Unidad 8

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD Y MUESTRAS

Contenidos:

Objetivos fundamentales:

1. *Conocer los conceptos básicos de las distribuciones de probabilidad.*
2. *Conocer y saber usar las distribuciones binomial y normal, calculando probabilidades mediante dichas distribuciones.*
3. *Conocer algunos métodos de muestreo.*
4. *Saber las distribuciones de algunos estadísticos muestrales:*
   a. *Media muestral*
   b. *Proporción*

PARTE I: DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

1. VARIABLES ALEATORIAS

Frecuentemente, al realizar un experimento aleatorio nos interesa más que el resultado completo del experimento una función real de los resultados. Por ejemplo, si el experimento aleatorio consiste en lanzar tres veces una moneda, podemos estar interesados en determinar el número de caras obtenidas y para ello definimos una función *X* que asigna un valor numérico (número de caras) a cada resultado del experimento. De esta manera, si denotamos por *C* al suceso "salir cara" y por *F* al suceso "salir cruz", tenemos por ejemplo que *X*(FCF) = 2 o que *X*(FFF) = 0. Tales funciones, cuyos valores dependen de los resultados de un experimento aleatorio, se llaman variables aleatorias.

Las variables aleatorias y sus distribuciones de probabilidad pueden considerarse una generalización del concepto frecuentista de probabilidad. Se introducen como el ***modelo matemático*** ideal al que se aproximan las distribuciones de frecuencias que se obtendrían en una repetición indefinida de pruebas de un experimento.

Por ello, nos recuerdan a las variables estadísticas y a sus distribuciones de frecuencia estudiadas en Estadística Descriptiva.

Llamaremos *variable aleatoria* a toda función que asocia a cada elemento del espacio muestral Ω un número real.

$$X:\Omega \to \mathbb{R}$$
$$\omega \longrightarrow X(\omega) \in \mathbb{R}$$

Las variables aleatorias **se clasifican** en discretas y continuas, dependiendo de si dicha variable toma valores aislados (variable discreta) o los toma en un intervalo (variable continua).

Ejemplos 1:

1) Se tira una moneda tres veces y se observa la sucesión de caras y cruces. El espacio muestral se compone de los 8 siguientes elementos:

$$\Omega = \{ccc, ccx, cxc, xcc, xcx, xxc, cxx, xxx\}$$

Sea X el número de caras que van saliendo. Se tiene que X es una variable aleatoria que toma los siguientes valores:

X(ccc) = 3
X(ccx) = X(cxc) = X(xcc) = 2
X(cxc) = X(xxc) = X(cxx) = 1
X(xxx) = 0

X es por tanto una variable aleatoria discreta que toma los valores 0, 1, 2 y 3.

$$X:\Omega \to \{0,1,2,3\}$$

2) Se escoge un punto al azar en un círculo de radio r. Sea X la distancia del punto al centro del círculo.
Entonces, X es una variable aleatoria continua y su espacio de valores es el intervalo cerrado cuyos extremos son 0 y r, es decir:

$$X:\Omega \to [0,r] \qquad \square$$

Asociada a una variable aleatoria X tenemos una función

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$F(x) = P(X \le x)$$

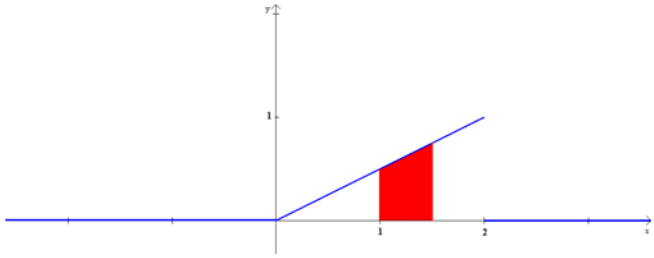
que llamaremos **función de distribución** de la variable aleatoria X.

Ejemplo 2:

Sea X una variable aleatoria continua con la siguiente función de distribución F:

$$F(x) = \begin{cases} 0.5x & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La gráfica de F es:



$P[1 \le X \le 1{,}5]$ = *Área de la región sombreada del dibujo* $= \dfrac{5}{16}$

2. *DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD*

Las distribuciones de probabilidad son modelizaciones de las correspondientes distribuciones estadísticas de frecuencias.

Se clasifican en discretas y continuas, dependiendo de que la correspondiente distribución estadística sea discreta o continua.

2.1. Distribuciones de probabilidad discretas

Se llama **distribución de probabilidad** de una variable aleatoria discreta X a la tabla

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_{n-1}	x_n
$p_i = P(X = x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_{n-1}	p_n

La aplicación que asocia a cada valor de la variable su correspondiente probabilidad se denomina *función masa de probabilidad*:

$$x_i \longrightarrow P(X = x_i)$$

que está **caracterizada** por las siguientes dos propiedades:

a) $p_i \ge 0 \quad \forall i$

b) $\sum p_i = 1$

EJERCICIO:

1. En una caja hay chinchetas, unas están bien fabricadas y otras tienen algún defecto, con igual probabilidad. Elegimos dos chinchetas, y consideramos la variable aleatoria "número de chinchetas defectuosas". Se pide:

a) El espacio muestral y determinar si la variable aleatoria es discreta.

b) Construir la distribución de probabilidad y comprobar que se cumplen las dos propiedades que la caracterizan.

Los **parámetros** asociados a una distribución de probabilidad son:

Esperanza matemática o media: $\boxed{EX = \sum x_i \cdot p_i}$ (también se representa por μ)

Varianza: $\boxed{Var(X) = \sum (x_i - \mu)^2 \cdot p_i}$ (también se representa por σ^2)

Desviación típica: $\boxed{\sigma = +\sqrt{Var(X)}}$

EJERCICIOS:

2. Calcular los parámetros de la distribución del ejercicio anterior.

3. Lanzamos tres monedas al aire, y consideramos la variable aleatoria "número de caras obtenidas. Se pide:
   a) El espacio muestral y la variable aleatoria.
   b) Construir la distribución de probabilidad.
   c) Calcular la esperanza matemáticas, la varianza y la desviación típica.

2.2. Distribuciones de probabilidad continuas

Una variable aleatoria es continua cuando puede tomar un número infinito de valores de la recta real.

La distribución de probabilidad asociada a una variable aleatoria continua se llama *distribución de probabilidad continua*.

En dichas distribuciones de probabilidad, la probabilidad de un valor concreto es cero, y este caso lo que se hace es que **se calculan probabilidades asociadas a intervalos**: $P(a \le X \le b)$

Se define la **función de densidad o curva de probabilidad** $f(x)$, cuya grafica nos dice cuales son las zonas donde están los valores más probables, es decir, las zonas más densas en probabilidad.

Propiedades que caracterizan a la función de densidad:

(1) Su gráfica junto con el eje de abscisas encierra un área igual a 1:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

(2) $f(x) \ge 0 \quad \forall x \in Dom(f)$

Relación entre f y F:

► Conocida f:

$$\boxed{F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt}$$

► Conocida F:

$$\boxed{F'(x) = f(x)}$$

Ejemplo 3:

Vamos a calcular la función de densidad de la variable aleatoria del ejemplo 2. Para ello, derivamos la función de distribución:

$$F'(x)=\begin{cases}0,5 & \text{si } 0\le x\le 2\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}=f(x)$$

En este caso, es inmediato comprobar que se cumplen las propiedades (1) y (2):

$f(x)=0,5\ge 0 \quad \forall x\in[0,2]$

$A=$ área de un rectángulo $=2\cdot 0,5=1$

3. *LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL*

La distribución binomial es una de las distribuciones discretas más útiles, ya que su área de aplicación incluye:

- inspección de calidad
- control de defectos
- calidad del servicio de telefonía
- ventas (marketing)
- mercadotecnia
- medicina
- investigación de opiniones…

Supongamos un experimento del que sólo nos interesa la ocurrencia o no ocurrencia de un evento concreto. Sin pérdida de generalidad llamaremos éxito a la ocurrencia de dicho evento y fracaso a la no ocurrencia. La probabilidad de éxito es p y la de fracaso $1-p=q$.

Supongamos además que el experimento se realiza n veces y cada una de las realizaciones es independiente de las demás.

Sea X la variable aleatoria que representa el "número de éxitos" obtenidos en las n realizaciones del experimento.

Las dos suposiciones clave para la distribución binomial son las siguientes:

- la probabilidad de éxito p permanece constante para cada ensayo
- las n realizaciones son independientes entre sí.

En las condiciones anteriores se dice que X sigue una distribución binomial de parámetros n y p, si su función masa de probabilidad es:

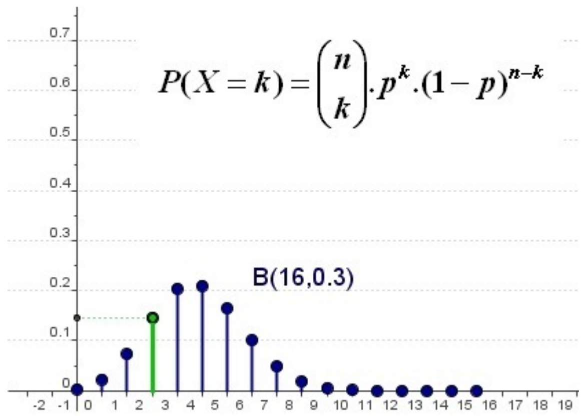
$$\boxed{P(X=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k} \quad \text{para } k=0,1,\dots,n}$$

donde: $\binom{n}{k}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ se denomina número combinatorio y se lee "n sobre k"

$$\left.\begin{array}{l} n!=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1\\ 0!=1\end{array}\right\}\text{se denomina factorial de } n$$

Se la variable aleatoria X tiene se ajusta a una distribución binomial, escribiremos:

$$\boxed{X\longrightarrow \mathfrak{B}(n,p)}$$



Ejemplo:
La probabilidad de que cierta semilla germine en unas determinadas condiciones es 0,4. Si en dichas condiciones se siembran 30 semillas, y se considera la variable aleatoria *X*, que expresa el número de semillas que germinan, se observa que *X* sigue una distribución binomial $\mathfrak{B}(30\ ,\ 0{,}4)$.
Hallar la probabilidad de que germinen 5 semillas.

$$P(X=5)=\binom{30}{5}0{,}4^5\cdot 0{,}6^{30-5}=0{,}00414$$

¿Y la probabilidad de que germinen como mucho 5 semillas?

$$P(X\le 5)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)=0{,}0056588$$

(en este caso, los cálculos hay que hacerlos con ordenador, o mediante una aproximación de la binomial que no vamos a ver).

Ejemplo:
Un examen tipo consta de diez preguntas, cada una de ellas con tres respuestas, de forma que sólo una es correcta. Un estudiante que no ha preparado la materia decide contestar al azar a todas ellas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de acertar seis preguntas?
b) ¿Y la probabilidad de no acertar ninguna?

Sea *X* = número de respuestas acertadas. Se tiene que $X\longrightarrow\mathfrak{B}\left(10,\frac{1}{3}\right)$.

a) $P(X=6)=\binom{10}{6}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^6\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^4=0{,}0569$

b) $P(X=0)=\binom{10}{0}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^0\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{10}=0{,}0173$

EJERCICIOS:

4. Un arquero tiene una probabilidad de hacer blanco. Si realiza cuatro disparos, calcula:
a) La probabilidad de hacer dos blancos.
b) La probabilidad de hacer dos o más blancos.

5. La probabilidad de nacimientos de niños varones en España es de 51,7%. Halla la probabilidad de que una familia de 5 hijos tenga:
a) Por lo menos una niña.

b) Por lo menos un niño.

6. La probabilidad de que un estudiante obtenga el título de arquitecto es de 0,3. Calcula la probabilidad de que de un grupo de siete estudiantes matriculados en primer curso:
a) Los siete finalicen la carrera.
b) Al menos dos acaben la carrera.

Los **parámetros** (media, varianza y desviación típica) de una distribución binomial son:

Esperanza matemática (media): $\boxed{EX = np}$

Varianza: $\boxed{\sigma^2 = npq}$

Desviación típica: $\boxed{\sigma = +\sqrt{npq}}$

Ejemplo:
La probabilidad de que un libro salga defectuoso en una determinada imprenta es del 3 %. Calcular:
a) El número de libros defectuosos esperados en un lote de 10 000.
b) La varianza y la desviación típica de esta distribución.

Sea X = el libro es defectuoso. Se tiene que $X \longrightarrow \mathfrak{B}(10000\ ,\ 0,03)$.

a) El número de libros defectuosos esperados es igual a la media de la distribución:
$$EX = np = 10000 \cdot 0,03 = 300$$
es decir, se espera que haya 300 defectuosos en el lote.

b) Varianza:
$$Var(X) = npq = 10000 \cdot 0,03 \cdot 0,97 = 291$$

c) Desviación típica:
$$\sigma = +\sqrt{npq} = +\sqrt{291} = 17,05$$

EJERCICIO:

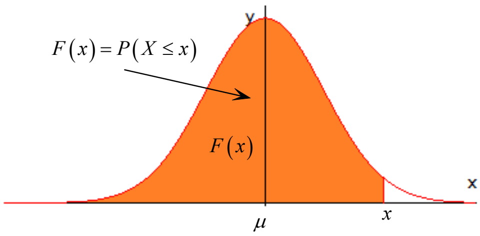
7. Calcular la esperanza matemática (media), la varianza y la desviación típica de los ejercicios 4, 5 y 6.

4. LA DISTRIBUCIÓN NORMAL

Una **distribución** correspondiente a una variable continua se dice **normal** si su función de densidad es:

$$\boxed{\begin{array}{l} f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \end{array}}$$

y se representa por $\boxed{X \longrightarrow N(\mu, \sigma)}$, con $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$, donde μ representa la media (esperanza matemática) y σ la desviación típica.



Se llama Normal porque es muy frecuente, apareciendo en circunstancias muy inesperadas (antes se creía que todas eran así). Otras veces aparece una distribución muy parecida a la normal, que puede tratarse como si lo fuera.

En el caso $\mu=0$ y $\sigma=1$ se denomina **distribución normal tipificada** y su función de distribución correspondiente está tabulada, por lo que *siempre hay que pasar a una* $N(0,1)$:

$$\boxed{X \to N(\mu,\sigma) \longrightarrow Z=\frac{X-\mu}{\sigma} \to N(0,1)}$$

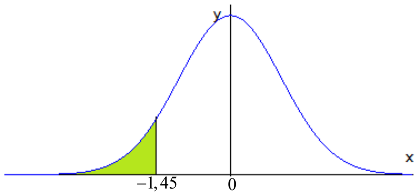
5. USO DE TABLAS

(1) $P(Z\le 1,45)=0,9265$

Para calcular esta probabilidad, basta con mirar en la tabla: $P(Z\le 1,45)=0,9265$

(2) $P(Z\le -1,45)$

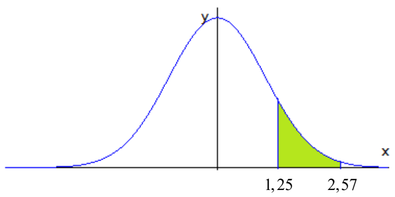
Para calcular esta probabilidad hay que tener en cuenta la simetría de la distribución normal y aplicar la propiedad que relaciona la probabilidad de un suceso con su contrario ($P(\overline{A})=1-P(A)$):



$$P(Z\le -1,45)=P(Z\ge 1,45)=1-P(Z\le 1,45)=$$
$$=1-0,9265=0,0735$$

(3) $P(1,25\le Z\le 2,57)$

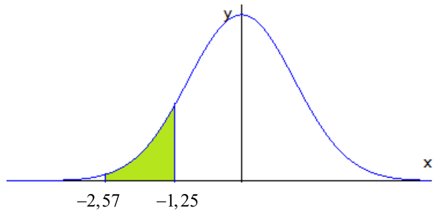
Interpretando esta probabilidad como áreas se tiene la siguiente igualdad:



$$P(1,25\le Z\le 2,57)=P(Z\le 2,57)-P(Z\le 1,25)=$$
$$=0,9949-0,8944=0,1005$$

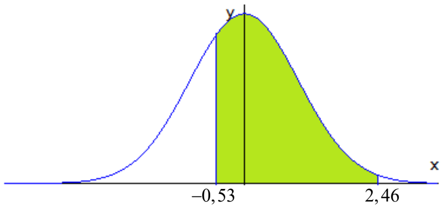
(4) $P(-2,57\le Z\le -1,25)$

Para calcular esta probabilidad tenemos en cuenta la simetría de la distribución:



$$P(-2,57\le Z\le -1,25)=P(1,25\le Z\le 2,57)=$$
$$=0,1005$$

(5) $P(-0,53 \le Z \le 2,46)$



Aplicaremos lo visto en los apartados anteriores:

$$P(-0,53 \le Z \le 2,46) = P(Z \le 2,46) - P(Z \le -0,53) =$$
$$= P(Z \le 2,46) - P(Z \ge 0,53) =$$
$$= P(Z \le 2,46) - \left[1 - P(Z \le 0,53)\right] = 0,695$$

EJERCICIOS:

8. *En una distribución normal N(110, 10), calcula:*
a) $P(X > 110)$
b) $P(110 < X < 120)$
c) $P(X < 130)$

9. *Halla las siguientes probabilidades:*
a) $P(Z \le 0.84)$ *c)* $P(Z < 2)$
b) $P(Z < 1.5)$ *d)* $P(Z < 1.87)$

10. *Calcula el valor de k en cada caso:*
a) $P(Z \le k) = 0.719$ *b)* $P(Z < k) = 0.8997$ *c)* $P(Z < k) = 0.5040$

11. *Halla:*
a) $P(Z > 1.3)$ *d)* $P(1.3 < Z < 1.96)$
b) $P(Z < -1.3)$ *e)* $P(-1.96 < Z < -1.3)$
c) $P(Z > -1.3)$ *f)* $P(-1.96 < Z < 1.96)$

PROBLEMAS:

12. *En un centro hay 500 alumnos cuyas estaturas se distribuyen según la curva normal, de media 170 cm y desviación típica 8 cm.*
a) ¿Cuántos alumnos tienen su estatura comprendida entre 162 y 178 cm?
b) ¿Cuántos medirán más de 186 cm?

13. *Una máquina realiza piezas de precisión con un diámetro medio de 8 mm y una desviación de 0,5 mm. Suponiendo que la distribución es normal, calcula la probabilidad de que una pieza tomada al azar tenga un diámetro:*
a) Mayor que 8,5 mm
b) Menor que 7,5 mm
c) Comprendido entre 7 y 9 mm

14. *Para aprobar un examen de ingreso en una escuela, se necesita obtener 50 puntos o más. Por experiencia de años anteriores, sabemos que la distribución de puntos obtenidos por los alumnos es normal, con media 55 puntos y desviación típica 10.*
a) ¿Qué probabilidad hay de que un alumno apruebe?

b) Si se presentan al examen 400 alumnos, ¿cuántos cabe esperar que ingresen en esa escuela?

15. En una ciudad, las temperaturas máximas diarias durante el mes de julio se distribuyen normalmente con una media de 26 °C y una desviación típica de $4\,^{\circ}\mathrm{C}$. ¿Cuántos días se puede esperar que tengan una temperatura máxima comprendida entre 22 °C y 28 °C?

PARTE II: MUESTREO

6. *CONCEPTOS BÁSICOS*

Población. Es el conjunto de individuos susceptibles de poseer la información buscada.

Muestra. Parte de la población en la que se miden las características estudiadas.

El número de individuos de la muestra se llama **tamaño**.

Muestreo. Es el proceso seguido para la extracción de una muestra. Nosotros estudiaremos el muestreo probabilístico que es aquel en el que la muestra se elige por métodos aleatorios.

Encuesta. Es el proceso de obtener la información buscada entre los elementos de la muestra.

7. *MÉTODOS DE MUESTREO*

- **Muestreo aleatorio simple (m.a.s.)**

Es aquel que satisface los siguientes dos criterios:

a) Cada individuo debe tener la misma probabilidad de ser elegido.
b) La selección de un individuo no debe afectar a la probabilidad de que sea seleccionado cualquier otro. Esto implica que la elección debería hacerse con reemplazamiento; aunque ello comporte que algún individuo pueda ser elegido más de una vez.

- **Muestreo sistemático (no es aleatorio)**

Se ordenan los individuos de la población; después se elige uno de ellos al azar; a continuación, a intervalos constantes, se eligen todos los demás hasta completar la muestra.

- **Muestreo estratificado (proporcional)**

Este tipo de muestreo divide la población total en clases homogéneas, llamadas estratos. Hecho esto, la muestra se escoge aleatoriamente en número proporcional al de los componentes de cada clase o estrato.

8. *NÚMERO DE MUESTRAS*

Si una población está formada por N elementos, el número de muestras diferentes de tamaño n que pueden obtenerse, sin repetir elementos, es

$$\binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

Si pueden repetirse, como en el m.a.s., estas muestras serían

$$N^n$$

pues en cada elección vuelven a estar los N elementos iniciales.

9. DISTRIBUCIONES MUESTRALES

Distribución de medias muestrales

Elegida una muestra, hallaremos en ella la media $\overline{x}$ y la desviación típica s. Pero ¿hasta qué punto esas $\overline{x}$ y s serán representativas de la media μ y la desviación típica σ de la población?

Una **muestra** es **representativa** cuando describe acertadamente las características de la población original: sus parámetros serán aproximadamente iguales a los de la población. Pero cada muestra tendrá una media y desviación típica que pueden ser diferentes a las de otra muestra; así pues, nunca podremos estar seguros de que los parámetros obtenidos en la muestra elegida sean buenos estimadores de los parámetros poblacionales; no obstante, hay un par de cosas ciertas:

1) La media de las medias muestrales es igual a la media real de la población:

$$\boxed{\overline{X} = \frac{\sum \overline{x}_i}{\text{nº de muestras posibles}} = \mu}$$

donde $\overline{x}_i$ es la media de la muestra M_i, $\overline{X}$ la media de las medias muestrales y μ la media de la población.

2) La desviación típica de las medias muestrales vale

$$\boxed{\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Esto significa que la ***distribución de las medias muestrales***[1] de tamaño n, extraídas de una población normal $N(\mu, \sigma)$, se ajusta a una normal $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$:

$$\boxed{\overline{X} \to N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}$$

Estos resultados nos permiten afirmar:

a) El 50 % de las medias muestrales será inferior a la media μ de la población.

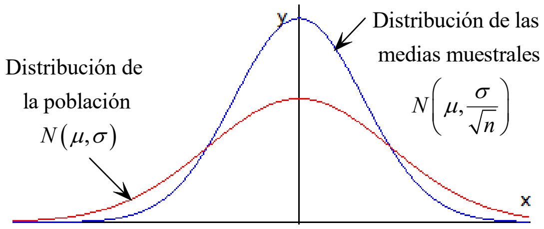
b) El 68,26 % de las muestras tendrá una media perteneciente al intervalo

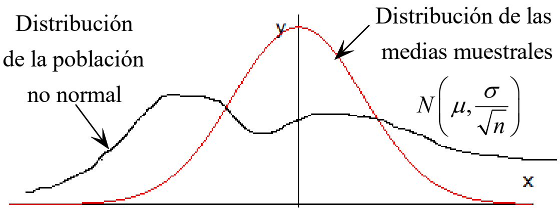
$$\left(\mu - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

[1] La distribución de las medias muestrales es normal incluso en el caso de que éstas procedan de poblaciones no normales, siempre que el tamaño de la muestra sea suficientemente grande ($n \geq 30$). Esto se demuestra mediante el llamado Teorema Central del Límite.

c) El 69.15% de las muestras tendrá una media mayor que $\mu - 0.5\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Interpretación gráfica:





PROBLEMAS:

16. *Se toma una muestra aleatoria de 64 personas en una población de 100 000, de forma que una de sus características se distribuye normalmente con media μ = 10 y desviación típica* $\sigma = 3$. *Se pide calcular:*
a) La probabilidad de que la media de la muestra esté comprendida entre 9 y 11.
b) La probabilidad de que la media de la muestra sea mayor que 11.

17. *Si se sabe que la distribución muestral de medidas para muestras de tamaño 16 tiene varianza 8, ¿cuál será la desviación típica de la población original?*

18. *Ciertas pilas eléctricas fabricadas por una compañía tienen una duración de 900 horas y una desviación típica de 80 horas. La compañía vende todas las semanas 1 000 lotes de 100 pilas cada uno. Se pide calcular:*
a) ¿En cuántos lotes cabe esperar que la media de las duraciones sobrepase las 910 horas?
b) La probabilidad de que una muestra al azar de 64 pilas tenga una duración media mayor que 910 horas.

19. *La estatura media de la población comprendida entre 20 y 30 años de cierto barrio es de 176 cm, con desviación típica de 10 cm.*
a) ¿Cuál es la probabilidad de que una muestra de 36 personas tenga una estatura media de 176 cm o más?
b) ¿Y de que la media de esta muestra sea menor de 170 cm?

Distribución para proporciones

Cuando se trata de determinar la proporción de una población que posee un cierto atributo, su estudio es equiparable al de una distribución binomial. Así pues, si la probabilidad de éxito en la población es p y la de fracaso $q = 1 - p$, y tomamos muestras aleatorias de tamaño *n*, entonces la proporción, $\widehat{P}$, y la desviación típica, $\sigma_{\widehat{P}}$, de las muestras vienen dadas por:

$$\boxed{\widehat{P} = p \quad \text{y} \quad \sigma_{\widehat{P}} = \sqrt{\frac{pq}{n}}}$$

Esta distribución es aproximadamente normal para valores grandes de n $(n \geq 30)$. En consecuencia:

$$\boxed{\widehat{P} \longrightarrow N\left(p, \sqrt{\frac{pq}{n}}\right)}$$

Observa que los parámetros de las proporciones muestrales de tamaño *n* se obtienen dividiendo los parámetros binomiales entre *n*:

Distribución binomial

$$\mu = np \qquad \sigma = \sqrt{npq}$$

Distribución muestral

$$\boxed{\widehat{P} = p \qquad \sigma_{\widehat{P}} = \sqrt{\frac{pq}{n}}}$$

PROBLEMAS:

20. *En unas elecciones al Consejo Escolar, el 56 % de los alumnos optó por el candidato A mientras que el 44 % lo hizo por el candidato B.*

a) Halla la distribución de probabilidad de las muestras de tamaño 50 extraídas de la población. Haz lo mismo para las de tamaño 100.

b) Calcula la probabilidad de que en una muestra de 50 votantes haya, al menos, 30 favorables al candidato A.

c) Si la muestra es de tamaño 100, ¿cuál es la probabilidad de que una mayoría apoye al candidato B?

21. *Una compañía de seguros ha hecho un estudio sobre accidentes de tráfico y ha concluido que tres de cada cinco personas accidentadas son menores de 25 años. Si al año se contabilizan, por término medio, 1000 accidentes de tráfico, encuentra los elementos de la distribución de proporciones y halla el número esperado, por término medio, de jóvenes accidentados ese año.*

22. *Una máquina fabrica piezas de precisión. En su producción habitual fabrica un 3% de piezas defectuosas. Un cliente recibe una caja de 500 piezas procedentes de la fábrica.*

a) ¿Cuál es la probabilidad de que encuentre más del 5% de piezas defectuosas en la caja?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que encuentre menos de un 1% de piezas defectuosas?

TABLA DE LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

Probabilidad de obtener k éxitos

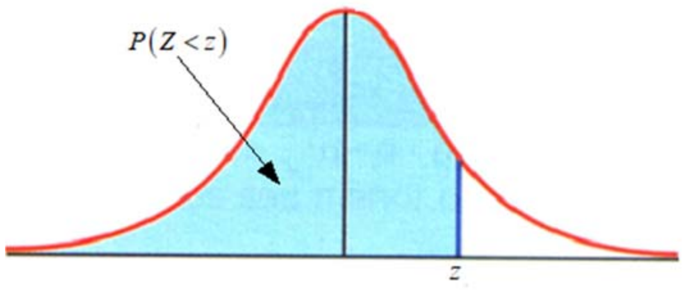
$$X \to \mathrm{B}(n, p)$$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

n	k	p	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
2	0		0,9801	0,9025	0,8100	0,7225	0,6400	0,5625	0,4900	0,4449	0,4225	0,3600	0,3025	0,2601	0,2500
	1		0,0198	0,0950	0,1800	0,2550	0,3200	0,3750	0,4200	0,4442	0,4550	0,4800	0,4950	0,4998	0,5000
	2		0,0001	0,0025	0,0100	0,0225	0,0400	0,0625	0,0900	0,1109	0,1225	0,1600	0,2025	0,2401	0,2500
3	0		0,9703	0,8574	0,7290	0,6141	0,5120	0,4219	0,3430	0,2967	0,2746	0,2160	0,1664	0,1327	0,1250
	1		0,0294	0,1354	0,2430	0,3251	0,3840	0,4219	0,4410	0,4444	0,4436	0,4320	0,4084	0,3823	0,3750
	2		0,0003	0,0071	0,0270	0,0574	0,0960	0,1406	0,1890	0,2219	0,2389	0,2880	0,3341	0,3674	0,3750
	3		0,0000	0,0001	0,0010	0,0034	0,0080	0,0156	0,0270	0,0369	0,0429	0,0640	0,0911	0,1176	0,1250
4	0		0,9606	0,8145	0,6561	0,5220	0,4096	0,3164	0,2401	0,1979	0,1785	0,1296	0,0915	0,0677	0,0625
	1		0,0388	0,1715	0,2916	0,3685	0,4096	0,4219	0,4116	0,3953	0,3845	0,3456	0,2995	0,2600	0,2500
	2		0,0006	0,0135	0,0486	0,0975	0,1536	0,2109	0,2646	0,2960	0,3105	0,3456	0,3675	0,3747	0,3750
	3		0,0000	0,0005	0,0036	0,0115	0,0256	0,0469	0,0756	0,0985	0,1115	0,1536	0,2005	0,2400	0,2500
	4		0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0016	0,0039	0,0081	0,0123	0,0150	0,0256	0,0410	0,0576	0,0625
5	0		0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1320	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313
	1		0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3295	0,3124	0,2592	0,2059	0,1657	0,1563
	2		0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3291	0,3364	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125
	3		0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1643	0,1811	0,2304	0,2757	0,3060	0,3125
	4		0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0410	0,0488	0,0768	0,1128	0,1470	0,1563
	5		0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102	0,0185	0,0282	0,0313
6	0		0,9415	0,7351	0,5314	0,3771	0,2621	0,1780	0,1176	0,0881	0,0754	0,0467	0,0277	0,0176	0,0156
	1		0,0571	0,2321	0,3543	0,3993	0,3932	0,3560	0,3025	0,2638	0,2437	0,1866	0,1359	0,1014	0,0938
	2		0,0014	0,0305	0,0984	0,1762	0,2458	0,2966	0,3241	0,3292	0,3280	0,3110	0,2780	0,2436	0,2344
	3		0,0000	0,0021	0,0146	0,0415	0,0819	0,1318	0,1852	0,2191	0,2355	0,2765	0,3032	0,3121	0,3125
	4		0,0000	0,0001	0,0012	0,0055	0,0154	0,0330	0,0595	0,0821	0,0951	0,1382	0,1861	0,2249	0,2344
	5		0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0015	0,0044	0,0102	0,0164	0,0205	0,0369	0,0609	0,0864	0,0938
	6		0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0007	0,0014	0,0018	0,0041	0,0083	0,0138	0,0156

7	**0**	0,9321	0,6983	0,4783	0,3206	0,2097	0,1335	0,0824	0,0587	0,0490	0,0280	0,0152	0,0090	0,0078
	1	0,0659	0,2573	0,3720	0,3960	0,3670	0,3115	0,2471	0,2053	0,1848	0,1306	0,0872	0,0604	0,0547
	2	0,0020	0,0406	0,1240	0,2097	0,2753	0,3115	0,3177	0,3074	0,2985	0,2613	0,2140	0,1740	0,1641
	3	0,0000	0,0036	0,0230	0,0617	0,1147	0,1730	0,2269	0,2558	0,2679	0,2903	0,2918	0,2786	0,2734
	4	0,0000	0,0002	0,0026	0,0109	0,0287	0,0577	0,0972	0,1277	0,1442	0,1935	0,2388	0,2676	0,2734
	5	0,0000	0,0000	0,0002	0,0012	0,0043	0,0115	0,0250	0,0383	0,0466	0,0774	0,1172	0,1543	0,1641
	6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0013	0,0036	0,0064	0,0084	0,0172	0,0320	0,0494	0,0547
	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0005	0,0006	0,0016	0,0037	0,0068	0,0078
8	**0**	0,9227	0,6634	0,4305	0,2725	0,1678	0,1001	0,0576	0,0392	0,0319	0,0168	0,0084	0,0046	0,0039
	1	0,0746	0,2793	0,3826	0,3847	0,3355	0,2670	0,1977	0,1565	0,1373	0,0896	0,0548	0,0352	0,0313
	2	0,0026	0,0515	0,1488	0,2376	0,2936	0,3115	0,2965	0,2734	0,2587	0,2090	0,1569	0,1183	0,1094
	3	0,0001	0,0054	0,0331	0,0839	0,1468	0,2076	0,2541	0,2730	0,2786	0,2787	0,2568	0,2273	0,2188
	4	0,0000	0,0004	0,0046	0,0185	0,0459	0,0865	0,1361	0,1704	0,1875	0,2322	0,2627	0,2730	0,2734
	5	0,0000	0,0000	0,0004	0,0026	0,0092	0,0231	0,0467	0,0680	0,0808	0,1239	0,1719	0,2098	0,2188
	6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0011	0,0038	0,0100	0,0170	0,0217	0,0413	0,0703	0,1008	0,1094
	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0012	0,0024	0,0033	0,0079	0,0164	0,0277	0,0313
	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0002	0,0007	0,0017	0,0033	0,0039
9	**0**	0,9135	0,6302	0,3874	0,2316	0,1342	0,0751	0,0404	0,0261	0,0207	0,0101	0,0046	0,0023	0,0020
	1	0,0830	0,2985	0,3874	0,3679	0,3020	0,2253	0,1556	0,1174	0,1004	0,0605	0,0339	0,0202	0,0176
	2	0,0034	0,0629	0,1722	0,2597	0,3020	0,3003	0,2668	0,2345	0,2162	0,1612	0,1110	0,0776	0,0703
	3	0,0001	0,0077	0,0446	0,1069	0,1762	0,2336	0,2668	0,2731	0,2716	0,2508	0,2119	0,1739	0,1641
	4	0,0000	0,0006	0,0074	0,0283	0,0661	0,1168	0,1715	0,2045	0,2194	0,2508	0,2600	0,2506	0,2461
	5	0,0000	0,0000	0,0008	0,0050	0,0165	0,0389	0,0735	0,1021	0,1181	0,1672	0,2128	0,2408	0,2461
	6	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0028	0,0087	0,0210	0,0340	0,0424	0,0743	0,1160	0,1542	0,1641
	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0012	0,0039	0,0073	0,0098	0,0212	0,0407	0,0635	0,0703
	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0009	0,0013	0,0035	0,0083	0,0153	0,0176
	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0003	0,0008	0,0016	0,0020
10	**0**	0,9044	0,5987	0,3487	0,1969	0,1074	0,0563	0,0282	0,0174	0,0135	0,0060	0,0025	0,0012	0,0010
	1	0,0914	0,3151	0,3874	0,3474	0,2684	0,1877	0,1211	0,0870	0,0725	0,0403	0,0207	0,0114	0,0098
	2	0,0042	0,0746	0,1937	0,2759	0,3020	0,2816	0,2335	0,1955	0,1757	0,1209	0,0763	0,0494	0,0439
	3	0,0001	0,0105	0,0574	0,1298	0,2013	0,2503	0,2668	0,2603	0,2522	0,2150	0,1665	0,1267	0,1172
	4	0,0000	0,0010	0,0112	0,0401	0,0881	0,1460	0,2001	0,2274	0,2377	0,2508	0,2384	0,2130	0,2051
	5	0,0000	0,0001	0,0015	0,0085	0,0264	0,0584	0,1029	0,1362	0,1536	0,2007	0,2340	0,2456	0,2461
	6	0,0000	0,0000	0,0001	0,0012	0,0055	0,0162	0,0368	0,0567	0,0689	0,1115	0,1596	0,1966	0,2051
	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0008	0,0031	0,0090	0,0162	0,0212	0,0425	0,0746	0,1080	0,1172
	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0014	0,0030	0,0043	0,0106	0,0229	0,0389	0,0439
	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0005	0,0016	0,0042	0,0083	0,0098
	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0008	0,0010

TABLA DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7704	0,7793	0,7823	0,7652
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8364	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8930
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9235	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9485	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9762	0,9767
2,0	0,9773	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9934	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9865	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9975	0,9975	0,9976	0,9977	0,9978	0,9978	0,9979	0,9980	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0.9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999