Unidad 3

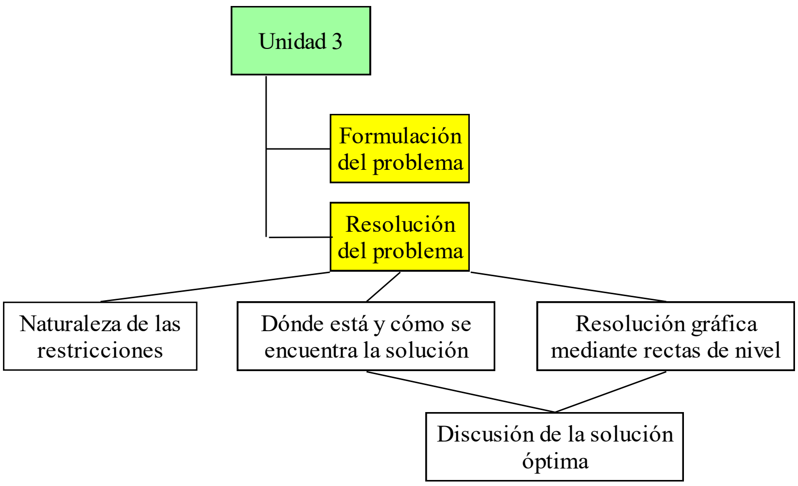
PROGRAMACIÓN LINEAL

CONTENIDOS

Objetivo fundamental

Plantear y resolver problemas de programación lineal bidimensional cuando:
- La región factible es acotada
- La región factible es no acotada, pero tiene solución única

0.- MAPA CONCEPTUAL DE LA UNIDAD



1.- INTRODUCCIÓN Y FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

La programación lineal es un modelo matemático cuyo objetivo es optimizar (maximizar o minimizar) una función lineal, denominada función objetivo, de tal forma que las variables de dicha función estén sujetas a una serie de restricciones expresadas mediante un sistema de ecuaciones lineales o inecuaciones también lineales.

Función objetivo: $f(x,y)=ax+by+c$

Restricciones: Inecuaciones lineales en x, en y o en (x,y)

Región factible: $\Re=\{(x,y):\text{se verifican las restricciones}\}$

- Si $(x,y)\in\Re\Rightarrow(x,y)$ puede ser solución (solución factible)
- Si $(x,y)\notin\Re\Rightarrow(x,y)$ no puede ser solución

Solución óptima: (x_0,y_0) tal que $f(x_0,y_0)$ tome el valor óptimo (máximo o mínimo)

2.- RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA

2.1. Naturaleza de las restricciones

El conjunto de soluciones factibles de un problema de programación lineal de dos variables es una *región convexa* del plano limitada por las rectas asociadas a las restricciones.

2.2. Dónde está y cómo se encuentra la solución

La solución óptima de un problema de programación lineal se encuentra siempre en la frontera de la región factible. En particular, una solución óptima se halla en alguno de los vértices de esa región

La frontera de la región factible viene determinada por las rectas asociadas a las restricciones.

Los vértices o puntos extremos son las intersecciones de esas rectas y se calculan resolviendo el sistema correspondiente.

Como el número de vértices es finito, puede hallarse el valor de la función objetivo $f(x,y)$ en cada uno de ellos; aquel que dé el valor máximo o mínimo es la solución buscada.

□ En el caso de que $f(x,y)$ tome el mismo valor (máximo o mínimo) en dos vértices, la solución óptima se da en cualquiera de los puntos del segmento que los une.

□ Para regiones abiertas este criterio no es concluyente.

2.3. Resolución gráfica mediante rectas de nivel

Las rectas de nivel dan los puntos del plano en los que la función objetivo toma el mismo valor.

Si la función objetivo es $f(x,y)=ax+by+c$, la ecuación de las rectas de nivel es de la forma:

$$ax+by+c=p\Leftrightarrow ax+by=k$$

y todas ellas son paralelas. Variando k (o p) se obtienen los distintos niveles para esas rectas y, en consecuencia, distintos valores para $f(x,y)$.

Como el nivel aumenta (o disminuye) desplazando las rectas, el máximo (o el mínimo) de $f(x,y)$ se alcanzará en el último (o en el primer) punto de contacto de esas rectas con la región factible.

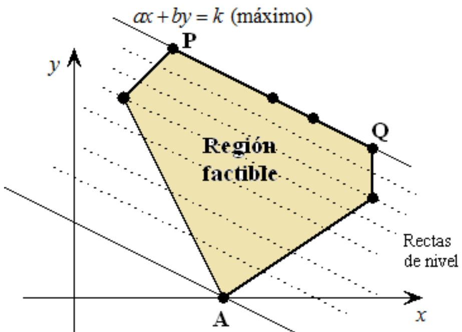
2.4. Discusión de la solución óptima

Ya sabemos que el valor óptimo de la función objetivo $f(x,y)$ se da en alguno de los vértices de la región factible. No obstante, este criterio puede resultar insuficiente en los tres casos siguientes:

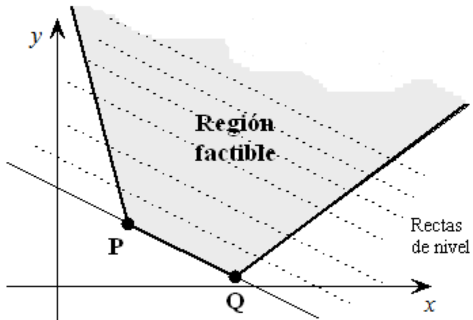
1. Hay dos vértices en los cuales $f(x,y)$ toma el mismo valor.
2. La región factible sólo tiene un vértice y, por tanto, no hay posibilidad de comparar.
3. El problema no tiene solución.

Resolución de los casos anteriores:

Caso1:

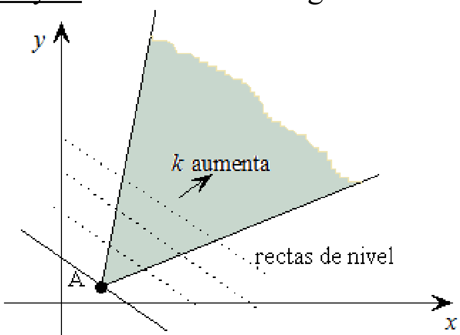


El máximo se da en cualquier punto del segmento PQ. El mínimo en A.

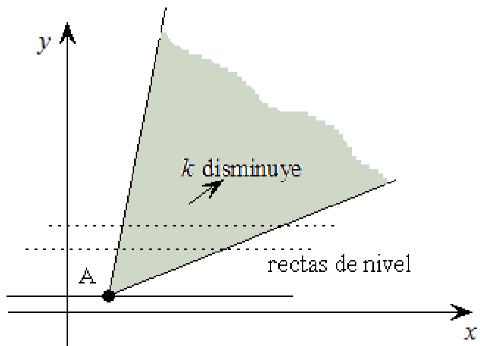


Todos los puntos del segmento PQ son mínimos de $f(x,y)$.

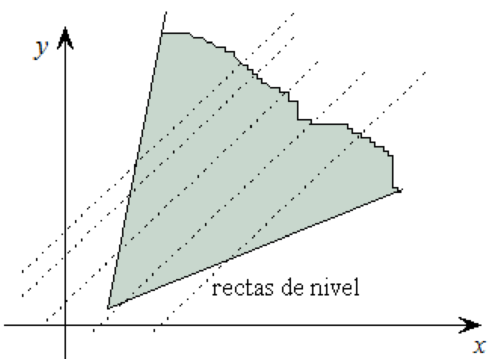
Casos 2 y 3: Sólo se dan en regiones no acotadas



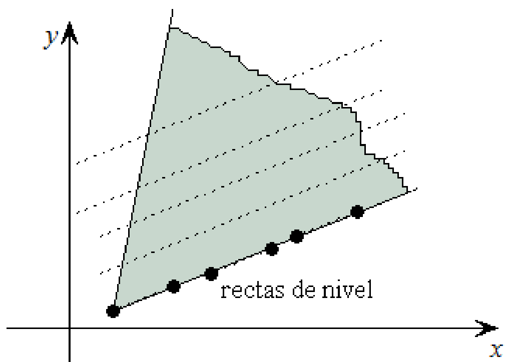
Sólo hay mínimo. En el punto A



Sólo hay máximo. En el punto A



No hay ni máximos ni mínimos.



Hay infinitos óptimos.

3.- ESQUEMA PRÁCTICO A SEGUIR

Paso 1: Leer detenidamente el enunciado: determinar el objetivo, definir las variables y escribir la función objetivo.

Paso 2: Reordenar los datos. Puede hacerse en forma de tabla.

Paso 3: A partir de las cantidades decididas, x e y, escribir las restricciones.

Paso 4: Expresar el problema en la forma estándar.

Paso 5: Representar gráficamente las restricciones y la región factible.

Paso 6: Hallar las coordenadas de los vértices del polígono obtenido.

Paso 7: Sustituir las coordenadas de esos puntos en la función objetivo y hallar el valor máximo o mínimo.

Paso 8: En regiones no acotadas es conveniente representar las rectas de nivel y comprobar que la solución gráfica coincide con la obtenida.

Paso 9: Criticar la solución: cerciorarse de que la solución hallada es lógica y correcta.

4.- EJEMPLOS RESUELTOS

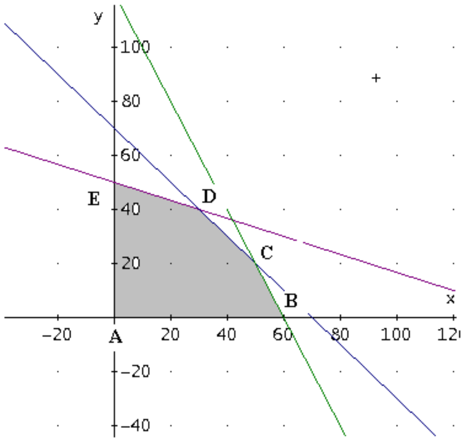
1) Un almacén realiza a sus clientes una oferta relativa a sus excedentes de tres productos para piscinas: 1500 litros de hipoclorito sódico, 1400 litros de algicida y 1200 litros de floculante. Para ello prepara dos tipos de lotes de oferta:
Tipo I: 10 litros de hipoclorito, 20 litros de algicida y 20 litros de floculante. Tipo II: 30 litros de hipoclorito, 20 litros de algicida y 10 litros de floculante. Cada lote del tipo I reporta un beneficio de 1000 euros. y cada lote del tipo II 1200 euros. Supongamos que se vendan todos los lotes preparados. Se pide: 1°) Dibujar la región factible. 2°) ¿Cuántos lotes de cada tipo conviene preparar para obtener el máximo beneficio?

		Hipoclorito sódico	Algicida	Floculante	Beneficio (euros)
Tipo I	x	10 litros	20 litros	20 litros	1 000
Tipo II	y	30 litros	20 litros	10 litros	1 200
Disponemos		1 500 litros	1 400 litros	1 200 litros	

Restricciones: $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \quad\quad x, y \in \mathbb{N} \\ 10x + 30y \leq 1500 \quad\quad (1) \\ 20x + 20y < 1400 \quad\quad (2) \\ 20x + 10y < 1200 \quad\quad (3) \end{cases}$

Función objetivo (a maximizar): $F(x, y) = 1000x + 1200y$

Dibujo de la región factible:



Resolviendo los sistemas correspondientes, obtenemos los puntos esquinas (puntos extremos):
A (0,0), B (60,0), C (50,20), D (30,40) y E (0,50).

Evaluamos la función objetivo en dichos puntos:

$$F_A(0,0)=0$$
$$F_B(60,0)=60\ 000$$
$$F_C(50,20)=74\ 000$$
$$F_D(30,40)=78\ 000$$
$$F_E(0,50)=60\ 000$$

La función objetivo es máxima en D (30,40), esto es, conviene comprar 30 lotes de tipo I y 40 lotes de tipo II para que el beneficio sea máximo. Este caso, dicho beneficio es de 78 000 euros.

2) Una empresa constructora de barcos fabrica en sus dos astilleros tres tipos de barcos: A, B y C. Se compromete a entregar anualmente a cierta compañía marítima 18 barcos del tipo A, 10 del tipo B y 6 del tipo C. El primer astillero construye mensualmente 3 barcos del tipo A, 2 tipo B y 1 tipo C, siendo el costo mensual de su funcionamiento de 5 millones de euros, y el segundo astillero construye mensualmente 2 barcos tipo A, 1 tipo B y 2 tipo C, siendo el costo mensual de funcionamiento de 3 millones de euros. ¿Cuántos meses al año deberá trabajar cada astillero para que la empresa cumpla su compromiso adquirido y consiga reducir al mínimo el costo de funcionamiento?

La función objetivo es el costo, y hay que minimizarla. Llamando x al número de meses de trabajo del primer astillero e y al número de meses de trabajo del segundo astillero, se tiene que

$$f(x,y)=5x+3y \text{ (en millones de euros)}$$

Construimos una tabla para obtener las restricciones:

	Tipo A	**Tipo B**	**Tipo C**
x	3	2	1
y	2	1	2

Las restricciones son: $\begin{cases} 3x+2y\geq 18 \\ 2x+y\geq 10 \\ x+2y\geq 6 \\ x,y\geq 0 \end{cases}$

Dibujo de la región factible:

$3x+2y\geq 18$

$3x+2y=18$

x	y
0	9
6	0

$(0,0)\to 0\geq 18$ Falso

$2x+y\geq 10$

$2x+y=10$

x	y
0	10
5	0

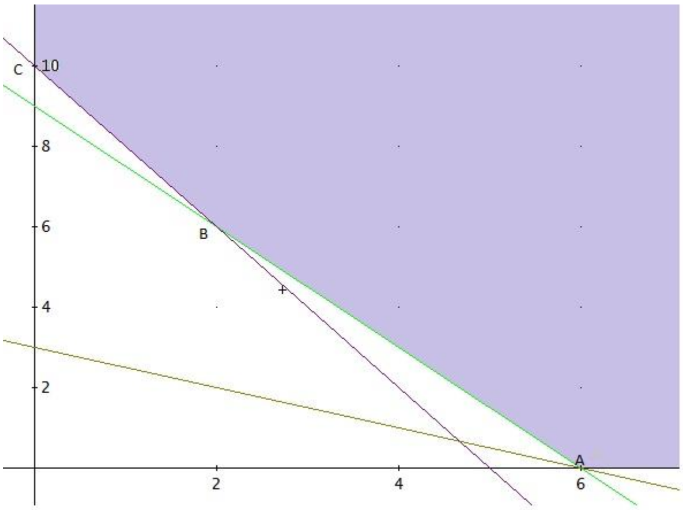
$(0,0)\to 0\geq 10$ Falso

$x+2y\geq 6$

$x+2y=6$

x	y
0	3
6	0

$(0,0)\to 0\geq 6$ Falso



Cálculo de los puntos extremos:

A (6, 0), C (0, 10)

$$C\begin{cases}3x+2y=18\\2x+y=10\end{cases}\rightarrow C(2,6)$$

Evaluamos la función objetivo en los puntos extremos:

$f_A(6,0)=6\cdot 5=30$ mill. de €

$f_B(2,4)=2\cdot 5+6\cdot 3=28$ mill. de €

$f_C(0,10)=0\cdot 5+10\cdot 3=30$ mill. de €

Por tanto, para que el costo de producción sea mínimo el primer astillero tiene que trabajar 2 mese y el segundo 6, en cuyo caso, dicho costo mínimo es de 28 mill. de euros.

3) Una fábrica de fertilizantes produce dos tipos de abono, A y B, a partir de dos materias primas M_1 y M_2. Para fabricar 1 tonelada de A hacen falta 500 kg de M_1 y 750 kg de M_2, mientras que las cantidades de M_1 y M_2 utilizadas para fabricar 1 tonelada de B son 800 kg y 400 kg, respectivamente. La empresa tiene contratado un suministro máximo de 10 toneladas de cada materia prima y vende a 1000 € y 1500 € cada tonelada de abono A y B, respectivamente. Sabiendo que la demanda de B nunca llega a triplicar la de A, ¿cuántas toneladas de cada abono debe fabricar para maximizar sus ingresos y cuáles son estos?

La función objetivo son los ingresos que obtiene por la venta de la materia prima, y hay que maximizarla. Llamando x al número de toneladas de abono de tipo A e y al número de toneladas de abono de tipo B, se tiene que $f(x,y)=1000x+1500y$ (euros)

Construimos una tabla para obtener las restricciones:

	M_1	M_2
x	0,5	0,75
y	0,8	0,4
Disponibilidad	10	10

Las restricciones son: $\begin{cases}0,5x+0,8y\le 10\\0,75x+0,4y\le 10\\x\le 3y\\x,y\ge 0\end{cases}$

Dibujo de la región factible:

$0,5x+0,8y\le 10$

$0,5x+0,8y=10$

x	y
0	12,5
20	0

$(0,0)\rightarrow 0\le 10$ Verdadera

$x\le 3y$

$x=3y$

x	y
0	0
30	10

$(0,10)\rightarrow 0\le 30$ Verdadera

$0,75x+0,4y\le 10$

$75x+40y\le 1000$

$75x+40y=1000$

x	y
0	25
$\frac{40}{3}$	0

$(0,0)\rightarrow 0\le 10$ Verdadera

Cálculo de los puntos extremos (resolviendo los correspondientes sistemas de ecuaciones lineales):

A(0 , 0), B(11,32 , 3,77), C(10 , 6,25) y D(0 , 12,5).

Rectas de nivel:
Ahora vamos a resolverlo usando las rectas de nivel, es decir, dibujamos la función (recta)

$$1000x + 1500y = k \Leftrightarrow 3x + 3y = p \text{ (ya simplificada)}$$

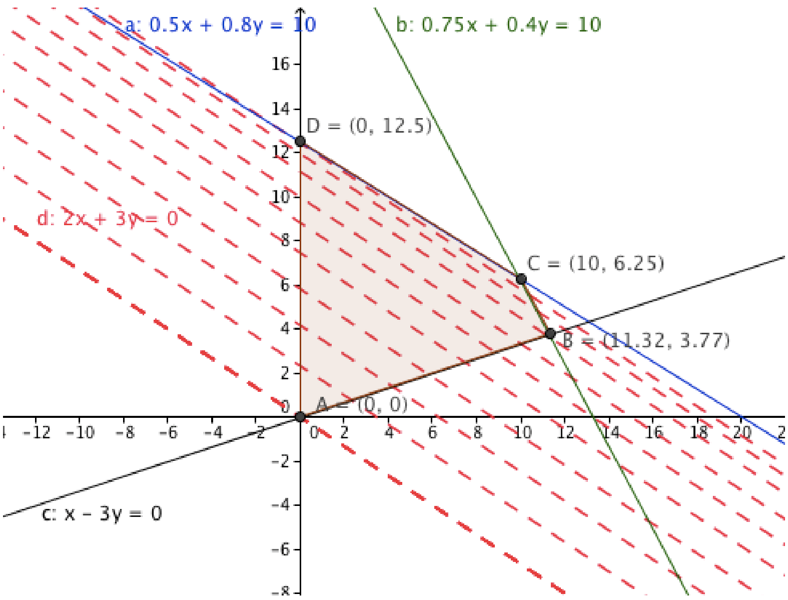
y le vamos dando valores a p:

para p = 0, la recta pasa por el origen de coordenadas

para p = 1, 2, 3,… se van obteniendo rectas paralelas a la primera

y lo que hay que hacer es ver cuál es el último punto extremo por el que pasa una de esas rectas de nivel (por que estamos maximizando). Dicho punto extremo será el máximo buscado.

En este caso, es el punto C, como se puede apreciar en la gráfica siguiente, luego en él se alcanza el máximo de esta función.



Así, los ingresos máximos ascienden a $f(10 , 6,25) = 1000 \cdot 10 + 1500 \cdot 6,25 = 19375$ €, y se obtienen fabricando 10 toneladas de abono de tipo A y 6,25 toneladas de abono de tipo B.

5.- PROBLEMAS

1. **[Junio de 2000]** Las 18 chicas y los 24 chicos de 2° de Bachillerato de un centro docente organizan un viaje. Para financiarlo deciden trabajar por las tardes en una empresa encuestadora que contrata equipos de dos tipos

Tipo A: Dos chicas y cuatro chicos. Tipo B: Tres chicas y tres chicos. La empresa abona por una tarde de trabajo 3000 ptas. al equipo del tipo A y 5000 ptas. al equipo del tipo B. Se pide: 1º) Dibujar la región factible. 2°) ¿Cómo les conviene distribuirse para obtener la mayor cantidad posible de dinero? 3°) Si la empresa abonara por una tarde de trabajo 4000 ptas. al equipo del tipo A y 4000 ptas. al equipo del tipo B. ¿Cómo les convendría entonces hacer la distribución?

2. **[Septiembre de 2000]** Una fábrica envasa al día durante una campaña de Navidad 180 kg. de turrón. Produce tabletas medianas y grandes de peso neto 200 gr y 300 gr, respectivamente. Se deben fabricar un número de tabletas medianas no superior al triple de tabletas grandes. El beneficio es de 110 Ptas. por tableta mediana y 150 Ptas. por tableta grande. Se pide: 1°) Representar la región factible. 2°) ¿Cuántas tabletas de cada clase deben producirse al día para que el beneficio sea máximo?

3. **[Reserva 1 de 2000]** Dada la función objetivo $F(x,y) = x + 3y$ sujeta a las restricciones siguientes:

a) $x + 2y \geq 2$; b) $x - y \leq 2$ c) $2x - y \geq -1$ d) $x + y \leq 4$; e) $x \geq 0$ f) $y \geq 0$

Se pide: 1°) Representar la región factible. 2°) Valor de x y valor de y que hacen máxima la función *F*.

4. **[Reserva 2 de 2000]** Un almacén realiza a sus clientes una oferta relativa a sus excedentes de tres productos para piscinas: 1500 litros de hipoclorito sódico, 1400 litros de algicida y 1200 litros de floculante. Para ello prepara dos tipos de lotes de oferta:
Tipo I: 10 litros de hipoclorito, 20 litros de algicida y 20 litros de floculante. Tipo II: 30 litros de hipoclorito, 20 litros de algicida y 10 litros de floculante. Cada lote del primer tipo reporta un beneficio de 1000 Ptas. y cada lote del segundo tipo 1200 ptas. Supongamos que se vendan todos los lotes preparados. Se pide: 1°) Dibujar la región factible. 2°) ¿Cuántos lotes de cada tipo conviene preparar para obtener el máximo beneficio?

5. **[Junio de 2001]** Una tienda de golosinas dispone de dos tipos de bolsas para cumpleaños con el siguiente contenido:

Tipo I: 2 chicles, 3 piruletas, 8 caramelos y 1 bolsa de patatas fritas.

Tipo II: 4 chicles, 4 piruletas, 5 caramelos y 2 bolsas de patatas fritas.

En un determinado día el número de chicles de que dispone la tienda para el envasado de las bolsas no puede ser superior a 240 unidades y el número de piruletas no puede superar las 300 unidades. Además, por problemas de envases, el número de bolsas del Tipo I no puede ser superior a 40. El beneficio por la venta es: 150 pesetas por cada bolsa del Tipo I y 225 por cada bolsa del Tipo II. Halla el número de bolsas de cada tipo que deberían venderse en ese día para que el beneficio obtenido sea el mayor posible.

6. **[Septiembre de 2001]** Un Ciber-café realiza dos ofertas entre sus clientes habituales:

Oferta I: 1 refresco, 3 bizcochos y 20 minutos de conexión a Internet.

Oferta II: 1 refresco, 2 bizcochos y 30 minutos de conexión a Internet.

Las características del local limitan a 50 horas diarias el tiempo máximo de conexión a Internet al no disponer de almacén, sólo se puede acumular un máximo de 100 refrescos y 240 bizcochos. Un cliente que opte por la Oferta I produce un beneficio de 500 pesetas y si opta por la Oferta II el beneficio es de 450 pesetas. Halla el número de clientes que deberían elegir cada una de las ofertas para que el beneficio total fuese lo mayor posible.

7. **[Reserva 1 de 2001]** ** Un atleta utiliza dos tipos de sesiones en su entrenamiento; Tipo 1: 10 carreras cortas de 100 metros cada una y 4 carreras largas de 3 kilómetros cada una. Tipo II: 10 carreras cortas de 300 metros cada una y 3 carreras largas de 2 kilómetros cada una. El tiempo que tarda el atleta en realizar una sesión del Tipo I es de 60 minutos y en realizar una sesión del Tipo II, 50 minutos. En carreras cortas el número de kilómetros semanales no puede ser superior a 9, y en carreras largas el número de kilómetros semanales no puede ser superior a 48. Halla el número de sesiones de cada tipo que debe realizar a la semana para que el tiempo de entrenamiento sea el mayor posible. ¿Cuál es ese tiempo?

8. **[Reserva 2 de 2001]** Un fabricante de helados utiliza dos tipos de envase para sus helados de vainilla: Cono de galleta y tarrina con capacidades respectivas de 30 y 20 centilitros. Diariamente envasa un máximo de 14 litros de helado. El número de conos de galleta no puede superar al cuádruplo del número de tarrinas y el número de éstas no puede superar al doble del número de conos de galleta. El precio de venta al público es: 275 pesetas el cono de galleta y 225 pesetas la tarrina El precio de coste es: 140 pesetas el cono de galla y 120 pesetas la tarrina. Halla cuántos envases de cada tipo debe realizar para que el beneficio diario sea máximo.

9. **[Junio de 2002]** En el último Salón Internacional del automóvil celebrado en España, un pequeño fabricante presentó sus modelos Caaper (precio por unidad: 16.000 euros) y Ena (precio por unidad: 15.000 euros). El coste de producción por unidad es, respectivamente, 10.400 y 9.750 euros. Para la fabricación de una unidad del primer modelo se necesitan 3 m^2 de un determinado producto textil y 7,5 Kg. de pintura especial, mientras que para la fabricación de una unidad del segundo modelo se necesitan 4 m^2 de producto textil y 7 Kg. de pintura. Mensualmente existen en el almacén 96 m^2 de producto textil y 195 kg de pintura.
a) Representa la región factible. b) Halla cuántas unidades de cada modelo interesa fabricar mensualmente para que las ventas de las mismas produzcan el máximo beneficio. c) Calcula dicho beneficio.

10. **[Septiembre de 2002]** * Un fabricante de llaveros decide aplicar durante un día los siguientes criterios para la producción y venta de sus artículos: El doble del número de llaveros dorados (x) fabricados debe ser mayor o igual que el número de llaveros plateados (y). En cambio, si este último número se aumentase en 30, la cantidad obtenida seria mayor que el doble del número de llaveros dorados. El número de llaveros plateados no puede ser mayor de 40. La venta de un llavero dorado da un beneficio de 0,8 euros y la de uno plateado 0,65 euros.
a) Representa la región factible b) Halla los valores de x e y para que el beneficio sea el mayor posible. c) Calcula el beneficio máximo.

11. **[Reserva 1 de 2002]** Una fábrica debe producir diariamente, además de otros productos, entre 110 y 165 litros de zumo de naranja con multivitaminas. Para su comercialización dispone de dos tipos de envases: Tipo A de 1/3 de litro de capacidad y tipo B de 1/4 de litro de capacidad. Por razones de estrategia comercial, el número de envases del tipo A debe ser superior o igual que el doble del número de envases del tipo B. El beneficio obtenido por la venta es de 1 euro por cada envase del tipo A y 0,9 euros por cada envase del tipo B.
a) Representa la región factible. b) Halla el número de envases de cada tipo que debe utilizar para que el beneficio obtenido sea el mayor posible. c) Calcula ese beneficio máximo.

12. **[Reserva 2 de 2002]** Una tienda de ropa decide aprovechar las rebajas de verano para lanzar una oferta con sus excedentes de camisas (260 unidades), pantalones (140 unidades) y camisetas (50 unidades). Para ello prepara dos tipos de lotes; L1: 3 camisas, 2 pantalones y L2: 4 camisas, 1 pantalón, 1 camiseta. El beneficio obtenido por la venta de un lote del tipo L1 es de 10 euros y por la de un lote del tipo L2 de 8 euros.
a) Representa la región factible. b) Halla el número de lotes de cada oferta que le conviene vender para que el beneficio obtenido sea el máximo posible. c) Calcula dicho beneficio.

13. **[Junio de 2003]** Una empresa de productos de papelería dispone de 270 metros cuadrados de cartón y 432 metros de cinta de goma para la fabricación de dos tipos de carpetas: Tamaño folio y tamaño cuartilla. Para una del primer tipo se necesitan 0,20 metros cuadrados de cartón y 30 centímetros de cinta de goma y se vende a 1,40 euros la unidad. Para una carpeta del segundo tipo se necesitan 0,15 metros cuadrados de cartón y 27 centímetros de cinta de goma y se vende a 1,10 euros la unidad. 1) Representa la región factible. 2) ¿Cuántas carpetas de cada tipo interesa fabricar para que el beneficio que se obtiene con su venta sea lo más grande posible? 3) Calcula ese beneficio máximo.

14. **[Septiembre de 2003]** Una fábrica de mesas de jardín está especializada en dos modelos: ovalado y octogonal. Para la fabricación de una mesa del primer tipo se necesita 1 hora de trabajo y 2 kilos de material plástico. Para la fabricación de una mesa del segundo tipo se necesitan 3 horas de trabajo y 3 kilos de material plástico. Diariamente la fábrica dispone de obreros para realizar como máximo 36 horas de trabajo y de un máximo de 60 kilos de material plástico. Además, el número de mesas ovaladas no puede ser menor de 9 unidades. Por la venta de una mesa del primer tipo se obtienen 19 euros y por una del segundo tipo, 30 euros. 1) Representa la región factible. 2) Halla cuántas mesas de cada tipo deben fabricarse diariamente para que con su venta se obtenga un beneficio máximo. 3) Calcula ese beneficio máximo.

15. **[Reserva 1 de 2003]** ** Para obtener dinero para la excursión fin de curso, un grupo de estudiantes decide, durante el tiempo de recreo, envasar cartuchos de tinta para pluma estilográfica, de dos formas: Envase tipo A: 5 cartuchos de tinta azul y 1 cartuchos de tinta negra- Envase tipo B: 2 cartucho de tinta azul y 6 cartuchos de tinta negra. Como mínimo deben utilizar 600 cartuchos de tinta azul y como máximo 2000 de tinta azul y 1800 de tinta negra. El cartucho de tinta azul cuesta 0'10 céntimos de euro y el de tinta negra 0,12 céntimos de euro. El precio de venta de un envase del tipo A es de 1,10 euros y el de un envase del tipo B es de 1,25 euros. 1) ¿Cuál es la ganancia que se obtiene por la venta de cada tipo de envase? 2) Representa la región factible. 3) Halla cuántos envases de cada tipo deben comercializar para que el beneficio que se obtenga con su venta sea lo más grande posible.

16. **[Reserva 2 de 2003]** El dueño de un vivero lanza una oferta de sus existencias en geranios y petunias. En el vivero hay 480 macetas de geranios y 350 macetas de petunias. Prepara dos tipos de lotes:

Lote A: 5 macetas de geranios y 7 macetas de petunias.
Lote B: 8 macetas de geranios y 2 macetas de petunias.

La ganancia por la venta de un lote del tipo A es de 13 euros y por uno del tipo B, 17 euros. 1) Representa la región factible. 2) Halla cuántos lotes de cada tipo debe vender para que el beneficio obtenido sea lo mayor posible. 3) Calcula cuál es ese beneficio máximo.

17. **[Junio de 2004]** Un fabricante de abanicos dispone de dos modelos A y B. El modelo A requiere, para su elaboración, 20 cm^2 de papel, 120 cm^2 de lámina de madera y 1 enganche metálico. El modelo B requiere: 60 cm^2 de papel, 80 cm^2 de lámina de madera y 1 enganche metálico. El coste de producción de cada modelo es 1,20 euros el A y 1,30 euros el B. El precio de venta es de 1,80 euros cada uno, independientemente del modelo. Teniendo en cuenta que las existencias son de 3000 cm^2 de papel, 7200 cm^2 de lámina de madera y 70 enganches. 1) Representa la región factible. 2) Determina el número de abanicos de cada modelo que ha de hacer para obtener un beneficio máximo. 3) Calcula cuál es ese beneficio.

18. **[Septiembre de 2004]** Un concesionario de motos necesita vender diariamente entre 1 y 5 unidades del modelo X y más de una unidad del modelo Y. Por cuestiones de estrategia comercial, la suma del número de unidades que se deben vender del módulo X y del doble de unidades de Y debe ser como máximo 13. Además, la diferencia entre el número de unidades de Y y de X no puede ser mayor que 2. La venta de una moto del modelo X le reporta un beneficio de 1000 euros y

la venta de una del modelo Y, 1100 euros.
1) Representa la región factible. 2) Determina el número de motos que debe vender de cada modelo para que el beneficio sea lo más grande posible. 3) Calcula cuál es ese beneficio máximo.

19. **[Reserva 1 de 2004]** Un almacenista quiere realizar una oferta, relativa a dos tipos de pintura: Con brillo y mate en envases de 0,5 litros:

Lote A: 2 botes de pintura con brillo y 3 de pintura mate.

Lote B: 3 botes de pintura con brillo y 2 de pintura mate.

El número de envases almacenados es de 240 de pintura con brillo y 300 de pintura mate. No puede vender diariamente más de 90 lotes del tipo A ni más de 60 lotes del tipo B. La venta de un lote A le reporta un beneficio de 2 euros y la venta de un lote B, 1,80 euros. 1) Representa la región factible. 2) Determina cuántos lotes de cada tipo debe vender para que el beneficio obtenido sea lo más grande posible. 3) Calcula ese beneficio máximo.

20. **[Reserva 2 de 2004]** Para la fabricación de un determinado abono orgánico A se necesita una sustancia química B, con la siguiente condición: La cantidad de sustancia A debe estar comprendida entre la cantidad de sustancia B y el triple de ésta. El beneficio por la venta de 1 kilogramo de A es de 10 euros y el coste de cada kilogramo de B es de 6 euros. En un determinado día de producción, la suma de las cantidades de A y de B no puede superar los 800 kilogramos. 1) Representa la región factible. 2) Determina la cantidad de abono producido para que el beneficio sea máximo. 3) Calcula cuál es ese beneficio máximo.

21. **[Junio de 2005]** Un taller pirotécnico fabrica cohetes sencillos que luego vende a 2´70 euros el paquete de 10 y cohetes de colores que vende a 3´60 el paquete de 10. Por problemas de mecanización no pueden fabricar al día más de 400 cohetes sencillos ni más de 300 cohetes de colores, ni más de 500 cohetes sumando los de las dos clases. Se supone que se vende toda la producción. **1)** Representa la región factible. **2)** ¿Cuántos cohetes de cada clase convendrá fabricar y vender para que el beneficio sea máximo? **3)** Calcula ese beneficio máximo.

22. **[Septiembre de 2005]** Una empresa de autobuses de diversos tipos y capacidades dispone, en un determinado día, de un máximo de 7 conductores y de 6 conductoras. Recibe el encargo de transportar a los 528 alumnos de un centro docente con el fin de realizar una excursión de un día de duración. Si un conductor maneja un autobús de 44 plazas, entonces las conductoras deben manejar obligatoriamente los de 66 plazas. Por el contrario, si una conductora maneja un autobús de 24 plazas, entonces los conductores deben manejar obligatoriamente los de 72 plazas. La cantidad que cobra la empresa es de 500 euros al día por conductor, independientemente de si es hombre o mujer. **1)** Representa la región factible. **2)** Determina el número de conductores y el número de conductoras para que el beneficio empresarial sea máximo. **3)** Calcula ese beneficio máximo

23. **[Reserva 1 de 2005]** Se consideran dos estaciones A y B de una línea ferroviaria. Si el número de personas que transporta un tren que circula desde A hasta B o desde B hasta A es 100, entonces el número de personas transportadas al cabo de un día es como máximo de 900. En cambio, si los trenes que circulan desde B hasta A admitieran el doble de pasajeros y los de A a B igual que antes, entonces el número de personas transportadas al cabo de un día sería como máximo de 1400. Un viaje diario, en sentido de A a B, le reporta a la empresa una ganancia de 10000 euros y uno en sentido de B a A, una ganancia de 11000 euros. **1)** Representa la región factible. **2)** Calcula el número de trenes que deben circular en cada sentido para que el beneficio sea el mayor posible. **3)** Calcula ese beneficio máximo.

24. **[Reserva 2 de 2005]** Un comerciante dispone en el almacén de 38 kg. de arroz en bolsas de 1 kg. y de 17 kg. de azúcar también en bolsas de 1 kg. Quiere liquidar estas existencias y para ello pone a la venta dos lotes de la forma: Lote A: 3 kg. de arroz y 2 kg. de azúcar a 4´6 euros la unidad; Lote B: 4 kg. de arroz y 1 kg. de azúcar a 4´8 euros la unidad. Por cuestiones de estrategia comercial decide vender un máximo de 7 unidades del lote A y 8 unidades del lote B. **1)** Representa la región factible. **2)** Halla el número de lotes de cada tipo que debe vender para que el beneficio sea el máximo posible. **3)** Calcula ese beneficio máximo.

25. **[Junio de 2006]** En una tienda de artículos deportivos se pueden adquirir, entre otros productos, raquetas de bádminton y raquetas de tenis. El beneficio por la venta de cada raqueta es de 20 y 25 euros, respectivamente. Por cuestiones de estrategia comercial, se decide vender al día, como máximo, 6 raquetas de bádminton y 5 de tenis. Considerando que el número total de raquetas vendidas no puede ser mayor que 7, **1)** representa la región factible, **2)** halla el número de raquetas que debe venderse de cada clase para que el beneficio sea máximo y **3)** calcula ese beneficio máximo.

26. **[Septiembre de 2006]** Un establecimiento de electrodomésticos decide ofrecer a sus clientes habituales lavadoras a 200 euros la unidad y frigoríficos a 250 euros la unidad. Para atender esta oferta, se dispone de 10 lavadoras y 7 frigoríficos. Considerando que el doble del número de lavadoras que se vendan más el triple del número de frigoríficos no puede ser mayor que 29, **1)** representa la región factible, **2)** determina cuántas unidades de cada uno de los electrodomésticos citados deben venderse para que el beneficio sea máximo, **3)** calcula ese beneficio máximo.

27. **[Reserva 1 de 2006]** Un bazar especializado en enseres para el hogar realiza a sus clientes, y solamente para la 1ª hora de apertura del establecimiento, la siguiente oferta:

Lote A: 1 tenedor, 2 cucharas y 1 sacacorchos.

Lote B: 2 tenedores, 1 cuchara y 1 sacacorchos.

Los precios de cada lote son de 1,5 y 1,3 euros, respectivamente. Para cubrir esta oferta, el bazar dispone de 40 tenedores, 40 cucharas y 24 sacacorchos. **1)** Representa la región factible. **2)** Halla el número de lotes de cada clase que se deben vender para que el beneficio sea máximo. **3)** Calcula ese beneficio máximo.

28. **[Reserva 2 de 2006]** Un video-club ofrece a sus clientes la siguiente oferta fin de semana: Lote A: 1 película de acción, 2 películas románticas y 7 infantiles. Lote B: 2 películas de acción, 3 películas románticas y 4 infantiles.

Los precios de cada lote son de 6 y 4,80 euros, respectivamente. Para cubrir esta oferta, el vídeo-club dispone de 40 películas de acción, 62 películas románticas y 126 infantiles. **1)** Representa la región factible. **2)** Halla el número de lotes de cada clase que deben alquilarse para que el beneficio sea máximo. **3)** Calcula ese beneficio máximo.

29. **[Junio de 2007]** Una persona tiene 1500 euros para invertir en dos tipos de acciones A y B. El tipo A tiene un interés simple anual del 9 % y el tipo B del 5 %. Decide invertir como máximo 900 euros en acciones A y como mínimo 300 euros en acciones del tipo B y además decide invertir en A por lo menos tanto como en B. **1)** Dibuja la región factible. **2)** ¿Cómo debe invertir los 1500 euros para que los beneficios anuales sean los máximos posibles? **3)** Calcula esos beneficios anuales máximos.

30. **[Septiembre de 2007]** Una fábrica de lámparas produce dos modelos A y B. El modelo A necesita dos horas de trabajo de chapa y 1 una hora de pintura. El modelo B necesita una hora de chapa y 2 de pintura. Semanalmente se emplean como máximo 80 horas en trabajos de chapa y 100 horas en trabajos de pintura. Cada unidad del modelo A se vende a 75 euros y cada unidad del modelo B a 80 euros. **1)** Dibuja la región factible. **2)** Determina el número de lámparas de cada tipo que interesa producir para que el beneficio obtenido con su venta sea lo mayor posible. **3)** Calcula el beneficio máximo

31. **[Reserva 1 de 2007]** Una fábrica de artículos de cerámica lanza al mercado platos y jarrones para adorno al precio de 20 euros cada plato y 15 euros cada jarrón. Cada plato necesita 25 minutos de modelado y 25 minutos de pintura y cada jarrón necesita 30 minutos de modelado y 10 minutos de pintura. El número de operarios existentes en la fábrica permite dedicar un máximo de 25 horas para trabajos de modelado y 16 horas y 40 minutos para trabajos de pintura. **1)** Dibuja la región factible. **2)** ¿Cuántas piezas de cada clase conviene fabricar para que el beneficio obtenido con su venta sea lo mayor posible? **3)** Calcula el beneficio máximo posible.

32. **[Reserva 2 de 2007]** Una fábrica de trofeos deportivos realiza la siguiente oferta diaria:

Lote A: 3 medallas y cuatro placas. Precio de venta: 25 euros.

Lote B: 4 medallas y una placa. Precio de venta: 30 euros.

Para atender las peticiones diarias dispone en el almacén de 37 medallas y 32 placas. Por razones de estrategia comercial decide no vender más de 7 unidades del lote B. **1)** Dibuja la región factible. **2)** Determina el número de lotes de cada tipo que debe vender para que el beneficio obtenido sea máximo. **3)** Calcular ese beneficio máximo.

33. **[Junio de 2008]** Una compañía de telefonía móvil quiere celebrar una jornada de "Consumo razonable" y ofrece a sus clientes la siguiente oferta: 15 céntimos de euro por cada mensaje SMS y 25 céntimos de euro por cada minuto de conversación incluyendo el coste de establecimiento de llamada. Impone las condiciones: (a) El número de llamadas de un minuto no puede ser mayor que el número de mensajes aumentado en 3, ni ser menor que el número de mensajes disminuido en 3. (b) Sumando el quíntuplo del número de mensajes con el número de llamadas no puede obtenerse más de 27. 1) Dibuja la región factible. 2) Determina el número de mensajes y de llamadas para que el beneficio sea máximo. 3) ¿Cuál es ese beneficio máximo?

34. **[Septiembre de 2008]** Un camión para el transporte de electrodomésticos cobra 25 euros por cada frigorífico de 0,6 m^2 de base y 22 euros por cada lavavajillas de 0,5 m^2 de base. El camión dispone de 9 m^2 como máximo para este tipo de carga. Por necesidades de demanda el número de lavavajillas no puede superar al 60 % del número de frigoríficos. Se deben transportar como mínimo 5 frigoríficos. 1) Dibuja la región factible. 2) Determina el número de electrodomésticos de cada clase para que el beneficio obtenido con el transporte sea lo más grande posible. 3) Calcula el beneficio máximo.

35. **[Reserva 1 de 2008]** Una droguería realiza a sus clientes la oferta siguiente: Lote A: 3 paquetes de detergente y 3 botellas de lavavajillas. Lote B: 2 paquetes de detergente y 4 botellas de lavavajillas. El precio de venta de cada lote A es de 24 euros y de cada lote B, 22 euros, pero no pueden venderse más de 9 lotes de la clase B. En el almacén hay 36 paquetes de detergente y 48 botellas de lavavajillas. 1) Dibuja la región factible. 2) Determina cuántos lotes de cada clase hay que vender para que el beneficio sea máximo. 3) Calcula el beneficio máximo.

36. **[Reserva 2 de 2008]** Una frutería decide, a última hora, realizar la siguiente oferta: Un lote A al precio de 2,80 euros compuesto por 3kg. de naranjas y 1 kg. de peras y un lote B al precio de 2,60 euros, compuesto por 1 kg. de naranjas y 2 kg. de peras. En el almacén hay 27 kg. de naranjas y 14 kg. de peras. Por cuestiones de marketing decide que el número de lotes de la clase B, ni sea superior a cuatro, ni sea superior al doble del número de lotes de la clase A. 1) Dibuja la región factible. 2) Determina el número de lotes de cada clase que se deben vender para que el beneficio sea máximo. 3) ¿Cuál es ese beneficio máximo?

37. **[Junio de 2009]** Una confitería realiza una oferta a sus clientes través de dos tipos de lotes A y B. El lote A lleva 3 tabletas de turrón y 5 cajas de bombones. El lote B está compuesto por 5 tabletas de turrón y 3 cajas de bombones. Por cuestiones de estrategia comercial, el número de lotes del tipo B debe ser menor que el número de lotes del tipo A incrementado en 4. El número de tabletas de turrón disponibles en el almacén para esta oferta es 52 y el de cajas de bombones, 60. La venta de un lote del tipo A reporta una ganancia de 6,5 euros y uno del tipo B, 8,5 euros. 1) Dibuja la región factible. 2) Determina el número de lotes de cada tipo que debe vender para que la ganancia sea lo mayor posible. 3) Calcula esa ganancia máxima.

38. **[Septiembre de 2009]** Un establecimiento de artículos deportivos realiza entre sus clientes la oferta siguiente:

	Pelotas de tenis	Pelotas de ping-pong	Pelotas de golf	Beneficio por lote
Lote Tipo A	2	5	2	15 euros
Lote Tipo B	5	4	3	20 euros
Existencias	55	75	37	

1) Dibuja la región factible. 2) Determina el número de lotes de cada tipo que debe vender para que el beneficio sea lo mayor posible. 3) Calcula el beneficio máximo.

39. **[Reserva 1 de 2009]** Una persona decide ingresar parte de sus ahorros en dos entidades bancarias con las siguientes condiciones: (a) La cantidad “x” depositada en la entidad A no puede superar los 1200 euros. (b) La cantidad “y” depositada en la entidad B no puede superar los 800 euros. (c) La suma del quíntuplo de la cantidad depositada en A y del séxtuplo de la cantidad depositada en B no puede exceder de 7800 euros. El interés anual ofrecido por la entidad A es del 3,5 % y el ofrecido por la entidad B es del 3,75 %. 1) Dibuja la región factible. 2) Determina las cantidades que debe depositar en cada una de las entidades para que, en las condiciones expuestas, el beneficio sea lo mayor posible. 3) Calcula el beneficio máximo.

40. **[Reserva 2 de 2009]** Para preparar una prueba final, un estudiante decide dedicar un tiempo “x” al trabajo personal realizado en casa y un tiempo “y” al trabajo en equipo a desarrollar en la biblioteca del centro, con las siguientes condiciones: (a) El tiempo en casa no puede superar las 5 horas. (b) El tiempo de trabajo en la biblioteca no puede ser mayor de 3 horas y 20 minutos. (c) El tiempo de trabajo en casa más el triple del tiempo de trabajo en la biblioteca no puede superar las 12 horas. Se considera que el aprovechamiento efectivo del tiempo es del 60 %, el de casa y del 45 % el de la biblioteca. 1) Dibuja la región factible. 2) Determina el tiempo que debe dedicar al trabajo en casa y en la biblioteca para que el aprovechamiento sea lo mayor posible. 3) Calcula el aprovechamiento máximo.

41. **[Junio de 2010 – Propuesta A]** Una fábrica de ordenadores va a lanzar al mercado dos nuevos modelos (uno básico y otro de lujo). El coste de fabricación del modelo básico es de 300 euros y el del modelo de lujo 1000 euros, disponiendo para esta operación de lanzamiento de 28000 euros. Para evitar riesgos, de momento se cree conveniente lanzar al menos el doble de ordenadores del modelo básico que del modelo de lujo y, en todo caso, no fabricar más de 50 ordenadores del básico. Además, se quiere fabricar no menos de 10 ordenadores de lujo.

a) Representa la región factible.
b) ¿Cuántos ordenadores debe fabricar si quiere maximizar el número total de ordenadores fabricados?
c) Si fabrica el máximo número de ordenadores posibles, ¿agota el presupuesto disponible?

42. **[Septiembre de 2010 – Propuesta B]** Una compañía de publicidad ofrece a sus clientes anuncios de radio y televisión. El beneficio esperado por cada anuncio de radio es de 15 euros, y 17 por cada anuncio de televisión. La compañía impone las condiciones:
El número de anuncios de radio no puede ser mayor que el número de anuncios de televisión aumentado en uno, ni ser menor que el número de anuncios de televisión disminuido en 5. Sumando el doble del número de anuncios de radio con el número de anuncios de televisión no puede obtenerse más de 14.
a) Dibuja la región factible.
b) Determina el número de anuncios de radio y televisión para que el beneficio sea máximo.
c) ¿Cuál es ese beneficio máximo?

43. **[Reserva 1 de 2010 – Propuesta A]** Un camión para el transporte de productos cobra 25 euros por cada caja grande de 0.6 m^2 de base y 22 euros por cada caja pequeña de 0.5 m^2 de base. El camión dispone de 9 m^2 de base como máximo para este tipo de carga y las cajas no se pueden apilar. Por necesidades de demanda el número de cajas pequeñas no puede superar al 60 % del número de grandes. Se deben transportar como mínimo 5 grandes.
a) Dibuja la región factible.
b) Determina el número de cajas de cada clase para que el beneficio obtenido con el transporte sea lo más grande posible.
c) Calcula el beneficio máximo.

44. **[Reserva 2 de 2010 – Propuesta B]** Un agricultor dispone de una tierra de 9 hectáreas de extensión que puede dedicar total o parcialmente al cuidado de vid y de pistachos. Queriendo plantar al menos 3 hectáreas más de viñedo que de pistachos y por lo menos 2 hectáreas de pistachos, además tiene que plantar de pistachos menos del doble que de vid. La hectárea de viñedo le reporta un beneficio de 300 euros, mientras que la de pistachos 400 euros.
a) Representa la región factible.
b) ¿Qué extensión de terreno puede plantar con cada cultivo si su objetivo es maximizar el beneficio?
c) ¿Cuál es ese beneficio máximo?

45. **[Junio de 2011 – Propuesta B]** Queremos invertir una cantidad de dinero en dos tipos de acciones y queremos que: la cantidad invertida en las acciones de tipo A no puede superar los 10000 euros, la cantidad invertida en acciones de tipo B no puede superar los 12000 euros y la suma de las cantidades invertidas no pueden exceder de 15000 euros. El interés anual estimado por las acciones de tipo A es del 10 % y el ofrecido por las acciones de tipo B es del 11 %.
a) Dibuja la región factible.
b) Determina las cantidades que debe invertir en cada uno de los tipos para que el beneficio sea lo mayor posible.

46. **[Septiembre de 2011 – Propuesta B]** Una empresa tiene 1800 botellas de vino de La Mancha y 1600 botellas de vino de Valdepeñas. Desea elaborar dos tipos de lotes para regalo con dichas botellas: lotes de tipo A formados por tres botellas de La Mancha y una de Valdepeñas, que

venderá a 70 euros; lotes de tipo B formados por una botella de La Mancha y dos de Valdepeñas que venderá a 50 euros.
a) Dibuja la región factible.
b) ¿Cuántos lotes de cada tipo deberá de preparar para obtener la mayor cantidad de dinero?

47. **[Reserva 1 de 2011 – Propuesta B]** Queremos realizar una inversión en dos entidades bancarias con las siguientes condiciones: a) La cantidad “x” depositada en la entidad A no puede superar los 1200 euros. b) La cantidad “y” depositada en la entidad B no puede superar los 800 euros. (c) La suma de la cantidad depositada en A y de la cantidad depositada en B no puede exceder de 1600 euros. El interés anual ofrecido por la entidad A es del 3,5 % y el ofrecido por la entidad B es del 3,75 %.
a) Dibuja la región factible.
b) Determina las cantidades que debe depositar en cada una de las entidades para que, en las condiciones expuestas, el beneficio sea lo mayor posible.

48. **[Reserva 2 de 2011 – Propuesta A]** Las restricciones impuestas por la CEE obligan a cierta empresa a producir como máximo 1000 toneladas de uva tinta y 2000 toneladas de uva blanca, además, en total, la producción de estas dos variedades no puede pasar de las 2500 toneladas. Si el precio de la uva tinta es de 2 euros/kg y el precio de la blanca es de 1.5 euros/kg.
a) Dibuja la región factible.
b) Determina cuántos kilos de cada variedad debe producir para que el beneficio sea máximo.

49. **[Junio de 2012 – Propuesta B]** Una empresa tiene 3000 bolsas de ajo morado de Las Pedroñeras y 2000 botellas de aceite de oliva de Los Montes de Toledo. Desea elaborar dos tipos de lotes para regalo con dichos productos: lotes de tipo A formados por tres bolsas de ajos y una botella de aceite de oliva, que venderá a 50 euros; lotes de tipo B formados por una bolsa de ajos y dos botellas de aceite de oliva que venderá a 80 euros.
a) Dibuja la región factible.
b) ¿Cuántos lotes de cada tipo deberá preparar para obtener la mayor cantidad de dinero?

50. **[Septiembre de 2012 – Propuesta A]** Queremos realizar una inversión en dos tipos de acciones con las siguientes condiciones: Lo invertido en las acciones de tipo A no puede superar los 10000 euros. Lo invertido en las acciones de tipo B no puede superar los 8000 euros. La suma de la cantidad invertida en A y de la cantidad invertida en B no puede exceder de 15000 euros. La rentabilidad esperada para las acciones de tipo A es del 1 % y la esperada para las acciones de tipo B es del 5 %.
a) Dibuja la región factible.
b) Determina la cantidad que debemos invertir en cada uno de los dos tipos de acciones para que, con las condiciones expuestas, el beneficio sea máximo.

51. **[Reserva 1 de 2012 – Propuesta B]** Una empresa tiene 150 quesos manchegos y 100 botes de berenjenas de Almagro. Desea elaborar dos tipos de lotes para regalo con dichos productos: lotes de tipo A formados por tres quesos y un bote de berenjenas, que venderá a 200 euros; lotes de tipo B formados por un queso manchego y dos botes de berenjenas que venderá a 100 euros.
a) Dibuja la región factible.
b) ¿Cuántos lotes de cada tipo deberá preparar para obtener la mayor cantidad de dinero?

52. **[Reserva 2 de 2012 – Propuesta A]** En una escuela se quiere preparar una excursión para 220 alumnos. La empresa de transportes con la que han hablado tiene 4 autobuses de 40 plazas y 3 de 60 plazas. El alquiler de un autobús grande cuesta 800 euros y el de uno pequeño 600 euros.
a) Dibuja la región factible.
b) Calcula cuántos autobuses de cada tipo hay que utilizar para que la excursión resulte lo más económica posible para la escuela.

53. **[Junio de 2013 – Propuesta A]** Considera el siguiente problema de programación lineal: maximiza la función $z = 2x + y$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$x - y \leq 1$$
$$x + y \leq 2$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

a) Dibuja la región factible.
b) Determina los vértices de la región factible.
c) Indica la solución óptima del problema dado y su valor.

54. **[Septiembre de 2013 – Propuesta A]** Considera el siguiente problema de programación lineal: maximiza la función $z = x + 3y$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$-x + y \leq 2$$
$$x + y \leq 4$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

a) Dibuja la región factible.
b) Determina los vértices de la región factible.
c) Indica la solución óptima del problema dado y su valor.

55. **[Reserva 1 de 2013 – Propuesta B]** Una empresa tiene 160 kilos de arroz de Calasparra y 60 tarros de 2 gramos de azafrán de La Mancha. Desea elaborar dos tipos de lotes para regalo con dichos productos: lotes de tipo A formados por tres kilos de arroz y dos tarros de azafrán, que venderá a 50 euros; lotes de tipo B formados por 5 kilos de arroz y un tarro de azafrán que venderá a 30 euros.
a) Plantea el problema de programación lineal que permita averiguar cuántos lotes de cada tipo deberá preparar la empresa para obtener la mayor cantidad de dinero posible.
b) Dibuja la región factible y determina los vértices.
c) Calcula la solución óptima del problema.

56. **[Reserva 2 de 2013 – Propuesta B]** Considera el siguiente problema de programación lineal: maximiza la función $z = 4x + y$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$x - y \leq 2$$
$$x + y \leq 4$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

a) Dibuja la región factible.
b) Determina los vértices de la región factible.

c) Indica la solución óptima del problema dado y su valor.

57. **[Junio de 2014 – Propuesta B]** Considera el siguiente problema de programación lineal: maximiza la función $z=-2x-3y$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$-x+3y\le 5$$
$$2x+y\le 4$$
$$x\ge 0$$
$$y\ge 0$$

a) Dibuja la región factible.
b) Determina los vértices de la región factible.
c) Indica la solución óptima del problema dado y su valor.

58. **[Junio de 2015 – Propuesta B]** Una empresa tiene 1100 latas de perdiz en escabeche y 1000 latas de lomo de orza. Desea elaborar dos tipos de lotes para regalo con dichas latas: lotes de tipo A formados por una lata de perdiz en escabeche y dos de lomo de orza, que venderá a 70 euros; lotes de tipo B formados por dos latas de perdiz en escabeche y una de lomo de orza que venderá a 60 euros.
a) Expresa la función objetivo.
b) Describe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto de definido.
c) Halla el número de lotes de cada tipo que debe preparar para obtener la mayor cantidad de dinero.

59. **[Septiembre de 2015 – Propuesta B]** Considera el siguiente problema de programación lineal: maximiza la función $z=-x-10y$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$x\le 4$$
$$x+3y\le 6$$
$$x\ge 0$$
$$y\ge 0$$

a) Dibuja la región factible.
b) Determina los vértices de la región factible.
c) Indica la solución óptima del problema dado y su valor.

60. **[Junio de 2016 – Propuesta B]** Un aficionado a la artesanía dedica su tiempo libre a decorar botijos y jarrones. Cada mes decora un máximo de 10 botijos y un máximo de 10 jarrones. Dedica una hora a decorar un botijo y 2 horas a decorar un jarrón. Puede dedicar cada mes un máximo de 24 horas a esta afición. Vende toda su producción mensual, y cobra 6 euros por cada botijo y 18 euros por cada jarrón. Se propone obtener el máximo beneficio mensual posible con las condiciones mencionadas.
a) Expresa la función objetivo.
b) Escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido.
c) Halla el número de botijos y jarrones que debe decorar cada mes para obtener un beneficio máximo e indica a cuánto asciende ese beneficio máximo.

61. **[Septiembre de 2016 – Propuesta A]** En una granja hay vacas y caballos. El veterinario contratado tiene la obligación de supervisar diariamente entre 4 y 8 vacas, y además entre 2 y 5

caballos. Además, el número de vacas supervisadas debe ser al menos el doble que el número de caballos supervisados. El veterinario tarda una hora en supervisar cada animal y trata de averiguar cuál es el tiempo mínimo diario que le permite cumplir todas las condiciones del contrato.
a) Expresa la función objetivo.
b) Escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido.
c) Halla el número de vacas y caballos que debe supervisar diariamente para cumplir las condiciones en un tiempo mínimo.

62. **[Junio de 2017 – Opción B]** Considera el siguiente problema de programación lineal:
Minimizar la función $F = 5x + 3y$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$x + 2y \leq 16 \quad ; \quad 5x + 4y \geq 38 \quad ; \quad 4y - x \geq 2$$

a) Dibuja la región factible.
b) Determina los vértices de la región factible.
c) Indica la solución óptima del problema dado y su valor.

63. **[Septiembre de 2017 – Opción B]** Un transportista debe llevar en su camión sacos de cemento y sacos de yeso con las siguientes condiciones: El número de sacos de cemento estará entre 25 y 100 y el número de sacos de yeso estará entre 30 y 90. El transportista sabe que un saco de cemento pesa 30 kg y un saco de yeso pesa 20 kg, y se propone cumplir las condiciones llevando en su camión el menor peso posible.
a) Expresa la función objetivo.
b) Escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido.
c) Halla el número de sacos de cada clase que debe llevar para que el peso transportado sea mínimo.

64. **[Junio de 2018 – Propuesta A]** Considera el siguiente problema de programación lineal:
Minimizar la función $F = -x + 6y$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$x + 7y \leq 58 \quad ; \quad 4x + 5y \geq 48 \quad ; \quad 3x - 2y \leq 13$$

a) Dibuja la región factible.
b) Determina los vértices de la región factible.
c) Indica la solución óptima del problema dado y su valor.

65. **[Julio de 2018 – Propuesta B]** En una nave industrial se realiza el montaje de dos tipos de bicicletas: de paseo y de montaña. Para cada jornada de trabajo tenemos las siguientes restricciones: El número de bicicletas de paseo montadas debe estar entre 1 y 2. El número de bicicletas de montaña montadas debe estar entre 3 y 6. Si al triple de bicicletas de paseo montadas sumamos el número de bicicletas de montaña montadas, el resultado debe ser al menos 9. El montaje de una bicicleta de paseo precisa una hora, mientras que el de una bicicleta de montaña necesita dos horas. Pretendemos cumplir todas las condiciones expuestas en un tiempo mínimo. Para ello se pide:
a) Expresa la función objetivo.
b) Escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido.
c) Halla el número de bicicletas de cada clase que se deben montar para que se cumplan todas las condiciones en un tiempo mínimo, y calcula cuál será ese tiempo mínimo.

66. **[Junio de 2019 – Propuesta A]** En el siguiente problema de programación lineal, optimiza la función $f(x, y) = 3x + 4y$ sujeta a las siguientes restricciones: $x + y \geq 2, x \leq y,\ 0 \leq y \leq 2,\ x \geq 0$.

a) Dibuja la región factible.
b) Determina los vértices de la región factible.
c) Indica el máximo y el mínimo y sus respectivos valores.

67. **[Julio de 2019 – Propuesta A]** En un taller se confeccionan prendas vaqueras con dos tipos de tejidos de distinta calidad (T1, T2). Disponen de 160 m^2 del tejido T1 y 240 m^2 del tejido T2. Hacen dos conjuntos: Uno con chaqueta y falda y otro con cazadora y pantalón. El primero utiliza 2 m^2 de T1 y 2 m^2 de T2, el conjunto del pantalón utiliza 1 m^2 de T1 y 3 m^2 de T2. El conjunto con falda cuesta 250 euros y el del pantalón 350 euros.
a) Expresa la función objetivo.
b) Escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido.
c) Calcula el número de conjuntos de cada tipo que deben hacer para obtener máximas ganancias.

68. **[Julio de 2020 – Sección 1, Bloque 2]** En el siguiente problema de programación lineal optimiza la función $f(x,y)=6x-2y$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$x+y\geq 2,\ x-y\leq 2,\ y\leq 1,\ x\geq 0$$

a) Dibuja la región factible.
b) Determina los vértices de la región factible.
c) Indica el máximo y el mínimo y sus respectivos valores.

69. **[Septiembre de 2020 – Sección 1, Bloque 2]** En una pastelería se elaboran dos tipos de tarta de chocolate (A y B). La primera lleva 100 gr de chocolate con leche y 200 gr de chocolate negro y la segunda 200 gr de chocolate con leche y 100 gr de chocolate negro. Dispone de 9 kg de cada tipo de chocolate. Por cada tarta A obtiene un beneficio de 5 euros y por cada tarta B de 4 euros.
a) Expresa la función objetivo para obtener un beneficio máximo.
b) Escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido.
c) Determina el número de tartas de cada tipo que puede vender para obtener beneficio máximo.

70. **[Junio de 2021 – Sección 1, Bloque 2]** En el siguiente problema de programación lineal maximiza la función $f(x,y)=12x-2y$ sujeta a las siguientes restricciones:

$x\geq y$

$x+y\geq 0$

$x\leq 3$

a) Dibuja la región factible.
b) Determina los vértices de la región factible.
c) Indica el máximo del problema dado y su valor.

71. **[Julio de 2021 – Sección 1, Bloque 2]** En un terreno se dispone de 18 hectáreas para sembrar aguacates y mangos. Para los aguacates deseamos destinar como mucho 16 hectáreas. Por cada hectárea sembrada de aguacates y mangos se obtiene 10000 y 12000 euros respectivamente. Se quiere que la super cie correspondiente a los mangos no sea mayor que la que ocupen los aguacates.
a) Expresa la función objetivo.
b) Escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido.

c) Determina cuántas hectáreas de cada tipo se debe dedicar a cada producto para conseguir máximo beneficio.

72. **[Junio de 2022 – Sección 1, Bloque 1]** Un fabricante comercializa 2 modelos de zapatillas para montaña, uno para mujer que le proporciona un beneficio de 28 euros por par y otro para hombre con un beneficio por cada par de 30 euros. El próximo mes tiene que fabricar entre 100 y 600 pares de zapatillas de hombre y un mínimo de 400 pares de mujer. Además, solamente puede fabricar un máximo de 1200 pares de zapatillas.
a) Expresa la función objetivo, escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido.
b) Determina cuántos pares de zapatillas de cada modelo debe fabricar para que el beneficio sea máximo.

73. **[Julio de 2022 – Sección 1, Bloque 1]** En el siguiente problema de programación lineal optimiza la función $f(x,y)=8x+3y$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} x-y\geq 0 \\ -4\leq x\leq 4 \\ -1\leq x\leq 1 \end{cases}$$

a) Dibuja la región factible y determina sus vértices.
b) Indica los puntos óptimos (máximo y mínimo) y sus respectivos valores.

74. **[Junio de 2023 – Sección 1, Bloque 1]** En el siguiente problema de programación lineal optimiza la función $f(x,y)=-x-5y+10$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} -2x+4\geq y \\ x+2y\geq 2 \\ y\leq 3 \\ x\geq 0 \end{cases}$$

a) Dibuja la región factible y determina sus vértices.
b) Indica los puntos óptimos (máximo y mínimo) y sus respectivos valores.

75. **[Julio de 2023 – Sección 1, Bloque 1]** En el siguiente problema de programación lineal optimiza la función $f(x,y)=4x+5y-3$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} x+y\leq 2 \\ x-2y\leq 5 \\ y\leq 0 \\ x\geq 1 \end{cases}$$

a) Dibuja la región factible y determina sus vértices.
b) Indica los puntos óptimos (máximo y mínimo) y sus respectivos valores.

76. **[Junio de 2024 – Sección 1, Bloque 1]** Una empresa de productos de papelería dispone de 270 m^2 de cartón y de 432 m de cinta de goma para la fabricación de dos tipos de carpetas: tamaño folio y tamaño cuartilla. Para una del primer tipo se necesitan 0,20 m^2 de cartón y 0,30 m de cinta de goma y se vende a 2,10 € la unidad. Para una carpeta del segundo tipo se necesitan 0,15 m^2 de cartón y 0,27 m de cinta de goma y se vende a 1,50 € la unidad.

a) Expresa la función objetivo, escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido.
b) Determina cuántas carpetas de cada tipo tiene que fabricar la empresa para que el beneficio sea máximo.

77. **[Julio de 2024 – Sección 1, Bloque 1]** Una industria fabrica planchas de acero y de aluminio. Cada kilo de plancha de acero requiere 4 horas de trabajo y 60 € en gasto de material y arroja unos beneficios de 45 €, mientras que cada kilo de plancha de aluminio supone 7 horas de trabajo y tiene un gasto de 48 € siendo el beneficio de 30 €. Cada semana, la industria cuenta con 200 horas de trabajo y 2088 € en material y está obligada a producir un mínimo de 15 kg de planchas de acero y 10 kg de las de aluminio.
a) Expresa la función objetivo, escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido.
b) Determina cuántos kilos de cada tipo de plancha deben fabricarse para que el beneficio sea máximo.

78. **[Junio de 2025 – Ejercicio 4, Apartado a)]** Una fábrica de quesos organiza paquetes para enviar: A y B. Para la elaboración del paquete tipo A se necesitan 30 minutos de trabajo manual y 45 minutos de trabajo en máquinas. Para la de tipo B, 60 minutos de trabajo manual y 20 minutos de máquinas. Tienen necesidad de enviarlo pronto, por lo que disponen de 85 horas de trabajo manual y 75 horas de trabajo con máquinas y deben enviar, al menos, 100 paquetes. El beneficio total es de 20 € por cada paquete tipo A y 17 € por cada paquete tipo B y se pretende maximizar el beneficio total.
a.1) Expresa la función objetivo; escribe, mediante inecuaciones, las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido.
a.2) Determina cuántos paquetes de cada tipo tiene que fabricar la empresa para que el beneficio sea máximo.

79. **[Julio de 2025 – Ejercicio 4, Apartado a)]** En un examen de matemáticas se propone el siguiente problema: "Indica el punto donde la función $F(x,y)=6x+3y-2$, alcanza el mínimo en la región determinada por las siguientes restricciones: $2x+y\geq 6$; $2x+5y\leq 30$; $2x-y\leq 6$"
Laura responde que el mínimo de la función se alcanza en el punto (1,2) y Jesús, por el contrario, que lo hace en el punto (3,0).
a.1) ¿Es exacta la respuesta de Laura? **Razona tu respuesta.**
a.2) ¿Es cierto que el mínimo se alcanza en el punto (3,0)? **Razona tu respuesta.**
a.3) ¿Cuánto vale dicho mínimo?

6.- PROBLEMAS RESUELTOS: «CASOS ESPECIALES»

REGIÓN FACTIBLE NO ACOTADA CON UNA SOLUCIÓN

Un ganadero debe suministrar un mínimo de 30 mg de vitamina A y de 35 mg de tipo B por kg de pienso a sus animales. Dispone de dos clases de pienso R y S, cuyos contenidos en mg de las vitaminas A y B por kg de pienso vienen dados en por la tabla:

	R	S
A	6	6
B	5	10

El pienso R vale 0,24 €/kg y el S, 0,36 €/kg.

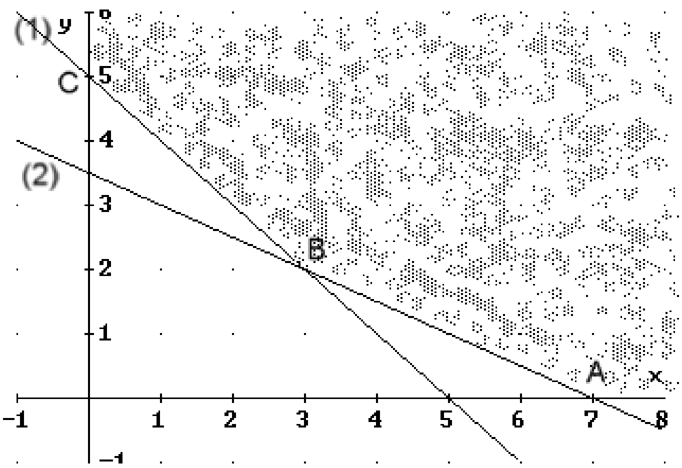
1.- Dibuja la región factible. 2.- ¿Cuántos kg de cada clase debe mezclar para suministrar el pienso de coste mínimo? Y 3.- ¿Cuál es ese coste?

Vitamina A utilizada $6x + 6y$ Vitamina B utilizada $5x + 10y$

Restricciones: $\begin{cases} x \geq 0, \quad y \geq 0 \\ 6x + 6y \geq 30 \quad (1) \\ 5x + 10y \geq 35 \quad (2) \end{cases}$

Función OBJETIVO, a optimizar (minimizando) es el Coste $C(x,y) = 0{,}24\,x + 0{,}36\,y$

DIBUJO DE LA REGIÓN FACTIBLE:



Los puntos de las esquinas son: A (7,0) B (3,2) C (0,5). Las coordenadas de B se han obtenido como intersección de las rectas (1) y (2).

Los costes en estos puntos son:

$C_A(7,0) = 1{,}68$ €

$\boxed{C_B(3,2) = 1{,}44 \text{ €}}$

$C_C(0,5) = 1{,}80$ €

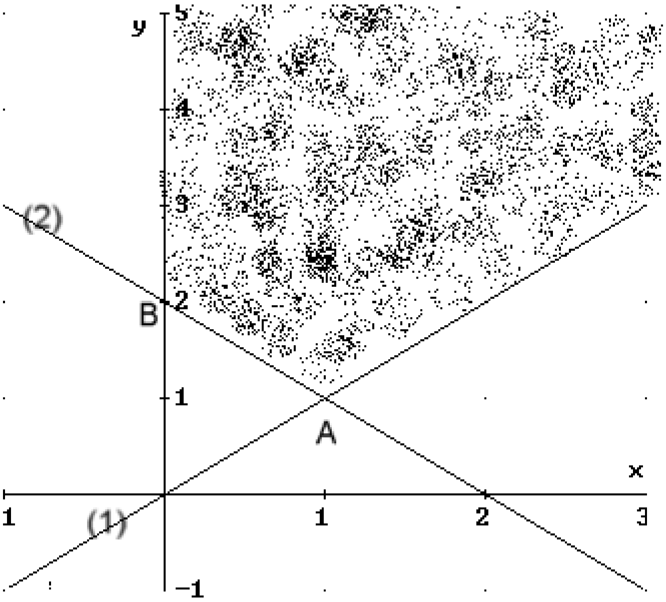
Por tanto, el coste mínimo se obtiene al comprar 3 kg de pienso tipo R y 2 kg de pienso tipo S, obteniendo un coste mínimo de 1,44 €.

Este problema no tendría solución si fuera maximizar.

REGIÓN FACTIBLE NO ACOTADA SIN SOLUCIÓN

Maximizar $B(x,y) = 3x + 4y$, sujeta a las restricciones siguientes: $\begin{cases} x \geq 0, \quad y \geq 0 \\ x \leq y \qquad (1) \\ x + y \geq 2 \quad (2) \end{cases}$

DIBUJO DE LA REGIÓN FACTIBLE:



Los puntos de las esquinas son: A (1,1) y B (0,2)

Si queremos maximizar, es imposible, ya que si

B_A (1,1) = 7

B_B (0,2) = 8.

Pero si cogemos otro punto cualquiera de la región factible, por ejemplo, el (2,3) obtendríamos:

B (2,3) = 3·2 + 4·3 = 18, y si cogemos otro punto de coordenadas mayores obtendríamos un resultado mayor.

Por tanto, esta función no se puede maximizar al no estar acotada la región factible.

Este problema tendría solución si se minimiza.

REGIÓN FACTIBLE NO ACOTADA CON MÚLTIPLES SOLUCIONES

Un ganadero debe suministrar un mínimo de 30 mg de vitamina A y de 35 mg de tipo B por kg de pienso a sus animales. Dispone de dos clases de pienso R y S, cuyos contenidos en mg de las vitaminas A y B por kg de pienso vienen dados en por la tabla:

	R	S
A	6	6
B	5	10

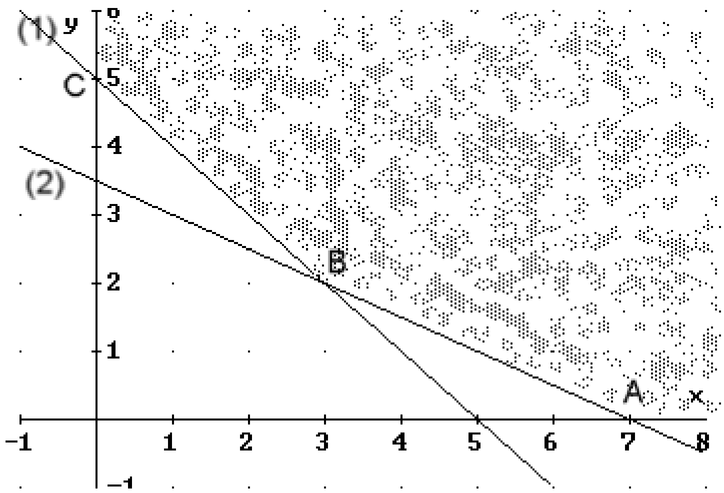
El pienso R vale 0,24 €/kg y el S, 0,48 €/kg.
1) Dibuja la región factible. 2) ¿Cuántos kg de cada clase debe mezclar para suministrar el pienso de coste mínimo? y 3) ¿Cuál es ese coste?

SOLUCIÓN: Vitamina A utilizada $6x + 6y$
Vitamina B utilizada $5x + 10y$

Restricciones: $\begin{cases} x \geq 0, \quad y \geq 0 \\ 6x + 6y \geq 30 \quad (1) \\ 5x + 10y \geq 35 \quad (2) \end{cases}$

Función OBJETIVO, a optimizar (minimizando) es el Coste $C(x,y) = 0{,}24\,x + 0{,}48\,y$

DIBUJO DE LA REGIÓN FACTIBLE:



Los puntos de las esquinas son: A (7,0) B (3,2) C (0,5). Las coordenadas de B se han obtenido como intersección de las rectas (1) y (2).
Los costes en estos puntos son:

$\boxed{C_A(7,0) = 1{,}68\text{ €}}$

$\boxed{C_B(3,2) = 1{,}68\text{ €}}$

$C_C(0,5) = 2{,}40$ €

Este problema tiene infinitas soluciones, todos los puntos de la recta (2) entre los valores $x = 3$ y $x = 7$ siendo los costes mínimos de 1,68 €.

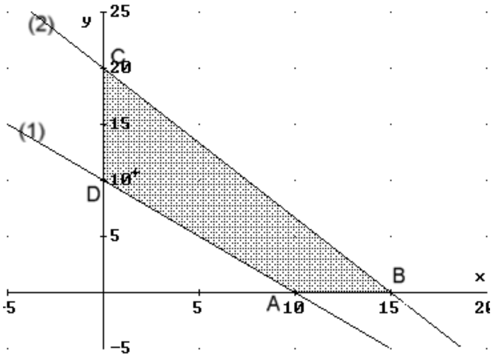
Este problema es interesante, pues si x e y son números naturales, tiene tres soluciones.

X	3	~~4~~	5	~~6~~	7
Y	2	~~1,5~~	1	~~0,5~~	0

REGIÓN FACTIBLE ACOTADA CON INFINITAS SOLUCIONES, PERO FINITAS SI SON NATURALES

Minimizar $B(x,y) = x + y$, sujeta a las restricciones siguientes: $\begin{cases} x \geq 0, \quad y \geq 0 \\ x + y \geq 10 \qquad (1) \\ 4x + 3y \leq 60 \quad (2) \end{cases}$

DIBUJO DE LA REGIÓN FACTIBLE:



Los puntos de las esquinas son: A (10,0), B (15,0), C (0,20) y D (0,10)

$\boxed{MIN_A\ (10,0) = 10}$

$MIN_B\ (15,0) = 15$

$MIN_C\ (0,20) = 20$

$\boxed{MIN_D\ (0,10) = 10}$

Por tanto, el mínimo se produce en los puntos A y D y en todos los puntos de la recta (1) comprendidos entre ambos. Este problema tiene infinitas soluciones.

OBSERVACIÓN: Si $x, y \in \mathbb{N}$, las soluciones serían:

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

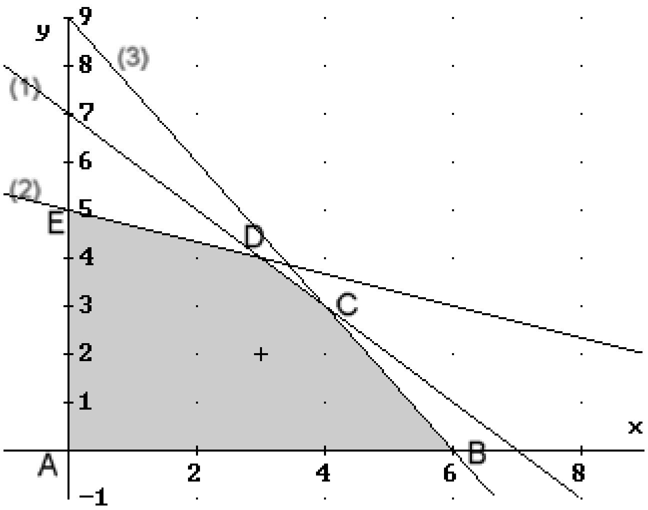
Habría 11 soluciones.

REGIÓN FACTIBLE ACOTADA CON MÚLTIPLES SOLUCIONES

Optimizar (maximizando) $B(x,y) = 3x + 2y$, sujeta a las restricciones siguientes:

$$\begin{cases} x \geq 0, \quad y \geq 0 \\ x + y \leq 7 \qquad (1) \\ x + 3y \leq 15 \quad (2) \\ 3x + 2y \leq 18 \quad (3) \end{cases}$$

DIBUJO DE LA REGIÓN FACTIBLE:



Los puntos de las esquinas son:

A (0,0) B (6,0) C (4,3) D (3,4) E (0,5)

Y los valores que toman son:

B_A (0,0) = 0

$\boxed{B_B (6,0) = 18}$

$\boxed{B_C (4,3) = 18}$

B_D (3,4) = 17

B_E (0,5) = 10

Por tanto, los valores máximos se producen en los puntos B y C y además en todos los puntos de la recta (3) entre B y C. Luego tiene infinitas soluciones.

OBSERVACIÓN: Si $x, y \in \mathbb{N}$, las soluciones serían:

X	**4**	~~5~~	**6**
Y	**3**	~~1,5~~	**0**

Habría 2 soluciones.

REGIÓN FACTIBLE ACOTADA CON MÚLTIPLES SOLUCIONES (DOS)

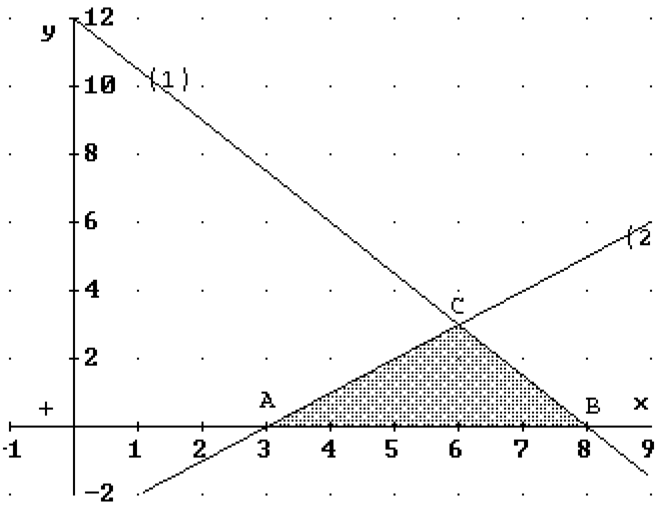
Una fábrica produce ordenadores e impresoras. Cada ordenador lleva 3 horas de montaje y cada impresora 2 horas. El número de ordenadores debe superar por lo menos en 3 al número de impresoras. Si en cada ordenador se gana 30 € y en cada impresora 20 €. 1) Representa la región factible. 2) Halla cuántos ordenadores e impresoras deben fabricarse durante 24 horas para que con su venta se obtenga un beneficio máximo. 3) Calcula ese beneficio máximo.

		Horas	
Ordenadores	x	3	30 €
Impresoras	y	2	20 €

La función Objetivo es maximizar los beneficios $B(x,y)=30x+20y$

Las restricciones son: $\begin{cases} x\geq 0, \quad y\geq 0 \\ x,y\in\mathbb{N} \\ 3x+2y\leq 24 \quad (1) \\ x\geq y+3 \qquad (2) \end{cases}$

DIBUJO DE LA REGIÓN FACTIBLE:



Los puntos de las esquinas son:

A (3,0) B (8,0) C (6,3)

Y los valores que toman son:

B_A (3,0) = 90 €

$\boxed{B_B\ (8,0) = 240\ €}$

$\boxed{B_C\ (6,3) = 240\ €}$

Este problema presenta múltiples soluciones, todos los puntos de la recta (1) entre x = 6 y $x=8$, siendo los beneficios máximos de 240 €. Cómo x e y deben ser naturales, buscamos las posibles soluciones.

X	**6**	~~7~~	**8**
Y	**3**	~~1,5~~	**0**

Luego en realidad sólo tiene dos soluciones.