lambda=1$$

Solución: un lápiz cuesta 50 cent., un cuaderno 150 cent. y una agenda 200 cent.

b) 1ª forma: número e

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{x^2+1}{x}} = [1^\infty] = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{x^2+1}{x}} =$$

$$= e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x}} = e^1 = \boxed{e}$$

2ª forma: con la fórmula

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{x^2+1}{x}} = [1^\infty] = e^1 = \boxed{e}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x}\right)\left(\frac{x+1}{x}-1\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x}\left(\frac{x+1-x}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x}\cdot\frac{1}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x^2} = 1$$

3 a1) $f(x) = a - x^2$, $a\in\mathbb{R}$

Si f corta al eje OX $\Rightarrow f(x)=0 \Rightarrow a-x^2=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{a} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{a\in(0,+\infty)}$

El apartado b) está al final

a2) Si el área vale 36, entonces

$$\int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}}(a-x^2)\,dx = 36 \Rightarrow \left. ax-\frac{x^3}{3}\right]_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} = 36 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a\sqrt{a}-\frac{(\sqrt{a})^3}{3}-\left(-a\sqrt{a}-\frac{(-\sqrt{a})^3}{3}\right) = 36 \Rightarrow -2\frac{(\sqrt{a})^3}{3} = 36 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{a^3} = -54 \Rightarrow \boxed{a = \sqrt[3]{(-54)^2} = \sqrt[3]{2916} \simeq 14{,}29}$$

4 a) $r\equiv\begin{cases}x=2\lambda\\ y=-\lambda\\ z=a\end{cases}$, $s\equiv\begin{cases}x=-1\\ y=+\mu\\ z=-5\mu\end{cases}$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ y $a\in\mathbb{R}$

$P_r(0,0,a)\in r$ | $P_s(-1,0,0)\in s$

$\vec{u}_r=(2,-1,0)$ | $\vec{u}_s=(0,1,-5)$

$$\frac{2}{0}\neq\frac{-1}{1}\neq\frac{0}{-5} \Rightarrow \vec{u}_r \nparallel \vec{u}_s \Rightarrow r \text{ y } s \text{ son secantes o se cruzan}$$

$$\overrightarrow{P_rP_s}=(-1,a,-a)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & a \\ 0 & 1 & -5 \\ -1 & a & -a \end{vmatrix} = +9a-5=0 \Rightarrow a=\frac{5}{9}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Solución: si } a\neq \frac{5}{9} \Rightarrow rg(\vec{u}_r,\vec{u}_s,\overrightarrow{P_rP_s})=3 \Rightarrow r \text{ y } s \text{ se cruzan} \\ \text{si } a=\frac{5}{9} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow rg(\vec{u}_r,\vec{u}_s,\overrightarrow{P_rP_s})=2 \Rightarrow r \text{ y } s \text{ secantes} \end{array}}$$

b) π t.q. $\begin{cases} s\subset\pi \\ \pi\parallel r \end{cases} \Rightarrow \pi\equiv\{P_s,\vec{u}_r,\vec{u}_s\} \Rightarrow \boxed{\pi\equiv\begin{cases} x=-1+2\alpha \\ y=\quad -\alpha+\beta \\ z=\quad -5\beta \end{cases}}$

con $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

$\boxed{5}$ a) $\left.\begin{array}{l}\pi_1\equiv x=y+1 \\ \pi_2\equiv y+2z=5\end{array}\right\}$ $r\equiv\begin{cases}\pi_1\equiv x-y-1=0 \\ \pi_2\equiv y+2z-5=0\end{cases} \equiv\{P,\vec{u}_{\pi_1}\times\vec{u}_{\pi_2}\}$

donde $P\in\pi_1\cap\pi_2$

$$\begin{array}{l} x-y-1=0 \\ y+2z-5=0 \end{array}$$

Tomamos $z=1 \Rightarrow y=3 \Rightarrow x=4 \Rightarrow P(4,3,1)$

$$\vec{u}_{\pi_1}\times\vec{u}_{\pi_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2\vec{i}+\vec{k}-2\vec{j}=(-2,-2,1)$$

$$\boxed{\text{Solución: la recta pedida es } r\equiv\begin{cases} x=4-2\lambda \\ y=3-2\lambda \\ z=1+\lambda \end{cases} \text{ con } \lambda\in\mathbb{R}}$$

b) <u>Teorema del valor medio del cálculo integral</u>

Si $f(x)$ es una función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$, entonces, existe un punto $c\in(a,b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx=f(c)(b-a)$$

b) Aplicación a $f(x)=\frac{3}{x^2}$ en $[1,3]$

$f(x)$ es continua en $\mathbb{R}-\{0\}$, luego es continua en $[1,3]$

Aplicando el TVM del cálculo integral

$$\int_1^3 \frac{3}{x^2}\,dx = (3-1)\cdot f(c) \Rightarrow \left.\frac{-3}{x}\right]_1^3 = 2\cdot\frac{3}{c^2} \Rightarrow 2=\frac{6}{c^2} \Rightarrow c=\pm\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{c=\sqrt{3}\in(1,3)}$$

La interpretación geométrica es: el área limitada por la curva en $[a,b]$ es igual a la del rectángulo de base igual a la amplitud del intervalo $(b-a)$ y altura igual a la ordenada de la curva en un punto $c\in(a,b)$.

(*) Ver página 7

6 a) $M=\begin{pmatrix} 2 & m & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & m \\ 4 & 1 & m & 2 \end{pmatrix}$ con $m\in\mathbb{R}$

$$\begin{vmatrix} 2 & m & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & m \end{vmatrix} = 2m-2m^2 = 2m(1-m)=0 \Rightarrow m=\begin{cases}0\\1\end{cases}$$

Si $m\neq\begin{cases}0\\1\end{cases} \Rightarrow$ rango $M=3$

Si $m=0$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2F_1+F_3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rango } M=3$$

Si $m=1$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[-2F_1+F_3]{-2F_2+F_3} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-F_2+F_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

y $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow$ rango $M=2$

Discusión: Si $m\neq\begin{cases}0\\1\end{cases} \Rightarrow$ rango $M=3$

Si $m=0 \Rightarrow$ rango $M=3$

Si $m=1 \Rightarrow$ rango $M=2$

b) $\begin{cases} \pi_1 \equiv 2x+my=1 \\ \pi_2 \equiv 2x+y=m \\ \pi_3 \equiv 4x+y+mz=2 \end{cases}$ $\qquad \overline{M}=\begin{pmatrix} 2 & m & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & m \end{pmatrix}$

Cipri

Si $m \neq \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \Rightarrow$ rango $\overline{M}=3$

Si $m=0$ o $m=1 \Rightarrow$ rango $\overline{M}=2$ ya que $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ en el primer caso y $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ en el segundo caso.

Posición relativa

Si $m \neq \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \Rightarrow$ secantes en un punto (S.C.D.)

Si $m=0 \Rightarrow$ rango $\overline{M}=2$ y rango $M=3$ (S.I.)

Estudiamos el rango de las submatrices de $\overline{M}$ de orden 2x3

$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$ rango $=2$, $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$ rango $=2$

$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$ rango $=2$

Los tres planos se cortan 2 a 2 según tres rectas.

Si $m=1 \Rightarrow$ rango $\overline{M}=2=$ rango M (S.C.I.)

Estudiamos el rango de las submatrices de M de orden 2x4

$\begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow rg=1$

$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow$ rango $=2$

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ rango $=2$

Dos planos coincidentes (π_1 y π_2) y el tercero (π_3) los corta según una recta.

Solución: Si $m \neq \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \Rightarrow$ los tres planos son secantes en un punto

Si $m=0 \Rightarrow$ los tres planos se cortan 2 a 2 según tres rectas

Si $m=1 \Rightarrow$ hay dos planos coincidentes (π_1 y π_2) y el tercero (π_3) los corta según una recta.

¡ERROR! En la versión que se les entregó a los alumnos, el segundo plano era $\pi_2 \equiv 2x+2y=m$, y entonces no se podía usar lo obtenido en a).

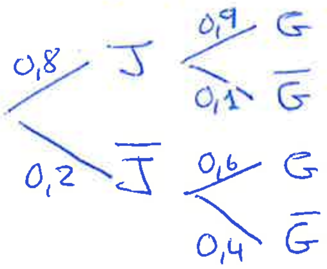
7 a) $\left.\begin{array}{l}\vec{u}=(1,1,1)\\ \vec{v}=(1,0,1)\\ A(0,0,1)\end{array}\right\} \pi \equiv \{A, \vec{n}\}$ donde $\vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}$

$$\vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}-\vec{j}=(1,0,-1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\pi \equiv x-z+D=0\\ A(0,0,1)\in\pi\end{array}\right\} \Rightarrow 0-1+D=0 \Rightarrow D=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi \equiv x-z+1=0}$$

b) J = juega Benceno , G = gana el EvAU club de fútbol



b1) $\boxed{P(G)}=P(J)P(G/J)+P(\bar{J})P(G/\bar{J})=$

$$=0{,}8\cdot 0{,}9+0{,}2\cdot 0{,}6=\boxed{0{,}84}$$

b2) $\boxed{P(J/G)}=\dfrac{P(J\cap G)}{P(G)}=\dfrac{0{,}8\cdot 0{,}9}{0{,}84}=\boxed{0{,}86}$

8 a) a1) X = el niño presenta intolerancia alimentaria

$$X \sim B(4,\tfrac{1}{5})$$

$$\boxed{P(X=1)}=\binom{4}{1}\left(\tfrac{1}{5}\right)^1\left(1-\tfrac{1}{5}\right)^{4-1}=\frac{4!}{1!(4-1)!}\cdot\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^3=$$

$$=\left(\frac{4}{5}\right)^4=\frac{256}{625}=\boxed{0{,}4096}$$

a2) X = mesa a la que se le sirve pan sin gluten

$$X \sim B(8,\tfrac{1}{5})$$

$$\boxed{P(X\geq 1)}=1-P(X<1)=1-P(X=0)=$$

$$=1-\binom{8}{0}\left(\frac{1}{5}\right)^0\left(\frac{4}{5}\right)^8=1-0{,}1678=\boxed{0{,}8322}$$

b) X = peso de los paquetes de 1 kg de arroz

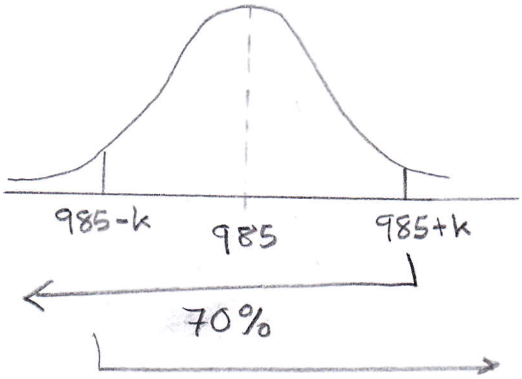
$$X \sim N(985, 25)$$

b1) $\boxed{P(X>\underset{1000\,g}{1})}=P\left(Z>\dfrac{1000-985}{25}\right)=P(Z>0{,}6)=$

$= 1 - P(Z \leq 0{,}6) = 1 - 0{,}7257 = \boxed{0{,}2743}$

↑ mirando en la tabla

b2)



$0{,}7 = P(X > 985-k) =$

$= P(X < 985+k) = P\left(Z < \frac{985+k-985}{25}\right)$

$= P\left(Z < \frac{k}{25}\right) \Rightarrow$ (mirando en la tabla)

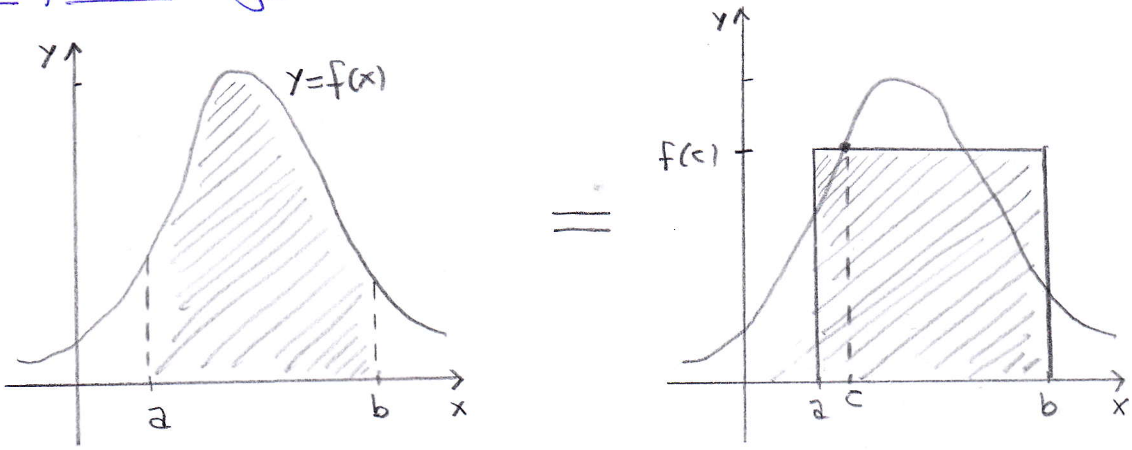
$\frac{k}{25} = \frac{0{,}52 + 0{,}53}{2} \Rightarrow \frac{k}{25} = 0{,}525$

$\Rightarrow k = 13{,}125 \Rightarrow 985 - 13{,}125 = \boxed{971{,}875\,g}$ es el peso del más ligero dentro del 70% de los que más pesan.

3 b) $\int \frac{2x}{\sqrt{1+3x^2}}dx = \left[\begin{array}{l} t = 1+3x^2 \\ dt = 6x\,dx = 3 \cdot 2x\,dx \Rightarrow 2x\,dx = \frac{1}{3}dt \end{array}\right] =$

$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{t}}dt = \frac{1}{3}\int t^{-1/2}dt = \frac{1}{3}t^{1/2} = \boxed{\frac{1}{3}\sqrt{1+3x^2} + C}$

5 Interpretación geométrica del teorema del valor medio integral



$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$