Unidad 5

DERIVADAS. APLICACIONES

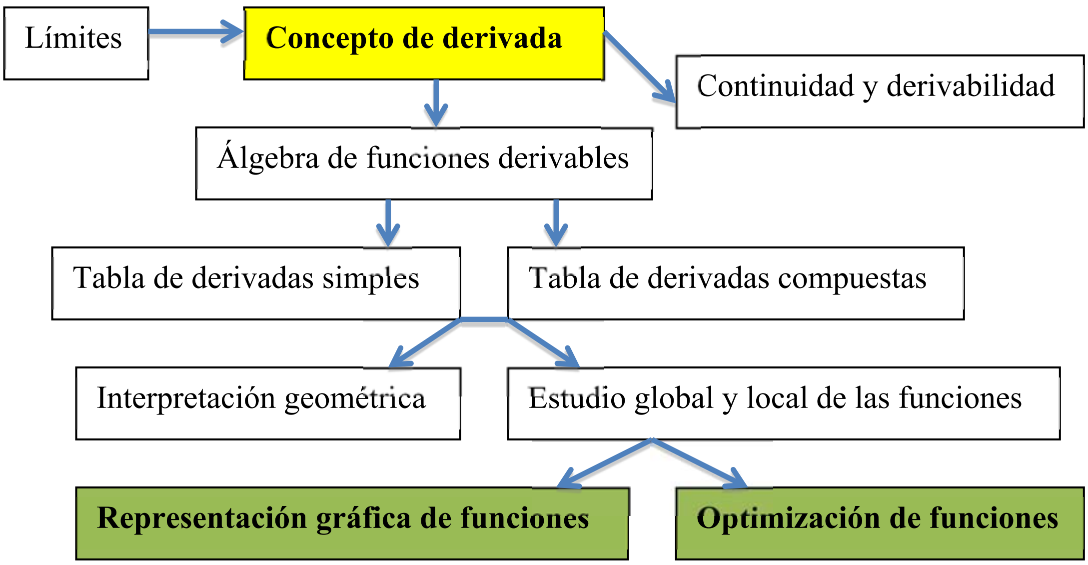
CONTENIDOS

Objetivos fundamentales

1. Conocer el concepto de derivada de una función en un punto y saber calcular derivadas de funciones sencillas, mediante la aplicación de la definición.
2. Saber calcular la función derivada de las funciones elementales, así como de funciones compuestas.

3. Conocer la interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto y saber aplicarla en la resolución de problemas.
4. Interpretar la derivabilidad de una función a partir de su representación gráfica.
5. Saber calcular la derivada segunda, tercera y cuarta de una función.
6. Estudiar global y localmente una función.
7. Representar gráficamente funciones polinómicas, racionales y definidas a trozos.
8. Optimizar funciones sencillas y resolver problemas donde haya que optimizar una función.

1.- MAPA CONCEPTUAL DE LA UNIDAD



2.- TASA DE VARIACIÓN

Muchas leyes de la Física, la Química, la Biología o la Economía, son funciones que relacionan una variable "dependiente" y con otra variable "independiente" x, lo que suele escribirse en la forma $y = f(x)$. Si la variable independiente cambia de un valor inicial a a otro x, la variable y lo hace de $f(a)$ a $f(x)$. La *razón de cambio promedio (o tasa de variación media) de* $y = f(x)$ *con respecto a x en el intervalo* $[a,x]$ *es:*

$$\text{Razón de cambio promedio} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \equiv \text{Tvm}[a,x]$$

Con frecuencia interesa considerar la razón de cambio en intervalos cada vez más pequeños. Esto lleva a definir lo que podemos llamar "*razón de cambio puntual* (*o instantánea*) de $y = f(x)$ *con respecto a x en el punto a" como:*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \equiv \text{Tvi}(a)$$

<u>Ejemplo 1.</u> La tasa de variación media de la función $f(x) = x^2 - 2x$ en los intervalos $[-2,-1]$ y $[1,3]$ vale:

$$Tvm[-2,-1]=\frac{f(-1)-f(-2)}{-1-(-2)}=-5$$

$$Tvm[1,3]=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=2$$

Observa que, en el primer caso, la Tvm coincide con la variación de la función, pues nos hemos trasladado sólo una unidad a la derecha. En cambio, en el segundo caso, la Tvm es la media de las variaciones unitarias, que son:

$$Tvm[1,2]=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=1 \text{ y } Tvm[2,3]=\frac{f(3)-f(2)}{3-2}=3$$

Ejemplo 2. Entre Jaén y Cádiz hay 360 km por carretera. Si se viaja en automóvil, partiendo de Jaén a las 8 h y llegando a Cádiz a las 12 h, la velocidad media ha sido de 90 km/h. Para calcularla hemos dividido la variación del espacio recorrido (diferencia de distancias) entre la variación del tiempo transcurrido (diferencia de tiempos):

$$Tvm[\text{Jaén, Cádiz}]=\frac{\text{diferencia de distancias}}{\text{diferencia de tiempos}}=\frac{360}{12-8}=90$$

Ejemplo 3. El índice de precios al consumo (IPC) expresa la variación porcentual de los precios. Esta variación suele darse mensualmente y por años. El IPC de mayo de 2007 fue de 0.3 %. La acumulación de 12 meses seguidos es el IPC interanual, y coincide, aproximadamente, con la tasa de inflación del año considerado.

3.- CONCEPTO DE DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO Y DE FUNCIÓN DERIVADA. DERIVADAS LATERALES

En todo el tema y salvo que expresamente se diga otra cosa, $D=(\alpha,\beta)\subseteq\mathbb{R}$ es un intervalo abierto de números reales.

Sea $f:D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función real de variable real y $a\in D$. Se llama derivada de la función f en el punto a al límite siguiente, si existe y es finito:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \qquad [1]$$

Dicho límite, caso de existir, se representa[1] por: $f'(a)=\frac{df(a)}{dx}=Df(a)=\dot{f}(a)$.

$f'(a)$ se lee f prima en a

$\frac{df(a)}{dx}$ se lee derivada de f respecto de x en a

[1] La notación $\frac{d}{dx}f(a)$ fué introducida por Leibniz (1646-1716), y en ella se entiende que $\frac{d}{dx}$ es un operador, la notación $f'(a)$ fue introducida por Lagrange (1736-1813) y la notación $\dot{f}(a)$ sólo se suele usar en física, ingeniería…

Si en la definición anterior hacemos el cambio de variable $a+h=x$, el límite [1] se escribe como sigue:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \qquad [2]$$

Si $B\subseteq D$, diremos que f <u>es derivable en B</u> cuando f sea derivable en todos los puntos de B.

Sea $C=\{a\in D : f \text{ es derivable en } a\}$. Definimos la <u>función derivada de f</u> por:

$$f':C\to\mathbb{R}$$
$$a\in C\mapsto f'(a)$$

Los límites [1] y [2] son simplemente dos formulaciones "distintas" del concepto de derivada de una función en un punto. ¿Cuál usar entonces? La respuesta es que podemos usar una u otra indistintamente porque con ambas vamos a llegar al mismo resultado.

<u>Ejercicio 1.</u> *Calcula la derivada de las siguientes funciones en los puntos que se indican:*

a) $f(x)=x^2$ en $a=1$

b) $f(x)=3x^2-2x+1$ en $a=2$

c) $f(x)=3x^2-3x+1$ en $a=1$

d) $f(x)=\frac{3}{x}$ en $a=2$

Indicación: Usar la definición [2]

Una función $f:D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es

<u>derivable por la izquierda[2] en $x=a$</u> $\Leftrightarrow \exists f'(a-)=\lim_{x\to a-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\in\mathbb{R}$

<u>derivable por la derecha en $x=a$</u> $\Leftrightarrow \exists f'(a+)=\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\in\mathbb{R}$

<u>Caracterización:</u>

Son equivalentes:

1) f es derivable en $x=a$

2) $\exists f'(a-), f'(a+)$ y $f'(a-)=f'(a+)$

En cuyo caso, $f'(a)=f'(a-)=f'(a+)$

<u>Ejercicio 2.</u> *Indica en qué puntos es derivable la siguiente función:*

[2] Esta definición es equivalente a la siguiente: Una función $f:D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es

<u>derivable por la izquierda en $x=a$</u> $\Leftrightarrow \exists f'(a-)=\lim_{h\to 0-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\in\mathbb{R}$

<u>derivable por la derecha en $x=a$</u> $\Leftrightarrow \exists f'(a+)=\lim_{h\to 0+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\in\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases} x^2+3x & \text{si} \quad x\le 0 \\ x^3+3x & \text{si} \quad 0<x<2 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x\ge 2 \end{cases}$$

Ejercicio 3. *Halla el valor de* a *para que* $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & \text{si } x\le 1 \\ ax+1 & \text{si } x>1 \end{cases}$ *sea derivable en* $x=1$.

Ejercicio 4. *Estudiar la derivabilidad en* $x=1$*, y representar gráficamente la siguiente función.*

$$f(x)=\left|1-x^2\right|=\begin{cases} x^2-1 & x<-1 \\ 1-x^2 & -1\le x\le 1 \\ x^2-1 & x>1 \end{cases}$$

Ejercicio 5. *Consideremos la función* $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & 0<x<b \\ 1-\dfrac{1}{4}x & b\le x \end{cases}$

Se pide:

a) *Determinar el valor de b para que sea continua.*
b) *¿Es derivable* f *en el valor de b calculado en el apartado anterior?*

Aunque lo más habitual es que los intervalos donde se estudie la derivabilidad sean abiertos y de hecho es en intervalos abiertos donde se obtienen las mejores propiedades de las funciones derivables, daremos la definición de función derivable en un intervalo cerrado $[a,b]$, que es similar a la que dimos para funciones continuas en un tal intervalo.

Una función $y=f(x)$ es derivable en $[\alpha,\beta]$ cuando:

- sea derivable en (α,β)
- sea derivable por la derecha en α
- sea derivable por la izquierda en β

3.1. Derivabilidad de las funciones elementales

- Las **funciones polinómicas**,
$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$$
son derivables en todos los puntos.

- Las **funciones racionales**, $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, son derivables en su dominio.

- La **función exponencial**, $y=e^{f(x)}$, es derivable siempre que lo sea $f(x)$.

- La **función logarítmica**, $y = \log f(x)$, es derivable en todo punto x, tal que $f(x) > 0$ y $f(x)$ sea derivable.
- Las **funciones trigonométricas**, $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$, son siempre derivables. La función $y = \operatorname{tg} x$ es derivable en su dominio: $\mathbb{R} - \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \right\}$
- Las **funciones definidas a trozos** serán derivables si lo son en sus intervalos respectivos y en los puntos de unión. En estos puntos habrá que ver que la función esté definida y que las derivadas laterales existan y sean iguales.

4.- CONTINUIDAD Y DERIVABILIDAD: RELACIÓN

Propiedad 1: Si una función $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es derivable en un punto x_0, entonces es continua en x_0.

Este resultado también se puede utilizar en *sentido negativo*:

Propiedad 1': Si f no es continua en x_0, entonces no puede ser derivable en dicho punto.

En particular, las funciones derivables son continuas, pero ***no toda función continua es derivable***, como muestra el siguiente:

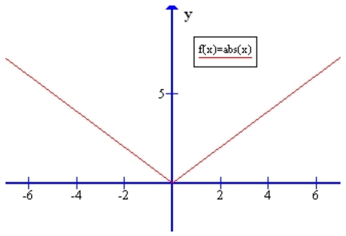
Contraejemplo: La función $f(x) = |x|$ es continua en $x_0 = 0$ pero no es derivable en dicho punto.

Continuidad en $x_0 = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0-} |x| = \lim\limits_{x\to 0-} (-x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+} |x| = \lim\limits_{x\to 0+} x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \lim_{x\to 0} |x| = 0 \text{ y } f(0) = |0| = 0, \text{ luego } f(x) \text{ es continua en } x_0 = 0.$$

Derivabilidad en $x_0 = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(0-) = \lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{-x}{x} = -1 \\ f'(0+) = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{x}{x} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ no existe } f'(0) \text{ y por tanto, } y = |x| \text{ no es derivable en } x_0 = 0.$$



Resumiendo:
- *f* es continua en 0
- *f* no es derivable en 0
- La gráfica de *f* no tiene recta tangente en 0

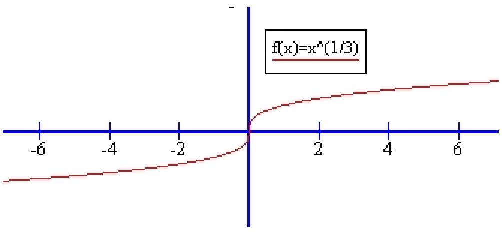
Otro contraejemplo más: La función $y = x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$ es continua en $x_0 = 0$ pero no es derivable en dicho punto.

Continuidad en $x_0 = 0$:

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x^{1/3} = 0 = f(0)$, luego $f(x)$ es continua en $x_0 = 0$.

Derivabilidad en $x_0 = 0$:

$f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^{1/3} - 0}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^{2/3}} = \left[\dfrac{1}{0}\right] = +\infty \Rightarrow \nexists f'(0)$, y por tanto, $y = x^{1/3}$ no es derivable en $x_0 = 0$.



Resumiendo:
- f es continua en 0
- f no es derivable en 0
- La gráfica de f tiene una recta tangente vertical en 0

Resumen:

$$\boxed{f \text{ derivable en } x_0 \Rightarrow f \text{ continua en } x_0}$$

$$\boxed{f \text{ NO continua en } x_0 \Rightarrow f \text{ NO derivable en } x_0}$$

5.- OPERACIONES CON FUNCIONES DERIVABLES

5.1. Suma

La función derivada de una suma de funciones derivables es la suma de las funciones derivadas:

$$\boxed{(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)}$$

5.2. Producto de un número real por una función

La función derivada del producto de una constante por una función derivable es la constante por la función derivada de la función:

$$\boxed{(\alpha f)'(x) = \alpha \cdot f'(x)}$$

5.3. Producto de funciones

La función derivada de un producto de funciones derivables es igual a la derivada del primer factor por el segundo sin derivar más el primer factor si derivar por la derivada del segundo factor:

$$\boxed{(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}$$

5.4. Función recíproca de una función

La derivada de la función recíproca de una función derivable viene dada por:

$$\boxed{\left(\frac{1}{f}\right)'(x)=\frac{-f'(x)}{f(x)^2}}$$

5.5. Cociente de funciones

La función derivada de un cociente de funciones derivables es igual al cociente de la derivada del numerador por el denominador sin derivar menos el numerador sin derivar por la derivada del denominador, entre el denominador al cuadrado:

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}}$$

5.6. Composición de funciones: regla de la cadena

Sean $f:A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:B\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funciones reales de variable real con $f(A)\subseteq B$. Supongamos que f es derivable en a y que g es derivable en $b=f(a)$. Entonces:

$$\boxed{(g\circ f)'(a)=g'(f(a))f'(a)}$$

6.- FUNCIÓN DERIVADA DE LAS FUNCIONES MÁS USUALES

A modo de ejemplo calcularemos las funciones derivadas de algunas funciones elementales. A la vez que practicamos el cálculo de derivadas aplicando la definición, también nos sirve para construir la conocida tabla de derivadas y que esta no aparezca como por arte de magia.

1) La función constante $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=c$, es derivable en cualquier punto $a\in\mathbb{R}$. Su derivada viene dada por:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{c-c}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{0}{x-a}=0\cdot\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}=0$$

2) La función identidad $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x$, es derivable en cualquier punto $a\in\mathbb{R}$. y su derivada es:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x-a}{x-a}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to a}\frac{\cancel{x-a}}{\cancel{x-a}}=\lim_{x\to a}1=1$$

3) (***) La función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^n$, es derivable en cualquier punto $a\in\mathbb{R}$. Para calcular su función derivada utilizaremos la fórmula del binomio de Newton:

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^n-a^n}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{\binom{n}{0}a^n}h^0+\binom{n}{1}a^{n-1}h+\binom{n}{2}a^{n-2}h^2+\ldots+\binom{n}{n-1}ah^{n-1}+\binom{n}{n}a^0h^n-\cancel{a^n}}{h}=$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{na^{n-1}h + \binom{n}{2}a^{n-2}h^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ah^{n-1} + \binom{n}{n}ah^n}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}\left[na^{n-1} + \binom{n}{2}a^{n-2}h + \ldots + \binom{n}{n-1}ah^{n-2} + \binom{n}{n}ah^{n-1}\right]}{\cancel{h}} = na^{n-1}$$

Esta fórmula, también se puede obtener «por inducción», es decir, calculando la derivada de las funciones x, x^2, x^3,... y obteniendo la regla general para x^n. (Es un buen ejercicio, que te recomiendo hacer)

4) La función $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}$, es derivable en cualquier $a\in(0,+\infty)$. Su derivada es:

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to a}\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{a}\right)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}{(x-a)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{a}\right)^2}{(x-a)\left(\sqrt{x}-\sqrt{a}\right)} = \lim_{x\to a}\frac{\cancel{(x-a)}}{\cancel{(x-a)}\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)} = \lim_{x\to a}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

5) (**) La función exponencial $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x$, es derivable en cualquier $a\in\mathbb{R}$.

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{a+h}-e^a}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^a\left(e^h-1\right)}{h} = e^a$$

teniendo en cuenta que

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = 1$$

6) (**) La función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{sen} x$, es derivable en cualquier $a\in\mathbb{R}$.

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(a+h)-\operatorname{sen} a}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(a+\frac{h}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{h}{2}}{h} = \cos a$$

donde hemos tenido en cuenta que $\operatorname{sen}x - \operatorname{sen}y = 2\cos\frac{x+y}{2}\operatorname{sen}\frac{x-y}{2}$ y que

$$\lim_{h\to 0}\frac{sen\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1$$

7) (**) La función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\cos x,$ es derivable en cualquier $a\in\mathbb{R}$. Su función derivada se puede obtener teniendo en cuenta que $\cos x=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\quad \forall x\in\mathbb{R}$ y aplicando la regla de la cadena:

$$f'(a)=-\cos a$$

8) La función $\begin{array}{l}\operatorname{tg}:\mathbb{R}-\left\{k\pi+\frac{\pi}{2}:k\in\mathbb{Z}\right\}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto \operatorname{tg} x\end{array}$ es derivable en cualquier punto de su dominio y su derivada viene dada por:

$$\operatorname{tg}'x=\left(\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}\right)'(x)=\frac{\cos x\cos x-\operatorname{sen}x(-\operatorname{sen}x)}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\operatorname{tg}^2 x=\sec^2 x$$

9) (**) La función $\log_a x$ es derivable en cualquier $x_0\in(0,+\infty)$. Su función derivada viene dada por:

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x_0+h)-\log_a x_0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a\frac{x_0+h}{x_0}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a\left(1+\frac{h}{x_0}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\frac{x_0}{x_0}\log_a\left(1+\frac{h}{x_0}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{x_0}\log_a\left(1+\frac{h}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{h}}=$$

$$=\frac{1}{x_0}\log_a\left(\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{h}}\right)=\frac{1}{x_0}\log_a\left(\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{1}{\frac{x_0}{h}}\right)^{\frac{x_0}{h}}\right)=\frac{1}{x_0}\log_a e$$

En particular la función logaritmo natural (o neperiano[3]) $\ln$ es derivable en cualquier $x_0\in(0,+\infty)$, y su derivada viene dada por: $\ln' x=\frac{1}{x}$

Tabla de derivadas (de funciones simples)

Función	Derivada
$y=c\in\mathbb{R}$	$y'=0$

[3] En la actualidad las notaciones $\ln$ y L para representar al logaritmo natural, así como la notación $\log$ para representar el logaritmo de base 10 (decimal), están en deshuso, y se tiende cada vez más a usar la notación $\log$ para representar al logaritmo natural (neperiano).

$y = x$	$y' = 1$
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$y = \sqrt[n]{x}$	$y' = \dfrac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$
$y = a^x$ con $a > 0$	$y' = a^x \ln a$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = \log_a x$	$y' = \dfrac{1}{x}\log_a e$
$y = \ln x$	$y' = \dfrac{1}{x}$
$y = \operatorname{sen} x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y = -\operatorname{sen} x$
$y = \operatorname{tg} x$	$y' = 1 + \operatorname{tg}^2 x$

Ejercicio 6. *Calcula la derivada de las siguientes funciones:*

1) $f(x) = 7x^5 - 2x^3 + 3x^2 - 4$
2) $f(x) = 5x^4 + 3x^2 + 2x - 7$
3) $f(x) = (3x-1)\cdot(5x^2 + 3x - 2)$
4) $f(x) = \dfrac{4x^2+1}{7x+1}$
5) $f(x) = x - \dfrac{1}{x} + \sqrt[3]{x}$
6) $f(x) = (x - \sqrt{x})\cdot(x + \sqrt{x})$
7) $f(x) = \dfrac{(3x-1)\cdot(2x+3)}{x^2+7}$
8) $f(x) = (5x^2 - 3x + 1)\cdot\dfrac{2x}{5x+3}$
9) $f(x) = \dfrac{x^2}{\ln x}$

14) $f(x) = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{sen} x$
15) $f(x) = \cos x \cdot \operatorname{tg} x$
16) $f(x) = e^x \cdot \operatorname{tg} x$
17) $f(x) = 2^x \cdot \ln x$
18) $f(x) = e^x \cdot \log_{10} x$
19) $f(x) = \log_5 x \cdot \cos x$
20) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x}$
21) $f(x) = \dfrac{2^x}{\ln x}$
22) $f(x) = e^x \cdot \operatorname{sen} x$

10) $f(x)=\dfrac{(3x-1)^2-(3x+1)^2}{2-x^2}$

11) $f(x)=\dfrac{1}{3x^2-5x+2}$

12) $f(x)=\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x+\cos x}$

13) $f(x)=(x^2+3x)\cdot\operatorname{sen} x$

23) $f(x)=\operatorname{sen} x\cdot\cos x$

24) $f(x)=\operatorname{sen} x+e^x\cdot\operatorname{sen} x$

25) $f(x)=\dfrac{3^x\cdot\operatorname{sen} x}{2x+e^x}$

26) $f(x)=\log_5 x\cdot\log_7 x$

Aplicando la regla de la cadena, obtenemos la siguiente tabla de derivadas para funciones compuestas:

Tabla de derivadas, para funciones compuestas:

Función	**Derivada**
$y=f(x)^n$	$y'=n\cdot f(x)^{n-1}\cdot f'(x)$
$y=\sqrt{f(x)}$	$y'=\dfrac{f'(x)}{2\cdot\sqrt{f(x)}}$
$y=\sqrt[n]{f(x)}$	$y'=\dfrac{f'(x)}{n\cdot\sqrt[n]{f(x)^{n-1}}}$
$y=a^{f(x)}$ con $a>0$	$y'=f'(x)\cdot a^{f(x)}\cdot\ln a$
$y=e^{f(x)}$	$y'=f'(x)\cdot e^{f(x)}$
$y=\log_a f(x)$	$y'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}\cdot\log_a e$
$y=\ln f(x)$	$y'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$
$y=\operatorname{sen} f(x)$	$y'=f'(x)\cdot\cos f(x)$
$y=\cos f(x)$	$y=-f'(x)\cdot\operatorname{sen} f(x)$
$y=\operatorname{tg} f(x)$	$y'=f'(x)\cdot\left[1+\operatorname{tg}^2 f(x)\right]$

Ejercicio 7. *Calcula la derivada de las siguientes funciones compuestas:*

1) $f(x)=\operatorname{sen}(2x^2-3x)$

2) $f(x)=\ln(3x+1)$

3) $f(x)=e^{5x}$

13) $f(x)=(x^2+1)^5$

14) $f(x)=\operatorname{sen}^3 x$

15) $f(x)=\operatorname{sen}(x^3)$

4) $f(x)=\text{tg}\,(2-3x)$

5) $f(x)=(x^2-5x+2)^7$

6) $f(x)=e^{\text{sen}\,x}$

7) $f(x)=3^{1+\text{sen}\,x+\cos x}$

8) $f(x)=\log_7(4+\text{sen}\,x)$

9) $f(x)=\text{sen}^2 x$

10) $f(x)=\text{tg}^3 x$

11) $f(x)=3^{x^2+2}\cdot\ \text{sen}\,x$

12) $f(x)=(3x^2-2)\ \cdot\text{sen}\,(5x)$

16) $f(x)=\text{sen}^2 x\cdot\cos^2 x$

17) $f(x)=\dfrac{\text{sen}\,(5x+2)}{\cos\,(3x-1)}$

18) $f(x)=e^{\text{sen}\,x}\cdot\cos x$

19) $f(x)=\log_5(3x+1)$

20) $f(x)=\ln(\text{tg}\,x)$

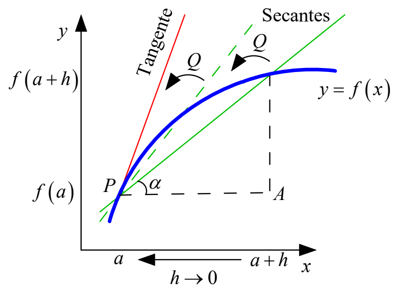
21) $f(x)=\text{sen}\,(\cos(3x))$

22) $f(x)=\sqrt{5x^2-3x+2}$

23) $f(x)=\sqrt[3]{(3-2x^2)^2}$

24) $f(x)=\sqrt[4]{x^2-3x+1}$

7.- INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA



Sea $f:D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función continua y

$$P=(a,f(a)),\ Q=(a+h,f(a+h))$$

dos puntos de su gráfica. Geométricamente se tiene que

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\text{tg}\ \alpha=m_{\text{secantes}}$$

que es el valor que mide la pendiente de la recta secante en los puntos P y Q a la curva.

Tomando límites en la igualdad anterior resulta:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\text{tg}\ \alpha=\lim_{h\to 0}m_{\sec antes}\Leftrightarrow f'(a)=\text{tg}\ \alpha=m_{\text{recta tangente}}$$

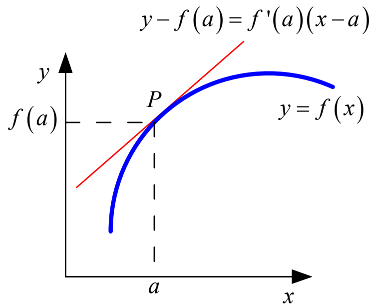
es decir, *la derivada de una función en un punto es igual a la pendiente de la recta tangente*[4] *a la función en ese punto*.

[4] Si f es continua en x_0, la recta tangente a la gráfica de f en el punto $P(x_0,f(x_0))$ es:

i) la recta que pasa por P y tiene pendiente $m(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ si este límite existe.

ii) la recta $x=x_0$ si $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\infty$

Aclaración: Esta definición proviene del hecho de que la recta tangente a una función en un punto x_0 es el límite de la recta secante a la función, cuando el otro punto de corte de la recta secante y la función tiende a x_0.



Como consecuencia:

Ecuación de la recta tangente a la curva $y=f(x)$ en $(a,f(a))$:

$$\boxed{y-f(a)=f'(a)(x-a)}$$

Ecuación de la recta normal a la curva $y=f(x)$ en $(a,f(a))$:

$$\boxed{y-f(a)=\frac{-1}{f'(a)}(x-a)}$$

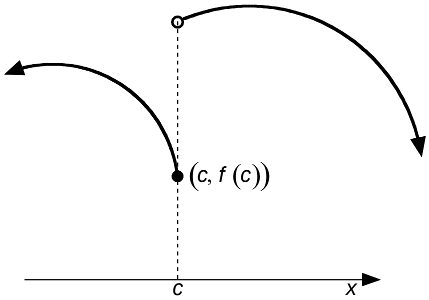
Ejercicio 8. *Halla la ecuación de la recta tangente a* $f(x)=x^3$ *en el punto de abscisa* $x=-1$.

Ejercicio 9. *Calcula las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la función* $f(x)=\frac{4}{x^2}$ *en el punto de abscisa* $x=2$.

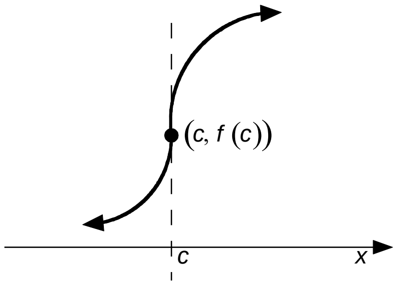
Ejercicio 10. *Dada la función* $f(x)=x^2-10x+9$ *halla el punto en el que la recta tangente a la gráfica de* f *es paralela al eje de abscisas.*

Ejercicio 11. *Halla la pendiente de la recta tangente a la función* $f(x)=\frac{x^2-1}{x}$ *en el punto de abscisa* $x=-1$.

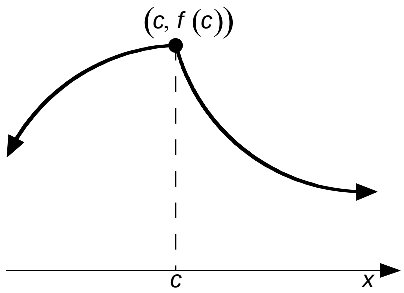
Gráficamente las *situaciones en las que una función no es derivable* en un punto son:



f no es continua en $c \Rightarrow f$ no es derivable en c



f es continua en c, pero la gráfica de f tiene una recta tangente vertical en c $\Rightarrow$ f no es derivable en c



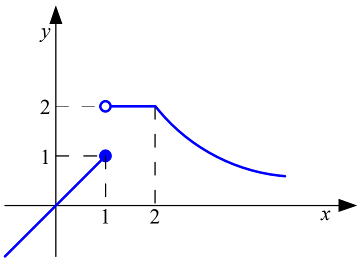
f es continua en c, pero la gráfica de f no tiene recta tangente en c (ya que tiene un pico) $\Rightarrow$ f no es derivable en c

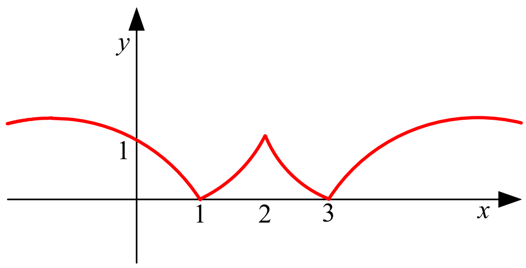
Los puntos en los que la gráfica de la función tiene picos se denominan **puntos angulosos**, y es ellos se verifica:

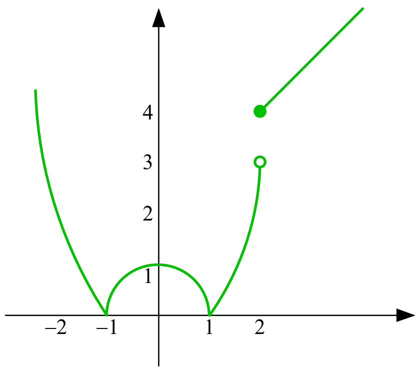
$$f'(x_0-)\neq f'(x_0+)$$

8.- EJERCICIOS

Ejercicio 12. *Señala en qué puntos no son derivables las siguientes funciones:*







Ejercicio 13. *Indica los puntos en los que las siguientes funciones no son derivables:*

a) $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{si } x>0 \\ x+1 & \text{si } x\leq 0 \end{cases}$ *c)* $f(x)=|\text{sen } x|$

b) $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x>0 \\ -x+1 & \text{si } x\le 0 \end{cases}$ *d)* $f(x)=\begin{cases} \left|x^2-1\right| & \text{si } x<2 \\ x+2 & \text{si } x\ge 2 \end{cases}$

Ejercicio 14. Halla la ecuación de la recta tangente a cada una de las siguientes curvas en los puntos indicados:

a) $y=\ln x$ en $x=e$ *b)* $y=\cos x$ en $x=0$

Ejercicio 15. ¿En qué punto la derivada de $y=x^2+3x+1$ *toma el valor cero? ¿Cómo será la recta tangente a esta curva en dicho punto?*

Ejercicio 16. Halla a y b *en la función* $y=x^2+ax+b$*, sabiendo que* $f(0)=1$ *y* $f'(0)=1$.

Ejercicio 17. Dada la función $y=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x}{3}$*:*

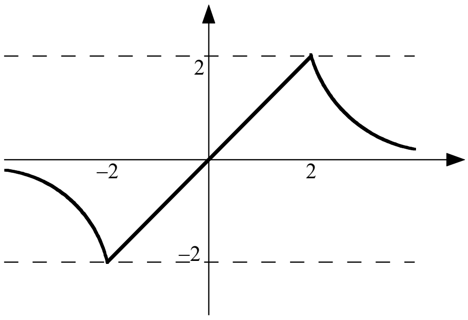
a) Calcula la ecuación de la recta secante a su gráfica que pasa por los puntos $x=-1$ y $x=3$.

b) Resuelve el problema gráficamente.

c) ¿Qué representa la pendiente de esta recta?

Ejercicio 18. ¿En qué punto la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)=x^2-5x+6$ *es paralela a la bisectriz del segundo cuadrante?*

Ejercicio 19. Indica en qué puntos no es derivable la función cuya gráfica es la siguiente:



Como en el intervalo $[-2,2]$ *la función es la recta que une los puntos* $(-2,-2)$ *y* $(2,2)$*, ¿qué puedes decir de su derivada?*

9.- DERIVADAS SUCESIVAS

Sea I un intervalo y f una función derivable en I. Si f' es derivable en $a\in I$, a la derivada $(f')'(a)$ se le llama derivada segunda de f en a y se designa por $f''(a)$.

Si $\forall x\in I$ existe $f''(x)$, la función $x\mapsto f''(x)$ se llama función derivada segunda de f en I.

En general, definidas las funciones $f',\dots,f^{n-1)}:I\to\mathbb{R}$, de tal modo que $f^{k)}=\left(f^{k-1)}\right)'$, para $k=2,\dots,n-1$, diremos que $f^{k)}$ es la función derivada *k*-ésima (o derivada de orden *k*) de f en I.

Ejercicio 20. *Calcula las derivadas segundas y terceras de las siguientes funciones:*

a) $y = x^6 - 5x^4$ *b)* $y = \dfrac{x^2}{x-1}$

c) $y = 2x+1$ *d)* $y = \dfrac{-1}{x}$

10.- ESTUDIO GLOBAL Y LOCAL DE FUNCIONES

10.1. Monotonía de una función

Recordemos que salvo que expresamente se diga lo contrario, el conjunto D es un intervalo abierto.

Una función $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es creciente (resp. decreciente) en D cuando para cualesquiera $x, y \in D$ en la situación $x < y$, se verifica que $f(x) \leq f(y)$ (respectivamente $f(x) \geq f(y)$.

Una función $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es estrictamente creciente (resp. estrictamente decreciente) en D cuando para cualesquiera $x, y \in D$ en la situación $x < y$, se verifica que $f(x) < f(y)$ (respectivamente $f(x) > f(y)$.

Criterio: de la derivada primera

Si $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es derivable en D, y:

$$\boxed{f'(x_0)\begin{cases} > 0 & \forall x_0 \in D \Rightarrow f \text{ es estrictamente creciente en } D \\ < 0 & \forall x_0 \in D \Rightarrow f \text{ es estrictamente decreciente en } D \end{cases}}$$

Diremos que una función es monótona, cuando sea creciente o decreciente y estrictamente monótona, cuando sea estrictamente creciente o estrictamente decreciente.

Por tanto, **estudiar la monotonía de una función es estudiar el signo de** f'.

Ejercicio 21. *Estudia la monotonía de las siguientes funciones:*

a) $y = x^6 - 5x^4$ *b)* $y = \dfrac{x^2}{x-1}$ *c)* $y = 2x+1$ *d)* $y = \dfrac{-1}{x}$

Ejercicio 22. *Dibuja una función que sea:*

a) Creciente en todo $\mathbb{R}$

b) Creciente en $(-\infty, -2)$ *y decreciente en* $(0, +\infty)$.

10.2. Extremos relativos

Se dice que $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiene un máximo (resp. mínimo) relativo en x_0 si $\exists E(x_0)$: $x \in E(x_0) \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$ (resp. $f(x) \geq f(x_0)$).

Condición necesaria para la existencia de extremos relativos en funciones derivables:

Sea $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable en x_0 y supongamos que f tiene un extremo relativo en x_0. Entonces: $f'(x_0) = 0$

Contraejemplo: *El recíproco no es cierto.*
La función $f(x) = x^3$ es derivable y $f'(0) = 0$, y sin embargo no tiene un extremo relativo en el origen, ya que es siempre creciente.

Condición necesaria y suficiente para que una función derivable posea un extremo relativo en un punto

Sea $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función dos veces derivable en x_0 y supongamos que

1) $f'(x_0) = 0$
2) $f''(x_0) \neq 0$

Entonces, $f(x)$ posee un extremo relativo en x_0, que es un $\begin{cases} \text{máximo si } f''(x_0) < 0 \\ \text{mínimo si } f''(x_0) > 0 \end{cases}$.

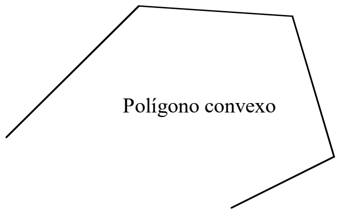
Ejercicio 23. Halla los extremos relativos de las funciones del ejercicio 25.

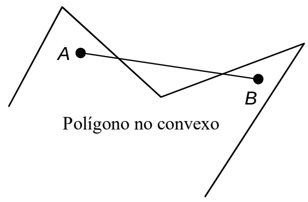
Ejercicio 24. Estudia los intervalos de monotonía y los extremos relativos de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^4 - 2x^2$
b) $f(x) = x^3 - 3x$
c) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$
d) $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

10.3. Curvatura de una función: puntos de inflexión

Una figura o región del plano es convexa si al tomar dos puntos cualesquiera de ella, el segmento que los une está completamente incluido en la figura. En caso contrario se dice que la figura o región es cóncava.





Una función es convexa[5] en un intervalo si la tangente a dicha función en cualquier punto del intervalo queda por debajo de la gráfica; Si queda por encima se dirá que la función es cóncava.

Los puntos en los que la tangente a la gráfica atraviesa a la función se llaman puntos de inflexión.

[5] **¡¡Ojo!!** Al consultar la bibliografía es posible encontrar libros donde llaman función cóncava a lo que nosotros llamamos función convexa. Lo importante es su significado, no el nombre que se le de. Sin embargo, no he encontrado ni un solo libro de texto que no sea de bachillerato en el que la $y = x^2$ sea cóncava.

1^er^ criterio:

Sea $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función dos veces derivable en D.

Si $f''(x_0) \begin{cases} >0 & \forall x_0 \in D \Rightarrow f \text{ es convexa en } D \text{ (tangente por debajo de la gráfica en } D) \\ <0 & \forall x_0 \in D \Rightarrow f \text{ es cóncava en } D \text{ (tangente por encima de la gráfica en } D) \end{cases}$

2º criterio:

Condición necesaria: Si f es dos veces derivable en x_0 y x_0 es un punto de inflexión, entonces $f''(x_0)=0$.

Condición necesaria y suficiente: Si f es tres veces derivable en x_0, $f''(x_0)=0$ y $f'''(x_0)\neq 0$, entonces f tiene un punto de inflexión en x_0.

Por tanto, **estudiar la curvatura de una función es estudiar el signo de f''.**

Ejercicio 25. Estudia la curvatura (concavidad y convexidad) de las siguientes funciones:

a) $y = x^6 + 5$

b) $y = \dfrac{x^2}{x-1}$

c) $y = e^x$

d) $y = \operatorname{sen} x$ en $[0, 2\pi]$

Ejercicio 26. Halla los puntos de inflexión de las funciones del ejercicio anterior.

11.- REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES

Hoy en día, con el uso de programas informáticos de representación gráfica de funciones (Graph, Derive, GeoGebra…), uno se podría preguntar si sigue siendo necesario aprender a dibujar «a mano» la gráfica de una función cualquiera. Creo que hay dos motivos fundamentales para que la respuesta sea afirmativa:

- Lo que más nos interesa de una gráfica es interpretarla correctamente y comprender bien toda la información que nos proporciona. Pero para hacer esto, es imprescindible aprender a representar funciones gráficamente, ya que este proceso consiste, esencialmente, en conocer la relación entre las propiedades de una función y el aspecto que tiene su gráfica.
- Por otra, cuando le pedimos a un programa de ordenador que represente una función, surgen varias cuestiones que tenemos que decidir. Por ejemplo, ¿en qué intervalo pedimos la representación?, ¿qué escala es conveniente para los ejes?, etc. Para responder a estas preguntas es fundamental nuestro dominio del tema.

Para representar gráficamente una función se siguen los siguientes pasos:

1º) DOMINIO Y RECORRIDO

Dom (f) = {números x para los que $f(x)$ tiene sentido}

Img (f) = $\{y : \exists x \text{ de forma que } y = f(x)\}$

2º) SIMETRÍAS

a) **Función par**: $f(-x)=f(x) \Leftrightarrow f(x)$ es simétrica respecto del eje OY

b) **Función impar**: $f(-x)=-f(x) \Leftrightarrow f(x)$ es simétrica respecto del origen, es decir, si giramos 180º la gráfica obtenemos la misma función.

3º) PERIODICIDAD

$y=f(x)$ es periódica de período $T \Leftrightarrow f(x+T)=f(T)$ y T es el menor de los números que cumplen dicha condición.

4º) PUNTOS DE CORTE CON LOS EJES

a) **Corte(s) con el eje OX**

$y=0 \Rightarrow f(x)=0$ → Ninguno, uno o más puntos

b) **Corte con el eje OY**

$x=0 \Rightarrow f(0)=y$ → Ninguno o un punto

5º) REGIONES DE EXISTENCIA

a) **Intervalos de positividad**

$f(x)>0 \Rightarrow$ gráfica por encima del eje OX

b) **Intervalos de negatividad**

$f(x)<0 \Rightarrow$ gráfica por debajo del eje OX

Para determinar las regiones de existencia de la función $y=f(x)$ hay que estudiar el signo de $f(x)$.

6º) ASÍNTOTAS

a) **Asíntotas verticales**

La recta $x=a$ es una asíntota vertical de $y = f(x)$ si existe alguno de los siguientes límites:

$$\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty \qquad \lim_{x\to a+} f(x)=\pm\infty \qquad \lim_{x\to a-} f(x)=\pm\infty$$

Observaciones:

(1) Una función puede tener infinitas asíntotas verticales.
(2) La gráfica de la función no puede cortar a las asíntotas verticales.

b) **Asíntotas horizontales**

La recta $y = k$ es una asíntota horizontal de $f(x)$ si existe alguno de los siguientes límites:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=k \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)=k$$

Observaciones:

(1) Una función tiene corno máximo dos asíntotas horizontales.
(2) La gráfica de la función puede cortar a las asíntotas horizontales.

c) **Asíntotas oblicuas**

La recta $y=mx+n$, $m\neq 0$, es una asíntota oblicua de $f(x)$ si existe alguno de los siguientes límites:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-mx-n\right)=0 \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-mx-n\right)=0$$

en cuyo caso $m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$ y $n = \lim_{x \to \infty} \left(f(x) - mx \right)$

Observaciones:

(1) Una función puede tener como máximo dos asíntotas oblicuas.
(2) Si una función tiene asíntota oblicua no tiene asíntota horizontal y recíprocamente.
(3) La gráfica de la función puede cortar a las asíntotas oblicuas en uno o varios puntos.

7º) PUNTOS DE DISCONTINUIDAD

$f(x)$ es continua en $x = a$ cuando $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, y por tanto la función $f(x)$ presenta discontinuidad en un punto cuando o no existe el límite de la función en dicho punto o cuando ese límite no coincide con el valor que toma la función en él.

8º) MONOTONÍA

a) **Intervalos de crecimiento**: $f'(x) > 0$ para todos los x del intervalo

b) **Intervalos de decrecimiento**: $f'(x) < 0$ para todos los x del intervalo

c) **Puntos críticos**:

$x = a$ es un posible máximo o mínimo de $f(x)$ si $f'(a) = 0$

Si $f''(a) > 0$, entonces $f(x)$ tiene en $x = a$ un mínimo

Si $f''(a) < 0$, entonces $f(x)$ tiene en $x = a$ un máximo

Para determinar la monotonía de la función hay que estudiar el signo de $f'(x)$.

9º) CURVATURA

a) **Intervalos de convexidad**: $f''(x) > 0$ para todos los x del intervalo

b) **Intervalos de concavidad**: $f''(x) < 0$ para todos los x del intervalo

c) **Puntos de inflexión**:

$x = a$ es un posible punto de inflexión de $f(x)$ si $f''(a) = 0$

Si $f'''(a) > 0$, entonces $f(x)$ tiene en $x = a$ un punto de inflexión cóncavo-convexo

Si $f'''(a) < 0$, entonces $f(x)$ tiene en $x = a$ un punto de inflexión convexo-cóncavo

Para determinar la curvatura de la función hay que estudiar el signo de $f''(x)$.

12.- OPTIMIZACIÓN DE FUNCIONES

Optimizar una función es obtener el valor o valores de la variable independiente que maximizan o minimizan la función objeto de estudio.

Ejercicio 27. *Tras la aparición de una cierta enfermedad infecciosa, el número de afectados viene dado por la función* $p(t) = 48t^2 - 2t^3$*, siendo t el número de días desde que se detectó el primer caso. Se pide: ¿Cuántos días transcurrirán hasta que la enfermedad deje de propagarse? ¿Cuándo aumenta el número de personas afectadas? ¿Cuándo disminuye? ¿Cuándo se detecta el número máximo de personas afectadas? ¿Cuántas son las personas afectadas en ese momento?*

Ejercicio 28. *La trayectoria de una bala, medida en metros, viene dada por la función*

$$f(x)=\frac{1}{40}\left(-x^2+80x\right)$$

donde x expresa el tiempo en segundos. 1) ¿Cuántos metros recorre la bala transcurridos 39 segundos? 2) ¿Cuántos segundos han de transcurrir para que la bala empiece a descender? 3) ¿A qué altura máxima llega antes de comenzar a descender? 4) ¿En qué momentos alcanza una altura de 30 m.?

Ejercicio 29. *Unos grandes almacenes abren a las 10 horas y cierran a las 22 horas. Se ha comprobado que el número de visitantes puede representarse, en función de la hora del día, como:*

$$N(t)=-t^2+36t+260 \quad \text{con } 10\le t\le 22$$

1) ¿Cuántos clientes han pasado por los almacenes a las 12 de la mañana? 2) ¿A qué hora hay la máxima afluencia de clientes? 3) ¿Cuál es el máximo número de clientes que registran? 4) ¿Cuántos clientes quedan a la hora de cerrar?

Ejercicio 30. *La atención ante un anuncio de televisión (en una escala del 0 a 100) de 3 minutos de duración se comporta según la función*

$$A(t)=-10t^2+40t+40 \quad \text{con } 0\le t\le 3.$$

1) ¿A cuántos minutos de comenzar el anuncio se presta la máxima atención? 2) Cuando finaliza el anuncio, ¿en qué punto de la escala de atención se está? 3) ¿En qué punto de la escala de atención se está transcurrido 90 segundos?

Ejercicio 31. *El beneficio en euros por kilogramo de un alimento perecedero se estima que viene dado por la función*

$$B(x)=4x-2x^2-0,68$$

donde x es el precio en euros de cada kilogramo del alimento. 1) ¿Entre qué precios por kilogramo se obtienen beneficios? 2) ¿A qué precio se obtiene el máximo beneficio? 3) Si en un comercio se tienen 1000 kilogramos de ese alimento ¿Qué beneficio máximo puede obtener?

Ejercicio 32. *Halla un número "xy" tal que la suma de sus cifras sea 12 y de modo que la suma del cubo de la cifra de las decenas y del triple del cuadrado de la cifra de las unidades sea lo más pequeña posible.*

Ejercicio 33. *Halla dos números que sumados den 20 y que su producto sea máximo.*

Ejercicio 34. *Halla dos números tales que el cuadrado de uno multiplicado por el otro sea máximo, si la suma de dichos números es 40.*

Ejercicio 35. *Cuáles son las dimensiones de un campo rectangular de 3 600 m^2 de superficie, para poderlo cercar con una valla de longitud mínima.*

Ejercicio 36. *Una cuerda de 120 metros de longitud se divide en dos trozos. Con el primero de ellos se forma un cuadrado de lado "x" y con el segundo trozo se forma un rectángulo de base "x" y de altura "y". Halla los valores de "x" e "y" para que la suma del área del cuadrado y el doble del área del rectángulo sea lo mayor posible y calcula este valor máximo.*

Ejercicio 37. *Un agricultor sabe que si vende hoy su cosecha podrá recoger 50 000 kg, que le pagarán al precio de 20 céntimos por kg. Por cada día que espere, la cosecha disminuirá en 800 kg, pero el precio aumentará en 3 céntimos por kg. ¿Cuántos días deberá esperar para obtener el mayor beneficio?*

Ejercicio 38. *Se desea construir el marco para una ventana rectangular de 6 m^2 de superficie. El metro lineal de tramo horizontal cuesta 24 euros y el tramo vertical 40 euros.*
a) Calcula las dimensiones de la ventana para que el coste del marco sea mínimo.
b) Determinar el coste del marco.

Ejercicio 39. *En una oficina de correos sólo admiten paquetes con forma de paralelepípedo rectangular, tales que la anchura sea igual a la altura y, además, la suma de sus tres dimensiones debe ser de 72 cm. Halla las dimensiones del paralelepípedo para que el volumen sea máximo.*

Ejercicio 40. *Se dispone de un papel rectangular de 2 metros cuadrados de superficie para diseñar un cartel publicitario. Los márgenes del cartel han de ser: 0,2 metros el superior, 0,1 metro el inferior, 0,1 metro el izquierdo y 0,05 metros el derecho. Calcular las dimensiones que debe tener el papel para que la parte que se ha de imprimir sea máxima. ¿Qué superficie tendría la parte impresa?*

Ejercicio 41. *El coste de producción de x unidades diarias de un determinado producto es $\frac{1}{4}x^2+35x+25$, y el precio de venta de una de ellas es $50-\frac{x}{4}$ miles de euros. Halla el número de unidades que deben venderse diariamente para que el beneficio sea máximo.*

> En los siguientes problemas nos piden optimizar funciones, pero en intervalos cerrados del tipo $[\alpha,\beta]$. Para abordar este tipo de problemas con éxito es conveniente tener en cuenta las siguientes consideraciones:
> - Los extremos del intervalo: α y β
> - Los $x\in(\alpha,\beta): f'(x)=0$ (posibles extremos relativos)
> - Los x en los que no existe $f'(x)$

Ejercicio 42. *Se considera la función $f(x)=3x^4+4x^3-12x^2+1$. Se pide:*
a) Pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=-1$.
b) Escribe los intervalos en donde la función es creciente y en donde sea decreciente
c) Determina los valores de x en los que la función alcanza máximos y mínimos relativos.
d) Valor mínimo que toma la función en el intervalo [- 1, 2].

Ejercicio 43. *Se considera la función $f(x)=x^3-3x-2$. Se pide:*
a) Pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=-\frac{1}{2}$.
b) Escribe los intervalos en donde la función sea creciente y en donde sea decreciente.
¿c) Determina los valores de x en los que la función alcanza máximos y mínimos relativos.

13.- EJERCICIOS DE SELECTIVIDAD

1. **[Julio de 2021 – Sección 1 – Bloque 2]** Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases} x+3+t & \text{si} \quad x<1 \\ 3 & \text{si} \quad x=1 \\ (x-3)^2+t & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x=1$?

b) Para $t=0$, calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(1,+\infty)$.

c) Para $t=0$, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en el intervalo $(1,+\infty)$.

2. **[Julio de 2021 – Sección 1 – Bloque 2]** La función $f(x)=ax^2+bx+c$ tiene un máximo en el punto $(0,-3)$ y la pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa $x=-1$ es 6. Con esos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a, b y c.

3. **[Julio de 2021 – Sección 2 – Bloque 2]** Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases} (x+2)^2 & \text{si} \quad x<0 \\ t & \text{si} \quad x=0 \\ (x-2)^2 & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

a) Halla el valor de t para que f sea continua en $x=0$.

b) Para $t=2$, representa gráficamente la función $f(x)$.

4. **[Julio de 2021 – Sección 2 – Bloque 2]** En un local se venden pizzas en porciones. Las ventas durante cuatro semanas consecutivas siguen la función $P(t)=-40t^2+240t+540$ con $t=$semanas y $1\le t\le 4$.

a) ¿Cuántas porciones han vendido durante las dos primeras semanas?
b) ¿Durante qué semana se vendieron más porciones y cuántas fueron?
c) ¿Qué semana se vendieron menos? ¿Cuántas porciones?

5. **[Junio de 2021 – Sección 1 – Bloque 2]** Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases} x+3+t & \text{si} \quad x\le 1 \\ (x-3)^2+t & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x=1$?

b) Para $t=0$, calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(1,+\infty)$.

c) Para $t=0$, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en el intervalo $(1,+\infty)$.

6. **[Junio de 2021 – Sección 1 – Bloque 2]** La función $f(x)=ax^3+bx^2+cx$ tiene un punto de inflexión en $(-1,6)$ y en el punto de abscisa $x=-2$ la pendiente de la recta tangente es -4. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros $a,\ b$ y c.

7. **[Junio de 2021 – Sección 2 – Bloque 2]** Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases}-(x-t)^2 & \text{si} \quad x<0\\ -2 & \text{si} \quad x=0\\ x^2-2 & \text{si} \quad x>0\end{cases}$$

a) Halla el valor de t para que f sea continua en $x=0$.

b) Para $t=-1$, representa gráficamente la función $f(x)$.

8. **[Junio de 2021 – Sección 2 – Bloque 2]** Se localiza un compuesto nocivo en un río obteniéndose que su proporción durante cinco días consecutivos de análisis de muestras sigue la función $N(x)=\dfrac{1}{100}\left(-4x^4+128x^2+54\right)$ con $x=$días y $1\le x\le 5$.

a) ¿Cuál es la proporción el tercer día?

b) Determina qué día se obtiene el máximo y qué día se obtiene el mínimo.

c) ¿A qué valor ascienden ambos?

9. **[Septiembre de 2020 – Sección 2 – Bloque 2]** Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases}x-t & \text{si} \quad x\le 0\\ (x-t)^2-5(x-t)+4 & \text{si} \quad x>0\end{cases}$$

a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x=0$?

b) Para $t=0$, calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(0,+\infty)$.

c) Para $t=0$, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en el intervalo $(0,+\infty)$.

10. **[Septiembre de 2020 – Sección 2 – Bloque 2]** En un taller para automóviles el número de clientes a los que cambiaron las ruedas de su coche durante 5 días es esta semana se ajusta a la función $f(x)=2x^3-15x^2+24x+75$, $1\le x\le 5$, siendo $x=1$ el lunes y $x=5$ el viernes.

a) ¿Qué día acuden menos clientes a cambiar las ruedas de su coche? ¿Cuántos clientes son?

b) ¿Cuál es el día que van más clientes a que les cambien las ruedas y cuántos son esos clientes?

11. **[Septiembre de 2020 – Sección 1 – Bloque 2]** Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases}-4x+4 & \text{si} \quad x\le c\\ x^2-4x & \text{si} \quad x>c\end{cases}$$

a) ¿Para qué valor de c la función $f(x)$ es continua en $x=c$?

b) Para $c=2$, representa gráficamente la función f.

12. **[Septiembre de 2020 – Sección 1 – Bloque 2]** Una función $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ tiene un máximo en $x=-1$ y un punto de inflexión en el punto $(1,-9)$. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a, b y c.

13. **[Julio de 2020 – Sección 2 – Bloque 2]** Las botellas de agua vendidas por un hipermercado (que abre de 10 de la mañana a 4 de la tarde) durante una ola de calor viene dado por la función $C(t)=2t^3-27t^2+120t$, con $1\le t\le 6$, siendo $t=1$ la primera hora desde la apertura y $t=6$ la última hora hasta el cierre y $C(t)$ en cientos de botellas.

a) ¿En qué intervalos de tiempo las ventas aumentan? ¿Y en cuáles disminuye?
b) ¿Cuándo se produce la máxima venta? ¿Y la mínima?
c) ¿Cuántas botellas se venden en esos dos casos?

14. **[Julio de 2020 – Sección 2 – Bloque 2]** Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases} x+t & \text{si} \quad x\le -1 \\ x^3-2x^2+4 & \text{si} \quad x>-1 \end{cases}$$

a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x=-1$?
b) Calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(-1,+\infty)$.
c) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(-1,+\infty)$.

15. **[Julio de 2020 – Sección 1 – Bloque 1]** La función $f(x)=ax^3+bx^2+16x+c$ tiene un punto de inflexión en $(1,10)$ y la pendiente de la recta tangente en ese mismo punto es 7. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a, b y c.

16. **[Julio de 2019 – Propuesta B – Ejercicio 3]** Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases} |x+2|+t & \text{si} \quad x\le -1 \\ (x-t)^2 & \text{si} \quad x>-1 \end{cases}$$

a) ¿Para qué valor de t la función es continua en $x=-1$?
b) Para $t=3$, calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(-1,+\infty)$.
c) Para $t=3$, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en el intervalo $(-1,+\infty)$.

17. **[Julio de 2019 – Propuesta B – Ejercicio 4]** Sea la función $f(x)=ax^4+bx^3+cx+1$. Sabemos que presenta un punto de inflexión en el punto de abscisa $x=0$ y la pendiente de la recta tangente en $x=-1$ es 24. Con estos datos, halla razonadamente, los valores de los parámetros a, b y c.

18. **[Junio de 2019 – Propuesta A – Ejercicio 4]** La función $v(t)=48t^2-2t^3$ nos da el número de ordenadores afectado por un virus informático, siendo t el tiempo (en horas) desde que se localizó el primer ordenador con virus.

a) Averigua, si existe, el momento en el que el virus dejará de propagarse.
b) Estudia cuando aumenta y cuando disminuye la propagación del virus.

c) En qué momento se produce el número máximo de ordenadores afectados? ¿Cuántos ordenadores?

19. **[Julio de 2018 – Propuesta A – Ejercicio 4]** De la función $G(x)=ax^3+bx^2+cx$ sabemos que tiene un punto de inflexión en $(2,-44)$ y un mínimo relativo en el punto de abscisa $x=6$. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a, b y c.

20. **[Julio de 2018 – Propuesta B – Ejercicio 3]** Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases} |x|+5t & \text{si} \quad x\le 0 \\ (x+t)^2-10x & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x=0$?

b) Para $t=2$, calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(0,+\infty)$.

c) Para $t=2$, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en el intervalo $(0,+\infty)$.

21. **[Julio de 2018 – Propuesta B – Ejercicio 3]** Cierto club de fútbol acaba de cumplir 25 años de existencia. A lo largo de este tiempo su número de socios se ha ajustado a la función $S(x)=-\frac{1}{3}x^3+\frac{21}{2}x^2-54x+180$, donde x está en años, con $0\le x\le 25$, y $S(x)$ está en cientos de socios. Se pide:

a) Calcula cuántos socios tiene el club en su inicio $(x=0)$ y cuántos en este momento $(x=25)$.

b) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento del número se socios, y cuántos socios tuvo en cada uno de esos momentos.

c) Determina cuándo ha tenido el club su número máximo de socios y su número mínimo, y cuántos socios tuvo en cada uno de esos momentos.

22. **[Junio de 2018 – Propuesta A – Ejercicio 3]** Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases} |x+2|+t & \text{si} \quad x\le 0 \\ (x-t)^2 & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x=0$?

b) Calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(0,+\infty)$ con $t=3$.

c) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en el intervalo $(0,+\infty)$ con $t=3$.

23. **[Junio de 2018 – Propuesta A – Ejercicio 4]** Dada la función $f(x)=ax^5+bx^3+c$, se pide que calcules los parámetros a, b y c sabiendo que dos de los puntos de inflexión de esta función son $(0,0)$ y $(1,7)$.

24. **[Junio de 2018 – Propuesta B – Ejercicio 4]** Un paciente está siendo sometido a un tratamiento experimental y para ello estudiamos entre las 0 y las 9 horas de un día su concentración en sangre de cierta proteína, en mg/litro. Esa concentración se ajusta a la función $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x^2+7x+40$ donde $f(x)$ está en mg/litro y x en horas, con $0\le x\le 9$.

a) Determina cuál es el valor inicial $(x=0)$ y final $(x=9)$ de la concentración de esa proteína en la sangre del paciente.
b) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la concentración.
c) Determina en qué horas se alcanzan los valores máximo y mínimo respectivamente de la concentración de la proteína, y qué valores son esos.

25. **[Septiembre de 2017 – Opción A – Ejercicio 3]** Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases} x+2t & \text{si } x\le 0 \\ (x+t)^3-x & \text{si } x>0 \end{cases}$$

a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x=0$?
b) Para $t=0$, calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(0,+\infty)$.
c) Para $t=0$, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en el intervalo $(0,+\infty)$.

26. **[Septiembre de 2017 – Opción A – Ejercicio 4]** De la función $J(x)=ax^4+bx^3+cx$ sabemos que, en el origen de coordenadas, su derivada toma el valor -2. Además, sabemos que tiene un punto de inflexión en $(2,0)$. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a,b y c.

27. **[Septiembre de 2017 – Opción B – Ejercicio 4]** Un ciclista da una vuelta completa a un circuito de modo que su velocidad a lo largo de este recorrido se ajusta a la función $V(x)=-\frac{1}{20}x^4+\frac{1}{2}x^3$, donde $V(x)$ está en km/h y x en minutos, siendo $x\ge 0$ y $V(x)\ge 0$. Se pide:

a) Teniendo en cuenta que el ciclista se detiene cuando completa una vuelta al circuito, calcula cuánto tiempo tarda en completarlo.
b) Determina en qué intervalo su velocidad es creciente y en qué intervalo es decreciente.
c) Determina en qué instante alcanza la velocidad máxima y cuál es esa velocidad.

28. **[Junio de 2017 – Opción A – Ejercicio 3]** Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases} x^2+x-3 & \text{si } x\le 1 \\ x+t & \text{si } x>1 \end{cases}$$

a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x=1$?
b) Para $t=0$, calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(-\infty,1)$.
c) Para $t=0$, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en el intervalo $(-\infty,1)$.

29. **[Junio de 2017 – Opción A – Ejercicio 4]** De la función $H(x) = ax^3 + bx + c$ sabemos que tiene un punto de inflexión en $\left(0, \frac{2}{3}\right)$ y un máximo relativo en el punto $(4,6)$. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a, b y c.

30. **[Junio de 2017 – Opción B – Ejercicio 4]** En cierta sala de cine, una película permanece en cartel 16 semanas. La recaudación en taquilla de esta película a lo largo de cada una de esas 16 semanas se ajusta a la función $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{15}{2}x^2 + 36x + 150$, donde $0 \le x \le 16$ está en semanas y $F(x)$ es la recaudación en cientos de euros. Se pide:

a) Cuál es la recaudación en el momento del estreno $(x = 0)$ y cuál es la recaudación al final $(x = 16)$.
b) En qué intervalo o intervalos crece esta función y en cuál o cuáles decrece.
c) En qué momentos se alcanzan las recaudaciones máxima y mínima respectivamente, y a cuánto ascienden estas recaudaciones.

31. **[Septiembre de 2016 – Propuesta A – Ejercicio 4]** De la función $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ sabemos que pasa por el punto $(0,0)$, que tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa 3 y que la pendiente de la recta tangente en ese mismo punto vale -18. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a, b y c.

32. **[Septiembre de 2016 – Propuesta B – Ejercicio 3]** Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} (x-t)^2 & \text{si} \quad x \le 0 \\ (x+t)^3 - x & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x = 0$?
b) Para $t = 0$, calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(0, +\infty)$.
c) Para $t = 0$, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en el intervalo $(0, +\infty)$.

33. **[Septiembre de 2016 – Propuesta B – Ejercicio 4]** A las 0 horas de un día lanzamos a la atmósfera un pequeño globo de helio que mediante un transmisor que nos va mandando la información, entre otras cosas, de la altura a la que se encuentra. El globo asciende durante algunas horas y después desciende hasta caer de nuevo a tierra. La altura a la que se encuentra el globo se ajusta a la función $f(x) = 64x^2 - \frac{1}{2}x^4$, donde $f(x)$ está en metros y x en horas, con $x \ge 0$ y $f(x) \ge 0$.

a) Determina cuándo vuelve el globo a caer a tierra, así como en qué intervalo de tiempo el globo está ascendiendo y en qué intervalo está descendiendo.
b) Determina cuál es la altura máxima que alcanza el globo y cuándo se produce esa altura máxima.

34. **[Junio de 2016 – Propuesta A – Ejercicio 3]** Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases} t^2+t-5x & \text{si} \quad x\le 1 \\ (x-3)^2+t & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x=1$?

b) Para $t=0$, calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(1,+\infty)$.

c) Para $t=0$, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en el intervalo $(1,+\infty)$.

35. **[Junio de 2016 – Propuesta A – Ejercicio 4]** De la función $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ sabemos que tiene un máximo relativo en el punto $(1,2)$ y que tiene un punto de inflexión en el punto $(0,0)$. Con estos datos, halla los valores de los parámetros $a,\ b,\ c$ y d.

36. **[Junio de 2016 – Propuesta B – Ejercicio 4]** Al comenzar el año ponemos en marcha el estudio de la evolución de la población de un tipo de insectos. Hemos llegado a la conclusión de que esa población se ajusta a la función $f(x)=-\frac{1}{30}x^4+\frac{2}{5}x^3+7$, donde x está en meses, con $0\le x\le 12$ y $f(x)$ está en decenas de individuos.

a) Calcula cuántos insectos tenemos al comenzar el estudio $(x=0)$ y cuántos al terminarlo $(x=12)$.

b) Determina en qué intervalo la población crece y en cuál decrece.

c) Determina en qué momento la población de insectos es máxima y a cuántos individuos asciende.

37. **[Septiembre de 2015 – Propuesta A – Ejercicio 3]** Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases} (x+t)^2 & \text{si} \quad x<0 \\ 1 & \text{si} \quad x=0 \\ (x-t)^2 & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x=0$?

b) Calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(-\infty,4)$ para $t=4$.

c) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en el intervalo $(-\infty,0)$ para $t=4$.

38. **[Septiembre de 2015 – Propuesta A – Ejercicio 4]** Dada la función

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+3$$

calcula los valores de los parámetros $a,\ b$ y c, sabiendo que a pendiente de la recta tangente a la curva en $x=0$ es -24, que dicha función tiene un mínimo relativo en el punto de abscisas $x=2$ y un punto de inflexión en $x=-1$.

39. **[Septiembre de 2015 – Propuesta B – Ejercicio 4]** La función que representa el costo por kilómetro, en miles de euros, de la construcción de una canalización de agua es $C(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$ con $0 \le x \le 4.5$.

a) ¿Cuál fue el coste de la construcción del primer kilómetro $(x = 1)$?
b) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento del costo de la obra.
c) ¿En qué kilómetro el coste de la construcción fue máximo y a cuánto ascendió?

40. **[Junio de 2015 – Propuesta A – Ejercicio 4]** La evolución del precio de un determinado producto, en miles de euros, durante 6 meses, viene dado por la función $f(t) = t^3 - 9t^2 + 15t + 50$, $0 \le t \le 6$, siendo t el tiempo medido en meses.

a) ¿Cuál fue el valor que alcanzó dicho producto el segundo mes $(t = 2)$?
b) ¿Cuándo alcanzó su precio máximo ese producto? ¿Y a cuánto ascendió?
c) ¿Cuándo alcanzó su precio mínimo? ¿Y cuál es dicho valor?

41. **[Junio de 2015 – Propuesta B – Ejercicio 3]** Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 6x + 9 & \text{si} \quad x < -1 \\ 1 & \text{si} \quad -1 \le x \le 1 \\ x^2 - 6x + 9 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

a) Estudia su continuidad en $x = -1$?
b) Calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(1, 4)$.
c) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(1, +\infty)$.

42. **[Junio de 2015 – Propuesta B – Ejercicio 4]** Determina una función polinómica de segundo grado sabiendo que tiene un mínimo relativo en el punto $(3, 2)$ y que la recta tangente a dicha función en el punto de abscisa $x = 4$ es paralela a la recta $y = 2x + 7$.

43. **[Septiembre de 2014 – Propuesta A – Ejercicio 4]** En una localidad la concentración de polen de olivo, medido en granos de polen/m^3 de aire, se puede ajustar a la función

$$f(t) = \frac{t^3}{3} - 22t^2 + 448t - 2600$$

siendo t el tiempo medido en semanas, $12 < t < 32$.

a) ¿Qué semana del año registra la máxima concentración de polen de olivo y cuál fue dicha cantidad?
b) ¿Qué semana se registra la mínima concentración de polen de olivo en el aire y cuál fue dicha cantidad?

44. **[Septiembre de 2014 – Propuesta B – Ejercicio 3]** Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & \text{si} \quad x < -1 \\ 2 & \text{si} \quad -1 \le x \le 1 \\ (x-2)^2 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

a) Estudia su continuidad en $x = -1$?
b) Calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(1, 4)$.

c) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(1,+\infty)$.

45. **[Septiembre de 2014 – Propuesta B – Ejercicio 4]** Calcula los valores de los parámetros a, b, c y d para que la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga un máximo relativo en el punto $(0,2)$ y un punto de inflexión en $(1,0)$.

46. **[Junio de 2014 – Propuesta A – Ejercicio 3]** Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} |x-t| & \text{si} \quad x \le 0 \\ x^2 - 2x & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x = 0$?

b) Calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(0,+\infty)$.

c) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(0,+\infty)$.

47. **[Junio de 2014 – Propuesta A – Ejercicio 4]** Calcula los valores de los parámetros a, b y c para que la función $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ pase por el punto $(0,0)$, tenga un mínimo relativo en el punto de abscisa $x = 1$ y el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = 2$ sea igual a 24.

48. **[Reserva 2 de 20013 – Propuesta A – Ejercicio 3]** Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & \text{si} \quad x < -1 \\ 2 & \text{si} \quad -1 \le x \le 1 \\ (x-2)^2 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

a) Estudia su continuidad en $x = 0$

b) Calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(0,+\infty)$.

c) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(0,+\infty)$.

49. **[Reserva 2 de 2013 – Propuesta A – Ejercicio 4]** Calcula el valor de los parámetros a y b para que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ tenga un mínimo relativo en el punto de abscisa $x = 2$, y tenga un punto de inflexión en el punto de abscisa $x = 1$.

50. **[Reserva 2 de 2013 – Propuesta B – Ejercicio 4]** La función $f(t) = t^3 - 15t^2 + 48t + 292$ representa la altura, medida en metros, alcanzada por un globo aerostático, durante un trayecto de 10 horas, siendo t el tiempo medido en horas, $0 \le t \le 10$.

a) ¿Cuándo alcanza el globo la altura máxima y cuál es este valor?

b) ¿Cuál es la altura mínima a la que baja el globo, y en qué momento (t) se produce?

51. **[Reserva 1 de 2013 – Propuesta A – Ejercicio 4]** La velocidad del viento, medida en km/h, durante una travesía marítima de 5 días de duración, viene dada por la función

$$v(t) = 2t^3 - 15t^2 + 24t + 26$$

siendo t el tiempo medido en días, $0 \le t \le 5$.

a) ¿Qué día el viento alcanzó su velocidad máxima y cuál fue su valor?
b) ¿Cuándo el viento alcanzó su velocidad mínima y cuál fue este valor mínimo?

52. **[Reserva 1 de 2013 – Propuesta B – Ejercicio 3]** Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases}(x+t)^2+2 & \text{si} \quad x\le 0\\ (x-t)^2+2t-4 & \text{si} \quad x>0\end{cases}$$

a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x=0$?
b) Para $t=2$, calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(0,+\infty)$.
c) Para $t=2$, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(0,+\infty)$.

53. **[Reserva 1 de 2013 – Propuesta B – Ejercicio 4]** Calcula los valores de los parámetros a, b y c para que la función $f(x)=ax^2+2x+b$ tenga un máximo en el punto $(1,3)$.

54. **[Septiembre de 2013 – Propuesta A – Ejercicio 4]** a) Calcula el valor del parámetro a para que la función $f(x)=ax^3+3x^2-12x+5$ tenga un mínimo en el punto de abscisa $x=1$.
b) Para el valor de a calculado en el apartado anterior, halla el máximo relativo de la función anterior.

55. **[Septiembre de 2013 – Propuesta B – Ejercicio 3]** Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases}x^2+x+1 & \text{si} \quad x<1\\ 0 & \text{si} \quad x=1\\ (x-2)^2+2 & \text{si} \quad x>1\end{cases}$$

a) Estudia su continuidad en $x=1$.
b) Calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(-\infty,1)$.
c) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(-\infty,1)$.

56. **[Septiembre de 2013 – Propuesta B – Ejercicio 4]** El ruido, medido en decibelios, producido por la música y los clientes en un local nocturno, se ajusta a la función $R(t)=-4t^2+24t+54$, siendo t el tiempo medido en horas, $0\le t\le 6$.
a) En la primera hora $(t=1)$, ¿cuántos decibelios se registraron?
b) ¿En qué momento se produce mayor ruido y a cuántos decibelios asciende?

57. **[Junio de 2013 – Propuesta A – Ejercicio 4]** Calcula los valores de los parámetros a y b para que la función $f(x)=x^2+ax+b$ tenga un mínimo en el punto $(2,1)$.

58. **[Junio de 2013 – Propuesta B – Ejercicio 3]** Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases}|x-t| & \text{si} \quad x\le 2\\ (x-3)^2-1 & \text{si} \quad x>2\end{cases}$$

a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x=2$?

b) Calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(2,+\infty)$.

c) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(2,+\infty)$.

59. **[Junio de 2013 – Propuesta B – Ejercicio 4]** En un tramo de una montaña rusa, la altura alcanzada por el vagón, medido en metros, se ajusta a la función $f(t)=t^3-9t^2+15t+38$, siendo t el tiempo medido en segundos, $0\le t\le 6$.

a) ¿En qué instante t, el vagón alcanza la altura máxima en ese tramo, y cuál es dicha altura?

b) ¿En qué instante t, el vagón alcanza la altura mínima en el tramo mencionado, y cuál es dicha altura?

60. **[Reserva 2 de 2012 – Propuesta A – Ejercicio 3]** Dada la función $f(x)=x^3+ax^2+bx$

a) Calcula los valores de las constantes a y b sabiendo que la función tiene un máximo relativo en el punto de abscisa $x=1$, y un punto de inflexión en $x=2$.

b) Para los valores de a y b obtenidos en el apartado anterior, estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f.

61. **[Reserva 2 de 2012 – Propuesta B – Ejercicio 3]** El índice de audiencia de un programa de televisión de 3.5 horas de duración se estudia mediante la función $f(t)=t^3-6t^2+9t+10$, $0\le t\le 3.5$ siendo t el tiempo transcurrido en horas desde que comienza el programa y $f(t)$ el porcentaje $(\%)$ de personas que ven el programa en el momento t.

a) ¿Cuál es el porcentaje de personas que ven el programa transcurridas 3 horas $(t=3)$ desde el comienzo del programa?

b) Calcula el momento de máxima audiencia y el porcentaje de personas que ven el programa en ese momento.

62. **[Reserva 2 de 2012 – Propuesta B – Ejercicio 4]** Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases} \left|x^3-2\right| & \text{si} \quad x\le 2 \\ (x-3)^2-2 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$

a) Estudia su continuidad en $x=2$?

b) Calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(2,4)$.

c) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(2,+\infty)$.

63. **[Reserva 1 de 2012 – Propuesta A – Ejercicio 3]** Dada la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+5$

a) Calcula los valores de las constantes a y b sabiendo que la función tiene un máximo relativo en el punto de abscisa $x=0$, y un mínimo relativo en $x=2$.

b) Para los valores de a y b obtenidos en el apartado anterior, calcula el punto de inflexión de la función f.

64. **[Reserva 1 de 2012 – Propuesta B – Ejercicio 3]** La función $C(t)=t^2-6t+19$, $0\le t\le 6$, representa el tanto por ciento $(\%)$ de la capacidad de un pantano que ocupa el agua, en función del tiempo t medido en meses desde mayo $(t=0)$ hasta noviembre $(t=6)$.

a) En el mes de junio, ¿qué tanto por ciento de su capacidad ocupaba el agua?
b) ¿Cuándo se alcanzó el nivel mínimo de agua? ¿Y cuál era ese valor mínimo?

65. **[Reserva 1 de 2012 – Propuesta B – Ejercicio 4]** Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases}(-x-3)^2 & \text{si} \quad x\leq -2\\ 0 & \text{si} \quad -2<x\leq 0\\ (x-1)^2 & \text{si} \quad x>0\end{cases}$$

a) Estudia su continuidad en $x=-2$?
b) Calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(0,4)$.
c) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(0,+\infty)$.

66. **[Septiembre de 2012 – Propuesta A – Ejercicio 3]** La función $G(t)=t^2-8t+20,\ 0\leq t\leq 6$, representa las ganancias, en miles de euros, de una empresa durante los últimos 6 meses, siendo t el tiempo medido en meses.

a) ¿Cuál fue la ganancia obtenida en el segundo mes $(t=2)$?
b) ¿Cuándo la ganancia obtenida fue mínima? ¿Cuál fue su valor?

67. **[Septiembre de 2012 – Propuesta B – Ejercicio 3]** Dada a función

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+bx+c$$

calcula los valores de las constantes a, b y c para que la gráfica de la función pase por el punto $(0,-6)$, tenga un máximo relativo en el punto de abscisa $x=-1$, y un punto de inflexión en $x=1$.

68. **[Septiembre de 2012 – Propuesta B – Ejercicio 4]** Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases}(x+3)^2 & \text{si} \quad x\leq 0\\ \left|2x^3-2\right|-3 & \text{si} \quad x>0\end{cases}$$

a) Estudia su continuidad en $x=0$?
b) Calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(-6,0)$.
c) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(-\infty,0)$.

69. **[Junio de 2012 – Propuesta A – Ejercicio 3]** Se ha registrado el ruido que produce una cocina industrial durante 4.5 horas. La función $R(t)=t^3-9t^2+24t+28$, representa el ruido medido en decibelios (db) y t el tiempo medido en horas, $0<t<4.5$.

a) En la primera hora $(t=1)$, ¿cuántos decibelios se registraron?
b) ¿En qué momento se produce mayor ruido? ¿Cuál fue el valor máximo del ruido registrado?

70. **[Junio de 2012 – Propuesta A – Ejercicio 4]** Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases}x^2-x & \text{si} \quad x\leq 1\\ (x-2)^2+1 & \text{si} \quad x>1\end{cases}$$

a) Estudia su continuidad en $x=1$?
b) Calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(1,4)$.
c) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(1,+\infty)$.

71. **[Junio de 2012 – Propuesta B – Ejercicio 3]** Dada la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, calcula los valores de las constantes a, b y c para que la gráfica de la función pase por el punto $(0,4)$, tenga un mínimo relativo en el punto de abscisa $x=-1$, y un punto de inflexión en $x=-2$.

72. **[Reserva 2 de 2011 – Propuesta A – Ejercicio 3]** Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases}|3x+3| & \text{si} \quad x<0\\ -x^2+2x+3 & \text{si} \quad x\geq 0\end{cases}$$

a) Estudia su continuidad en $x=0$?
b) Determina los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(0,2)$.

73. **[Reserva 2 de 2011 – Propuesta A – Ejercicio 4]** Dada a función $f(x)=2x^3-3x^2-12x+5$. Se pie:

a) Intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función f.
b) Extremos relativos de f en su dominio de definición.

74. **[Reserva 2 de 2011 – Propuesta B – Ejercicio 4]** El consumo de agua en un IES en la jornada de mañana (entre las 8:45 y las 14:45) viene dado por la función $C(t)=-0,05t^2+0,3t$, con $0\leq t\leq 6$, donde t es el tiempo en horas a contar desde la apertura del centro y $C(t)$ es el consumo de agua en m^3. Se pide:

a) ¿Cuál es el consumo a las 2 horas de iniciada la jornada?
b) ¿En qué momento se produce el máximo consumo y cuál es este valor?

75. **[Reserva 1 de 2011 – Propuesta A – Ejercicio 3]** Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases}x^2+4x & \text{si} \quad x\leq 0\\ x^2-2x & \text{si} \quad x>0\end{cases}$$

c) Estudia su continuidad en $x=0$?
d) Determina los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(-4,4)$.

76. **[Reserva 1 de 2011 – Propuesta A – Ejercicio 4]** La función $f(x)=ax^2+6x+b$ tiene un máximo en el punto $(1,4)$. Se pide:

a) Determina el valor de a y de b.
b) Para los valores hallados en el apartado anterior, escribe el intervalo en donde la función es decreciente.

77. **[Reserva 1 de 2011 – Propuesta B – Ejercicio 4]** La trayectoria seguida por un vagón de una atracción de feria viene definida por la función $f(t)=t^3-6t^2+9t+1$ en donde t representa el tiempo en minutos contado desde el momento en que se pone en marcha la atracción y $f(t)$ representa la altura en metros, respecto del suelo, en la que se encuentra el vagón. Se pide:

a) Tiempo que tarda el vagón en alcanzar la altura máxima y valor de ésta.
b) Si la atracción finalizara su recorrido en el minuto 4, ¿el punto de salida coincidiría con el de llegada?

78. **[Septiembre de 2011 – Propuesta A – Ejercicio 3]** Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2x-4 & \text{si} \quad x\le -1 \\ -x^2+2x-2 & \text{si} \quad x>-1 \end{cases}$$

a) Estudia su continuidad en $x=-1$?
b) Determina los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(-2,2)$.

79. **[Septiembre de 2011 – Propuesta A – Ejercicio 4]** En una sesión de Bolsa el precio en euros, que alcanza una acción viene dado por la función $f(t)=2t^3-18t^2+48t+1$ en donde t representa el tiempo, en horas, contado a partir del inicio de la sesión y $0\le t\le 3$. Se pide:

a) Precio de la acción a las 3 horas de iniciada la sesión.
b) ¿A qué hora la acción alcanzaba su valor máximo? ¿Cuál es ese valor?

80. **[Septiembre de 2011 – Propuesta B – Ejercicio 4]** El beneficio B, en miles de euros, de una sociedad de inversores, viene dado por la función $B(x)=-2x^2+56x+3$, donde x representa los miles de euros invertidos. Estudiadas las condiciones del mercado, se decide que $1\le x\le 15$. Se pide:

a) Beneficio máximo.
b) Intervalos donde el beneficio crece y donde decrece.

81. **[Junio de 2011 – Propuesta A – Ejercicio 3]** Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases} (x+1)^2+1 & \text{si} \quad x\le 0 \\ |x-1|+1 & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

a) Estudia su continuidad en $x=0$?
b) Determina los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(-2,2)$.

82. **[Junio de 2011 – Propuesta A – Ejercicio 4]** La función $f(x)=2x^2+ax+b$ tiene un mínimo en el punto $(2,-5)$. Se pide:

a) Determina el valor de a y de b.
b) Para los valores hallados en el apartado anterior, escribe el intervalo en donde la función es creciente.

83. **[Junio de 2011 – Propuesta B – Ejercicio 4]** La temperatura T, en grados centígrados, de una reacción química viene dada en función del tiempo t, en horas, por la expresión $T(t)=10t(3-t)$, en donde $0\le t\le 3$. Se pide:

a) Temperatura que habrá a los 30 minutos de comenzada la reacción.
b) ¿En qué momento se alcanza la máxima temperatura y cuál es ésta?

84. **[Reserva 2 de 2010 – Propuesta A – Ejercicio 2]** Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases}(x+2)^2 & \text{si} \quad x\le 0\\ -x+2 & \text{si} \quad 0<x\le 3\\ x-4 & \text{si} \quad x>3\end{cases}$$

a) Estudia su continuidad en los puntos de abscisa $x=0$ y $x=3$.
b) Represéntala gráficamente.
c) Extremos absolutos y relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $[-3,4]$. Razona la respuesta.

85. **[Reserva 1 de 2010 – Propuesta A – Ejercicio 2]** De la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ se sabe que tiene un máximo relativo en el punto de abscisa $x=1$, tiene un mínimo relativo en el punto de abscisa $x=-1$ y además su gráfica pasa por el punto $(2,5)$. Se pide:

a) Determina los valores de a, b y c.
b) Escribe la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en su punto de inflexión.

86. **[Reserva 1 de 2010 – Propuesta B – Ejercicio 2]** Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases}x^3 & \text{si} \quad -2\le x\le 1\\ -x^2+2 & \text{si} \quad 1<x\le 2\\ -2 & \text{si} \quad x>2\end{cases}$$

a) Estudia su continuidad en los puntos de abscisa $x=0$ y $x=3$.
b) Represéntala gráficamente.
c) Extremos absolutos y relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $[-2,2]$. Razona la respuesta.

87. **[Septiembre de 2010 – Propuesta A – Ejercicio 2]** Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases}|x+2| & \text{si} \quad x\le 1\\ -x^2+4 & \text{si} \quad x>1\end{cases}$$

a) Estudia su continuidad en el punto de abscisa $x=1$.
b) Represéntala gráficamente.
c) Extremos absolutos y relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $[-3,3]$. Razona la respuesta.

88. **[Septiembre de 2010 – Propuesta B – Ejercicio 2]** Un conducto decide, a los seis minutos de iniciada la marcha $(t=6)$ de su vehículo, poner en funcionamiento el ordenador de abordo para comprobar en cada instante el consumo de gasóleo. A los veinte minutos $(t=20)$ de iniciada la marcha, desconecta el ordenador, realiza los cálculos pertinentes y comprueba que el consumo de combustible expresado en litros/100 km, se ajusta a la función $C(t)=0.2t(26-t)-19$ en donde $t\in[6,20]$. Se pide:

a) ¿Cuál es el consumo en el intervalo en que se pone en funcionamiento el ordenador de a bordo?
b) Intervalo de tiempo en el que el consumo de combustible aumenta.
c) Intervalo de tiempo en el que el consumo de combustible disminuye.

d) Instante en el que el consumo es máximo. ¿Cuál es este consumo?
e) ¿Puede haber alguna relación entre los resultados obtenidos y un posible trazado de la vía por donde circula el vehículo? Razona la respuesta.

89. **[Junio de 2010 – Propuesta A – Ejercicio 2]** Se considera la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$ como la representación en el plano, de la trayectoria del vuelo de una mosca, en la que x representa el tiempo, en segundos, y $f(x)$ representa la altura en metros, respecto del suelo. Se considera el intervalo de tiempo $[0,5]$. Se pide:

a) Intervalos de tiempo en los que la mosca va subiendo.
b) Intervalos de tiempo en los que la mosca va subiendo.
c) Tiempos en los que la mosca alcanza una altura máxima relativa y una altura mínima relativa, y valores de estas alturas.
d) ¿A qué altura estaba la mosca cuando empezó el vuelo?
e) ¿Cuál es la altura que alcanza la mosca en el intervalo de tiempo dado?

90. **[Junio de 2010 – Propuesta B – Ejercicio 2]** Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2 & \text{si} \quad x \le -1 \\ x^2 + 2 & \text{si} \quad -1 < x \le 1 \\ (x-2)^2 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

a) Estudia su continuidad en los puntos de abscisa $x = -1$ y $x = 1$.
b) Represéntala gráficamente.
c) Extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $[-1,1]$. Razona la respuesta.

91. **[Reserva 2 de 2009] B)** Un restaurante abre a las 8 de la noche y cierra cuando todos los clientes se han ido. La función

$$f(t) = 60t - 10t^2$$

representa el número de clientes que hay en el restaurante en función del número de horas que lleva abierto (t). Se pide: **1)** La hora de cierre del restaurante. **2)** El número máximo de clientes que van una determinada noche a este establecimiento. **3)** ¿A qué horas debemos ir si queremos que haya 50 personas en el restaurante?

92. **[Reserva 2 de 2009] A)** Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \le -4 \\ x^2 + 4x & \text{si} \quad -4 < x < 0 \\ x^2 - 3x & \text{si} \quad x \ge 0 \end{cases}$$

se pide: **1)** Dibuja su gráfica. **2)** Estudia su continuidad en x = - 4. **3)** Estudia los extremos absolutos de f en el intervalo $[-4,\ 0]$. Razona tu respuesta.

93. **[Reserva 1 de 2009] B)** En una empresa de producción y venta de ordenadores, los beneficios en cientos de euros vienen dados por la expresión: $B(x) = \frac{x^3}{3} - 8x^2 + 55x + 20$, donde x representa el número de ordenadores vendidos en un día. Calcula: **1)** Los euros que ganará si vende 6 ordenadores en un día. **2)** La cantidad de ordenadores que deben ser vendidos para que el beneficio sea máximo, teniendo en cuenta que la empresa no produce más de 12 ordenadores por día. **3)** El beneficio máximo en euros.

94. **[Reserva 1 de 2009] A)** Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \le -3 \\ (x+1)^2 & \text{si} \quad -3 < x < 1 \\ -4x+8 & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

se pide: **1)** Dibuja su gráfica. **2)** Estudia su continuidad en x = -3 y x = 1. **3)** Estudia los extremos relativos de *f* en el intervalo $[-4,\ 0]$. Razona tu respuesta.

95. **[Septiembre de 2009] B)** Una multinacional ha estimado que anualmente sus beneficios en euros vienen dados por la función: $B(x)=-16x^2+24000x-700000$, donde x representa la cantidad de unidades vendidas. Determinar: **1)** Las unidades que se han de vender para obtener un beneficio de 7 300 000. **2)** La cantidad de unidades que deben ser vendidas para que el beneficio sea máximo. **3)** El beneficio máximo.

96. **[Septiembre de 2009] A)** Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} -x-2 & \text{si} \quad x \le -2 \\ \dfrac{x+2}{3} & \text{si} \quad -2 < x < 1 \\ -(x-2)^2 & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

se pide: **1)** Dibuja su gráfica. **2)** Estudia su continuidad en x = -2 y x = 1. **3)** Estudia los extremos absolutos de *f* en el intervalo $[-2,\ 1]$. Razona tu respuesta.

97. **[Junio de 2009] B)** El coeficiente de elasticidad de un producto, en función de la temperatura (t) en grados centígrados, viene definido por la función:

$$T(t)=\frac{t^2}{9}-2t+10$$

1) ¿A qué temperatura o temperaturas se obtiene una elasticidad de 2? **2)** Calcular el valor de la temperatura para la que la elasticidad es mínima. **3)** Calcular ese mínimo.

98. **[Junio de 2009] A)** Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \le -2 \\ x^2-4 & \text{si} \quad -2 < x < 3 \\ (x-2)^2 & \text{si} \quad x \ge 3 \end{cases}$$

se pide: **1)** Dibuja su gráfica. **2)** Estudia su continuidad en x = -2 y en x = 3. **3)** Estudia los extremos absolutos de f en el intervalo $[-2,\ 3]$. Razona la respuesta.

99. **[Reserva 2 de 2008] B)** El beneficio (B) mensual, en miles de euros, de una fábrica de coches viene dado en función del número de coches (x) fabricados en un mes por la expresión:

$$B(x)=1,2x-0,001x^3$$

1) ¿Cuántos euros de beneficio mensual obtiene si fabrica 10 coches en ese mes? **2)** ¿Cuántos coches tiene que fabricar en un mes para que el beneficio de ese mes sea máximo? **3)** ¿Cuál es ese beneficio máximo?

100. **[Reserva 2 de 2008] A)** Dada la función $f(x)=\begin{cases} -x^2+4 & \text{si } -2\le x<2 \\ x-2 & \text{si } 2<x<3 \\ (x-4)^2 & \text{si } x\ge 3 \end{cases}$ **1)** Dibuja su gráfica. **2)** Estudia su continuidad. **3)** Estudia los extremos relativos de *f* en el intervalo $[2,\ 5]$. Razona tu respuesta.

101. **[Reserva 1 de 2008] B)** Existen unos fondos de inversión cuya rentabilidad, en función de la cantidad invertida en euros, viene dada por:

$$R(x)=\begin{cases} -0'0001x^2+0'5x & \text{si } 0<x<4000 \\ 400 & \text{si } x\ge 4000 \end{cases}$$

1) ¿Qué rentabilidad se obtiene al invertir 3000 euros? **2)** ¿Qué cantidad x, conviene invertir para obtener la máxima rentabilidad? **3)** ¿Cuál es esa máxima rentabilidad?

102. **[Reserva 1 de 2008] A)** Dada la función $f(x)=\begin{cases} |x+1| & \text{si } x\le 0 \\ (x-1)^2 & \text{si } x>0 \end{cases}$ **1)** Dibuja su gráfica. **2)** Estudia su continuidad. **3)** Estudia los extremos absolutos de *f* en el intervalo $[-4,\ 0]$. Razona tu respuesta.

103. **[Septiembre de 2008] B)** Una empresa ha realizado un estudio acerca de los costes de producción llegando a la conclusión de que producir x unidades de un objeto dado tiene un coste (en euros) expresado por $f(x)=0,25x^2-25x+700$. **1)** ¿Cuántas unidades han de producirse para tener un coste de 175 euros? **2)** Halla el número de unidades que se deben producir para que el coste sea mínimo. **3)** ¿Cuál es ese coste mínimo?

104. **[Septiembre de 2008] A)** Dada la función $f(x)=\begin{cases} -x^2-2x+3 & \text{si } x\le 0 \\ |x-3| & \text{si } x>0 \end{cases}$ **1)** Dibuja su gráfica. **2)** Estudia su continuidad. 3) Estudia los extremos absolutos de f en el intervalo $[0,\ 3]$. Razona tu respuesta.

105. **[Junio de 2008] B)** Suponiendo que el rendimiento (R) en % de un estudiante en una hora de examen viene dado $R(t)=300t(1-t)$ siendo $0\le t\le 1$ (tiempo en horas). **1)** Representar gráficamente la función R(t). **2)** Indicar cuando aumenta y disminuye el rendimiento y ¿cuándo se hace cero? **3)** ¿Cuándo es máximo el rendimiento y cuál es?

106. **[Junio de 2008] A)** Dada la función $f(x)=\begin{cases} |x+2| & \text{si } x\le -1 \\ k & \text{si } -1<x<1 \\ (x-2)^2 & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$ **1)** Halla el valor de k para que la gráfica sea continua para x = –1. **2)** Para ese valor de k, dibuja la gráfica. **3)** Estudia los extremos absolutos de f en el intervalo $[-1,\ 1]$. Razona tu respuesta.

107. **[Reserva 2 de 2007] B)** Un importador de caviar estima que, si vende el kilo de caviar a x euros, entonces su beneficio por kilo viene dado por la función $B(x)=160x-x^2-63000$. **1)** Indica entre qué precios obtiene beneficios el importador. **2)** Calcula a qué precio debe vender el kilo de caviar para obtener un beneficio máximo. **3)** Calcula el beneficio máximo por kilo.

108. **[Reserva 2 de 2007] A)** Dada la función $f(x)=\begin{cases} x+2 & \text{si} \quad x<-1 \\ -x & \text{si} \quad -1\le x\le 1 \\ -(x-2)^2 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$ **1)** Dibuja su gráfica. **2)** Estudia su continuidad en el punto x =1. **3)** Estudia los extremos absolutos de f en el intervalo $[-1,\ 1]$. Razona tu respuesta.

109. **[Reserva 1 de 2007] B)** Durante 31 días consecutivos las acciones de una cierta empresa han tenido unas cotizaciones que vienen dadas por la función $C=0{,}1x^2-3x+100$, donde x representa el número de días transcurridos.
1) Encontrar las cotizaciones máxima y mínima de la compañía y los días en que se han conseguido.
2) Hallar los días en que las acciones estuvieron en alza y en los que estuvieron a la baja.

110. **[Reserva 1 de 2007] A)** Dada la función $f(x)=\begin{cases} \left|x^2-2x\right| & \text{si} \quad x\ge 0 \\ 0 & \text{si} \quad x<0 \end{cases}$ **1)** Dibuja su gráfica. **2)** Estudia su continuidad en el punto x = 0. **3)** Estudia los extremos absolutos de f en el intervalo $[-3,\ 3]$. Razona tu respuesta.

111. **[Septiembre de 2007] B)** En un determinado modelo de coche el consumo de gasolina, para velocidades comprendidas entre 20 y 160 Km/h, viene determinado por la función

$$C(x)=8-0{,}045x+0{,}00025x^2$$

y viene expresado en litros consumidos cada 100 km, recorridos a una velocidad constante de x km/h. **1)** ¿Cuántos litros cada 100 km consume el coche si se conduce a una velocidad de 120 km/h? **2)** ¿A qué velocidad consume menos? y ¿cuánto consume? **3)** ¿A qué velocidades se ha de conducir para consumir 10 litros cada 100 km?

112. **[Septiembre de 2007] A)** Dada la función $f(x)=\begin{cases} x^2+4x+3 & \text{si} \quad x<0 \\ (x-1)^2 & \text{si} \quad x\ge 0 \end{cases}$ **1)** Dibuja su gráfica. **2)** Estudia su continuidad en el punto x =0. **3)** Estudia los extremos absolutos de *f* en el intervalo $[0,\ 4]$. Razona tu respuesta.

113. **[Junio de 2007] B)** La cotización de las acciones de una determinada sociedad, suponiendo que la Bolsa funciona todos los días de un mes de 30 días, responde a la siguiente ley:

$$C=x^3-45x^2+243x+30000$$

siendo x el número de días. **1)** ¿Cuál ha sido la cotización en Bolsa el día 2? **2)** Determina los días en que alcanza las cotizaciones máxima y mínima. **3)** Calcula esas cotizaciones máxima y mínima.

114. **[Junio de 2007] A)** Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si} \quad x \le 0 \\ (x-1)^2 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$ **1)** Dibuja su gráfica. **2)** Estudia su continuidad en el punto $x = 0$. **3)** Estudia los extremos absolutos de f en el intervalo $[0, 3]$. Razona tu respuesta.

115. **[Reserva 1 de 2006] B)** La trayectoria de una bala, medida en metros, viene dada por la función $f(x) = \frac{1}{40}\left(-x^2 + 80x\right)$, donde x expresa el tiempo en segundos. **1)** ¿Cuántos metros recorre la bala transcurridos 39 segundos? **2)** ¿Cuántos segundos han de transcurrir para que la bala empiece a descender? **3)** ¿A qué altura máxima llega antes de comenzar a descender? **4)** ¿En qué momentos alcanza una altura de 30 m.?

116. **[Reserva 2 de 2006] A)** Dada la función $f(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{si} \quad x \le 1 \\ -x^2 + 6x - 5 & \text{si} \quad 1 < x < 5 \\ x-5 & \text{si} \quad x \ge 5 \end{cases}$

1) Representa gráficamente f. **2)** Estudia su continuidad. **3)** Estudia los extremos absolutos de *f* en el intervalo $[2,\ 7]$. Razona tu respuesta.

117. **[Reserva 1 de 2006] B)** Unos grandes almacenes abren a las 10 horas y cierran a las 22 horas. Se ha comprobado que el número de visitantes puede representarse, en función de la hora del día, como:

$$N(t) = -t^2 + 36t + 260 \text{ con } 10 \le t \le 22$$

1) ¿Cuántos clientes han pasado por los almacenes a las 12 de la mañana? **2)** ¿A qué hora hay la máxima afluencia de clientes? **3)** ¿Cuál es el máximo número de clientes que registran? **4)** ¿Cuántos clientes quedan a la hora de cerrar?

118. **[Reserva 1 de 2006] A)** Dada la función $f(x) = \begin{cases} 6 & \text{si} \quad x \le -4 \\ (x+2)^2 & \text{si} \quad -4 < x \le -1 \\ 4 & \text{si} \quad x > -1 \end{cases}$

1) Representa gráficamente f. **2)** Estudia su continuidad**. 3)** Estudia los extremos absolutos de *f* en el intervalo $[-4,\ -1]$. Razona tu respuesta.

119. **[Septiembre de 2006] B)** La atención ante un anuncio de televisión (en una escala del 0 a 100) de 3 minutos de duración se comporta según la función

$$A(t) = -10t^2 + 40t + 40 \quad \text{con } 0 \le t \le 3.$$

1) ¿A cuántos minutos de comenzar el anuncio se presta la máxima atención? **2)** Cuando finaliza el anuncio, ¿en qué punto de la escala de atención se está? **3)** ¿En qué punto de la escala de atención se está transcurrido 90 segundos?

120. **[Septiembre de 2006] A)** Dada la función $f(x) = \begin{cases} 2x+8 & \text{si} \quad x \le -3 \\ x^2 - 2 & \text{si} \quad -3 < x < 2 \\ 2x-2 & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases}$

1) Representa gráficamente *f*. **2)** Estudia su continuidad. **3)** Estudia los extremos absolutos de *f* en el intervalo $\left[-3\ ,\ 2\right]$. Razona tu respuesta.

121. **[Junio de 2006] B)** El beneficio en euros por kilogramo de un alimento perecedero se estima que viene dado por la función

$$B(x) = 4x - 2x^2 - 0,68$$

donde x es el precio en euros de cada kilogramo del alimento. **1)** ¿Entre qué precios por kilogramo se obtienen beneficios? **2)** ¿A qué precio se obtiene el máximo beneficio? **3)** Si en un comercio se tienen 1000 kilogramos de ese alimento ¿Qué beneficio máximo puede obtener?

122. **[Junio de 2006] A)** Dada la función $f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \le -1 \\ -x^2 & \text{si} \quad -1 < x < 1 \\ x^2-4x & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$

1) Representa gráficamente f. **2)** Estudia su continuidad. 3) Estudia los extremos absolutos de f en el intervalo $\left[-5,\ 0\right]$. Razona tu respuesta.

123. **[Reserva 2 de 2005]** El técnico de un Hipermercado observa que, si el precio al que venden la botella de agua es x céntimos de euro, sus beneficios vendrán dados por la expresión

$$B = -x^2 + 100x - 2300$$

en euros al día. **1)** ¿Qué beneficio obtienen si venden la botella a 40 céntimos? **2)** ¿Qué precio deben poner a la botella para obtener un beneficio máximo? **3)** ¿Cuál será ese beneficio máximo?

124. **[Reserva 2 de 2005]** Dada la función $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & \text{si} \quad x \le 0 \\ x^2 - 4x + 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$

1) Representa gráficamente f. **2)** Estudia su continuidad. **3)** Estudia los extremos absolutos de *f* en el intervalo $\left[-3,\ 3\right]$. Razona tu respuesta.

125. **[Reserva 1 de 2005]** Un cohete se desplaza según la función $d = 100t + 2000t^2$, en la que *d* es la distancia recorrida en km. y *t* el tiempo en horas. **1)** ¿A qué distancia del punto de salida estará cuando haya transcurrido 1 hora?, ¿y cuando hayan transcurrido 3 horas? **2)** Sabiendo que la función velocidad se obtiene derivando la función distancia, ¿cuál es la expresión de la función velocidad? **3)** ¿Qué velocidad ha alcanzado cuando han pasado 3 horas?

126. **[Reserva 1 de 2005]** Dada la función f(x) = $\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \le -1 \\ -x^2 + 2x + 3 & \text{si} \quad -1 < x \le 3 \\ -1 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$ **1)** Representa gráficamente f. **2)** Estudia su continuidad. **3)** Estudia los extremos absolutos de *f* en el intervalo $\left[-1,\ 3\right]$. Razona tu respuesta.

127. **[Septiembre de 2005]** Cierta entidad financiera lanza al mercado un plan de inversión cuya rentabilidad, R en euros viene dada por: $R(x) = -0,01x^2 + 5x + 2500$, siendo x la cantidad que se invierte. **1)** ¿Qué rentabilidad obtiene un inversor que invierte 1000 euros? **2)** ¿Cuánto ha de invertir si quiere obtener una rentabilidad máxima? **3)** Calcula esa rentabilidad máxima.

128. **[Septiembre de 2005]** Dada la función $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si} \quad x \leq -2 \\ x^2 - x - 2 & \text{si} \quad -2 < x \leq 2 \\ -x + 2 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$ **1)** Representa gráficamente f. **2)** Estudia su continuidad. **3)** Estudia los extremos absolutos de *f* en el intervalo $[-2,\ 2]$. Razona tu respuesta.

129. **[Junio de 2005]** Si la relación funcional entre la superficie de un cuadro y su base viene dada por $S = 150x - x^2$ siendo *x* la base en cm. **1)** ¿Cuál es la superficie de un cuadro que tiene de base 25 cm.? **2)** ¿Qué dimensión ha de tener la base de un cuadro para tener una superficie máxima? **3)** ¿Cuál es esa superficie máxima?

130. **[Junio de 2005]** Dada la función $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4 & \text{si} \quad x \leq -1 \\ |x - 2| & \text{si} \quad x > -1 \end{cases}$ **1)** Representa gráficamente f. **2)** Estudiar su continuidad y su derivabilidad.

131. **[Reserva 2 de 2004]** La producción (*P*) en kg. de cierta hortaliza en un invernadero depende de la temperatura (*t*) de éste en grados centígrados y viene dada por la expresión:

$$P(t) = (t + 1)^2 (32 - t)$$

1) ¿Qué producción se obtiene si la temperatura es de 18 ºC? **2)** ¿A qué temperatura se produce la máxima producción? **3)** ¿Cuál es esa máxima producción?

132. **[Reserva 2 de 2004]** Dada la función $f(x) = \begin{cases} -|x + 2| & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x^2 - 2 & \text{si} \quad 0 < x \leq 3 \\ 4 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$.

1) Representa gráficamente f. **2)** Estudia su continuidad en los puntos x = 0 y x = 3. 3) Estudia los extremos absolutos de f en el intervalo $[0,\ 3]$. Razona tu respuesta.

133. **[Reserva 1 de 2004]** El beneficio (B) mensual, en miles de euros, de una fábrica de camiones viene dado en función del número de camiones (x) fabricados en un mes por la expresión: $B(x) = 1{,}2x - (0{,}1x)^3$. **1)** ¿Qué beneficio mensual obtiene si fabrica 10 camiones en ese mes? **2)** ¿Cuántos camiones tiene que fabricar en un mes para que el beneficio de ese mes sea máximo? **3)** ¿Cuál es ese beneficio máximo?

134. **[Reserva 1de 2004]** Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 3 & \text{si} \quad x \leq -1 \\ (x - 2)^2 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$.

1) Representa gráficamente f. **2)** Estudia su continuidad. **3)** Estudia los extremos absolutos de *f* en el intervalo $[0,\ 3]$. Razona tu respuesta.

135. **[Septiembre de 2004]** La altura en metros, H, que alcanza una pelota lanzada verticalmente hacia arriba, viene dada en función del tiempo en segundos por la expresión: $H(t) = 20t - 2t^2$.

1) ¿Qué altura habrá alcanzado a los tres segundos?

2) ¿En qué momentos alcanzará 32 m de altura? **3)** ¿Cuál es la altura máxima que alcanza? ¿Dónde?

136. **[Septiembre de 2004]** Dada la función $f(x)=\begin{cases} x^2+3x+2 & \text{si} \quad x\le 0 \\ 2 & \text{si} \quad 0<x\le 1 \\ x^2-4x+5 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$.

1) Representa gráficamente f. **2)** Estudia su continuidad en los puntos x = 0 y x = 1. **3)** Estudia los extremos absolutos de *f* en el intervalo $[1,\ 5]$. Razona tu respuesta.

137. **[Junio de 2004]** Una compañía de autobuses interurbanos ha comprobado que el número de viajeros (*N*) diarios depende del precio del billete (*p*) según la expresión:

$$N(p)=300-6p$$

1) Dar la expresión que nos proporciona los ingresos diarios (I) de esa compañía en función del precio del billete. **2)** ¿Qué ingreso diario se obtiene si el precio del billete es 15 euros? **3)** ¿Cuál es el precio del billete que hace máximo los ingresos diarios? **4)** ¿Cuáles son esos ingresos máximos?

138. **[Junio de 2004]** Dada la función $f(x)=\begin{cases} -x^2-2x & \text{si} \quad x\le 0 \\ -1+2x & \text{si} \quad 0<x\le 1 \\ -x^2+2x & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$. **1)** Representa gráficamente f. **2)** Estudia su continuidad en los puntos x = 0 y x = 1. **3)** Estudia los extremos absolutos de *f* en el intervalo $[0,\ 1]$. Razona tu respuesta.

139. **[Reserva Septiembre 2003]** El producto de dos números reales positivos es 18. Hallar dichos números de forma que la suma de tres veces el cuadrado del primero más nueve veces el segundo sea lo más pequeña posible.

140. **[Reserva Septiembre 2003]** Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{-x+7}{3} & \text{si} \ -5\le x\le -2 \\ -x^2+\mathrm{k} & \text{si} \ -2<x\le 2 \end{cases}$$

a) Calcula el valor de k para que la función sea continua en $x=-2$.
b) Representa gráficamente f para el valor de k hallado en el apartado anterior.
c) Estudia los extremos absolutos de *f* en el intervalo $[-2,\ 2]$. Razona tu respuesta.

141. **[Reserva Junio 2003]** La temperatura (T) de una reacción química en un laboratorio de productos agrícolas viene dad, en función del tiempo t en horas, por la expresión $T(t)=2t-t^2$ para $0\le t\le 2$.

a) ¿Qué temperatura habrá a los quince minutos?
b) ¿En qué momento volverá a alcanzarse esta misma temperatura?
c) Halla las temperaturas máxima y mínima alcanzadas y lo momentos en que se producen.

142. **[Reserva Junio 2003]** Dada la función $f(x)=\left|-\frac{1}{3}x^2+3\right|$.

a) Estudia su continuidad en $x=3$
b) Representa gráficamente f.

c) Estudia los extremos absolutos de f en el intervalo $[-3,\ 3]$. Razona tu respuesta.

143. [Septiembre 2003] El precio en euros de cada acción de una empresa viene determinado, en el transcurso de una sesión bursátil, por la función $f(t)=t^3-6t^2+9t+1$ en donde t expresa el tiempo transcurrido desde el inicio de la sesión. Suponiendo que ésta comienza a las 10 horas (instante $t=0$) y finaliza, por problemas técnicos, tres horas y media después. Se pide: 1) El precio de la acción al cabo de dos horas. 2) Hora en que la acción adquiere su valor máximo. ¿Cuál es ese valor? 3) Horas en que la acción adquiere su valor mínimo. ¿Cuál es ese valor? 4) Periodos en los que el precio de la acción sea creciente o decreciente.

144. [Septiembre 2003] Dada la función $f(x)=\begin{cases}-x^2+5x-4 & \text{si } x\le 3\\ x+k & \text{si } x>3\end{cases}$

a) Calcula el valor de k para que la función sea continua en $x=3$.
b) Representa gráficamente f para el valor de k hallado en el apartado anterior.
c) Estudia los extremos absolutos de f en el intervalo $[1,\ 3]$. Razona tu respuesta.

145. [Junio 2003] El número de personas que utiliza las instalaciones de una piscina de verano viene expresado por la función $f(t)=10t^3-120t^2+450t$, en donde t expresa el tiempo transcurrido desde la apertura de la piscina, 12 de la mañana (instante $t=0$), hasta el cierre de la piscina que se produce a las 19 horas de la tarde.

1) ¿Cuántas personas quedan a la hora de cerrar la piscina?
2) ¿A qué hora el número de personas es mayor? ¿Cuántas hay en ese momento?
3) ¿A qué hora el número de personas es menor? ¿Cuántas hay en ese momento?
4) Periodos en los que el número de personas crece o decrece.

146. [Junio 2003] Dada la función $f(x)=\begin{cases}-x^2+kx & \text{si } 0\le x\le 2\\ x^2-6x+10 & \text{si } x>2\end{cases}$

a) Calcula el valor de k para que la función sea continua en $x=2$.
b) Representa gráficamente f para el valor de k hallado en el apartado anterior.
c) Estudia los extremos absolutos de f en el intervalo $[0,\ 5]$. Razona tu respuesta.

147. [Reserva Septiembre 2002] En un estudio sobre el coste de producción de una empresa de ordenadores, se ha concluido que producir x unidades de un determinado componente tiene un coste expresado por la función $f(x)=0{,}01x^2+x+1$. La venta de x unidades de ese componente proporciona unos ingresos que vienen determinados por la función $g(x)=(6+0{,}25x)\cdot x$, siendo x el número de unidades producidas.

a) Calcular el número de unidades que deben producir para que los costes sean mínimos.
b) Hallar la expresión, en función de x, de los beneficios, suponiendo que se venden todas las unidades que se producen.
c) Calcular el número de unidades que deben producir y vender para que los beneficios sean máximos.

148. **[Reserva Septiembre 2002]** Determinar los valores de "a" y de "b" en la ecuación de la parábola $y = ax^2 + bx + 2$ sabiendo que tiene el punto $(1, -2)$ común con la recta $y = -2x$, y que dicha recta es tangente a la parábola en ese punto.

149. **[Reserva Junio 2002]** Se considera la función $f(x) = x^3 - 3x - 2$. Se pide:

a) Pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = -\frac{1}{2}$.

b) Escribe los intervalos en donde la función sea creciente y en donde sea decreciente.

c) Determina los valores de x en los que la función alcanza máximos y mínimos relativos.

150. **[Reserva Junio 2002]** Dada la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+1} & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ x & \text{si } 1 < x < 3 \\ 6 - x & \text{si } 3 \le x \le 4 \end{cases}$

a) Estudiar la continuidad y la derivabilidad de f.

b) Representa gráficamente f.

c) Estudia los extremos absolutos de f en el intervalo $[2,\ 4]$. Razona tu respuesta.

151. **[Septiembre 2002]** Supongamos que el momento actual corresponde al valor $x = 0$ de la variable tiempo y que las pérdidas o ganancias (y) de una empresa que acaba de fundarse siguen una función del tipo $y = (x-1)^2 - 1$. Basándose en la representación gráfica de esa función determinar:

a) Los intervalos de tiempo en que la empresa tiene pérdidas y en cuáles tiene ganancias.

b) En qué momento tiene la mayor pérdida.

c) En qué momento no tiene ni pérdidas ni ganancias.

152. **[Junio 2002]** Dada la función $f(x) = \begin{cases} 16 - x^2 & \text{si } -2 \le x < 2 \\ x^2 & \text{si } 2 \le x \le 3 \end{cases}$

a) Estudiar la continuidad y la derivabilidad de f.

b) Calcular la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en $x = 1$.

c) Determinar los valores de x en los que la función alcanza su máximo y su mínimo absolutos.

153. **[Reserva Junio 2001]** Se considera la función $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 1$. Se pide: a) Pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = -1$. b) Escribe los intervalos en donde la función sea creciente y en donde sea decreciente. c) Determina los valores de x en los que la función alcanza máximos y mínimos relativos. d) Valor máximo que toma la función en el intervalo $[-1,\ 2]$.

154. **[Reserva Junio 2001]** Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{-1}{x} & si \quad x<0 \\ x^2+1 & si \quad 0\le x<2 \\ 5x+15 & si \quad x\ge 2 \end{cases}$$

Se pide:

1) Estudia la continuidad y la derivabilidad de $f(x)$
2) Representación gráfica de $f(x)$
3) Estudia los extremos absolutos de *f* en el intervalo $[-1,\ 2]$. Razona tu respuesta.

155. **[Reserva Septiembre 2001]** Dada la función $f(x)=\begin{cases} |x+1| & si \quad x\le 0 \\ -x^2+1 & si \quad 0<x\le 2 \\ -2 & si \quad x>2 \end{cases}$.

Se pide:

(a) Estudia la continuidad de $f(x)$.
(b) Representación gráfica de $f(x)$.
(c) Estudia los extremos absolutos de *f* en el intervalo $[-3,\ 1]$. Razona tu respuesta.

156. **[Reserva Septiembre 2001]** Una cuerda de 120 metros de longitud se divide en dos trozos. Con el primero de ellos se forma un cuadrado de lado x y con el segundo se forma un rectángulo de base x y de altura y. Halla los valores de x e y para que la suma del área del cuadrado y el doble del área del rectángulo sea lo mayor posible y calcula este valor máximo.

157. **[Septiembre de 2001]** El precio, en euros, que la acción de una empresa alcanza en el transcurso de una sesión de bolsa, viene dado por la función

$$p(t)=40t^3-420t^2+1200t+200$$

en donde t es el tiempo en horas a contar desde el inicio de la sesión. Supongamos que la sesión comienza a las 10 de la mañana y finaliza 7 horas después. Se pide:

a) ¿Entre qué horas el precio de acción sube?
b) ¿Entre qué horas el precio de la acción baja?
c) ¿A qué hora el precio de la acción alcanza un máximo relativo? ¿Cuál es ese valor?
d) ¿A qué hora el precio de la acción alcanza un mínimo relativo? ¿Cuál es ese valor?
e) ¿A qué hora el precio de la acción alcanza su valor más grande? ¿Cuál es ese valor?

158. **[Junio 2001]** Dada la función $f(x)=\begin{cases} x+\mathrm{t} & \text{si} \quad x\le -2 \\ x^2-2t & \text{si} \quad -2<x<2 \\ 4x-8 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$

a) Halla el valor de "t" para que la función sea continua en todos los números reales.
b) Estudiar (con el *t* obtenido en el apartado anterior) la derivabilidad en – 2 y en 2.
c) Para el valor de "t" obtenido en el apartado anterior, representa gráficamente la función.
d) Estudia los extremos absolutos de *f* en el intervalo $[-2,\ 2]$. Razona tu respuesta.

159. **[Septiembre 2001]** Dada la función $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & si \quad x\le 2 \\ \dfrac{6}{x} & si \quad x>2 \end{cases}$. Se pide:

a) Estudia la continuidad y la derivabilidad de $f(x)$.

b) Representación gráfica de $f(x)$.

c) Estudia los extremos absolutos de *f* en el intervalo $[-1,\ 1]$. Razona tu respuesta.

160. **[Junio 2001]** Halla un número "*xy*" tal que la suma de sus cifras sea 12 y de modo que la suma del cubo de la cifra de las decenas y del triple del cuadrado de la cifra de las unidades sea lo más pequeñas posible.

161. **[Reserva Septiembre 2000]** Dada la función $f(x)=\begin{cases} |2x-1| & si \quad x\le 0 \\ a & si \quad 0<x\le 1 \\ -x^2+3x & si \quad x>1 \end{cases}$

Se pide:

1) Determinar el valor de a para que la función $f(x)$ sea continua en $x=0$.
2) Para ese valor de a ¿Es $f(x)$ continua para todo valor real de x?
3) Grafica de $f(x)$.
4) Estudia los extremos absolutos de *f* en el intervalo $[0,\ 3]$. Razona tu respuesta.

162. **[Reserva Septiembre 2000]** Se dispone de un papel rectangular de 2 m^2 de superficie para diseñar un cartel publicitario. Los márgenes del cartel han de ser: 0,2 m el superior, 0,1 m el inferior, 0,1 m el izquierdo y 0,05 m el derecho. Calcular las dimensiones que debe tener el papel para que la parte que se ha de imprimir sea máxima. ¿Qué superficie tendría la parte impresa?

163. **[Reserva Junio 2000]** Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+a & si \quad x\le 0 \\ -x^2+(a-1)x+3 & si \quad x>0 \end{cases}$$

Se pide:

1) Determinar el valor de a para que $f(x)$ sea continua en $x=0$.
2) Para el valor de a calculado en el apartado anterior, dibujar la gráfica de la función y estudiar la derivabilidad en cero.
3) Estudia los extremos absolutos de *f* en el intervalo $[0,\ 4]$. Razona tu respuesta.

164. **[Reserva Junio 2000]** Tras la aparición de una cierta enfermedad infecciosa, el número de afectados viene dado por la función $p(t)=48t^2-2t^3$, siendo *t* el número de días desde que se detectó el primer caso. Se pide:

1) ¿Cuántos días transcurrirán hasta que la enfermedad deje de propagarse?
2) ¿Cuándo aumenta el número de personas afectadas? ¿Cuándo disminuye?
3) ¿Cuándo se detecta el número máximo de personas afectadas? ¿Cuántas son las personas afectadas en ese momento?

165. **[Septiembre 2000]** Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases} 2 & si \quad x<-3 \\ |x+1| & si \quad -3\le x<0 \\ 2x^2-4x+3 & si \quad x\ge 0 \end{cases}$$ Se pide:

1) Estudiar la continuidad y la derivabilidad de la función.
2) Representación gráfica de $f(x)$.
3) Estudia los extremos absolutos de *f* en el intervalo $[0,\ 3]$. Razona tu respuesta.

166. **[Septiembre 2000]** El consumo de agua de un colegio viene dado por la función:

$$f(t)=\begin{cases} 0 & si \quad t<0 \\ 0{,}1t^3-0{,}675t^2+1{,}35t & si \quad 0\le t\le 3{,}5 \\ 0 & si \quad t>3{,}5 \end{cases}$$

en donde *t* es el tiempo en horas a contar desde la apertura del colegio y *f*(*t*) es el consumo en m^3. Se supone que la jornada escolar comienza a las 10 horas y finaliza a las 13.5 horas. Se pide:

1) ¿Cuándo el consumo de agua es creciente? ¿Cuándo el consumo es decreciente?
2) ¿En qué momento el consumo es máximo y en qué momento es mínimo?

167. **[Junio 2000]** Dada la función $f(x)=2x^3+3x^2-12x+4$. Se pide:

i) Pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función *f* en el punto de abscisa $x=2$.
ii) Escribir los intervalos, en donde la función *f* sea creciente y en donde sea decreciente.
iii) Determinar los valores de *x* en los que la función *f* alcanza un máximo relativo y un mínimo relativo, respectivamente. ¿Cuánto vale la función *f* en esos puntos?
iv) Estudia los extremos absolutos de *f* en el intervalo $[-3,\ 1]$. Razona tu respuesta.

168. **[Junio 2000]** Dada la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{3}{x} & si \quad x\le \dfrac{-3}{2} \\ 2x+1 & si \quad \dfrac{-3}{2}\le x<0 \\ x^2+1 & si \quad x\ge 0 \end{cases}$ Se pide:

2) Estudiar la continuidad y la derivabilidad de $f(x)$.
3) Representación gráfica de $f(x)$.
4) Estudia los extremos absolutos de *f* en el intervalo $[0,\ 3]$. Razona tu respuesta.