Unidad 1

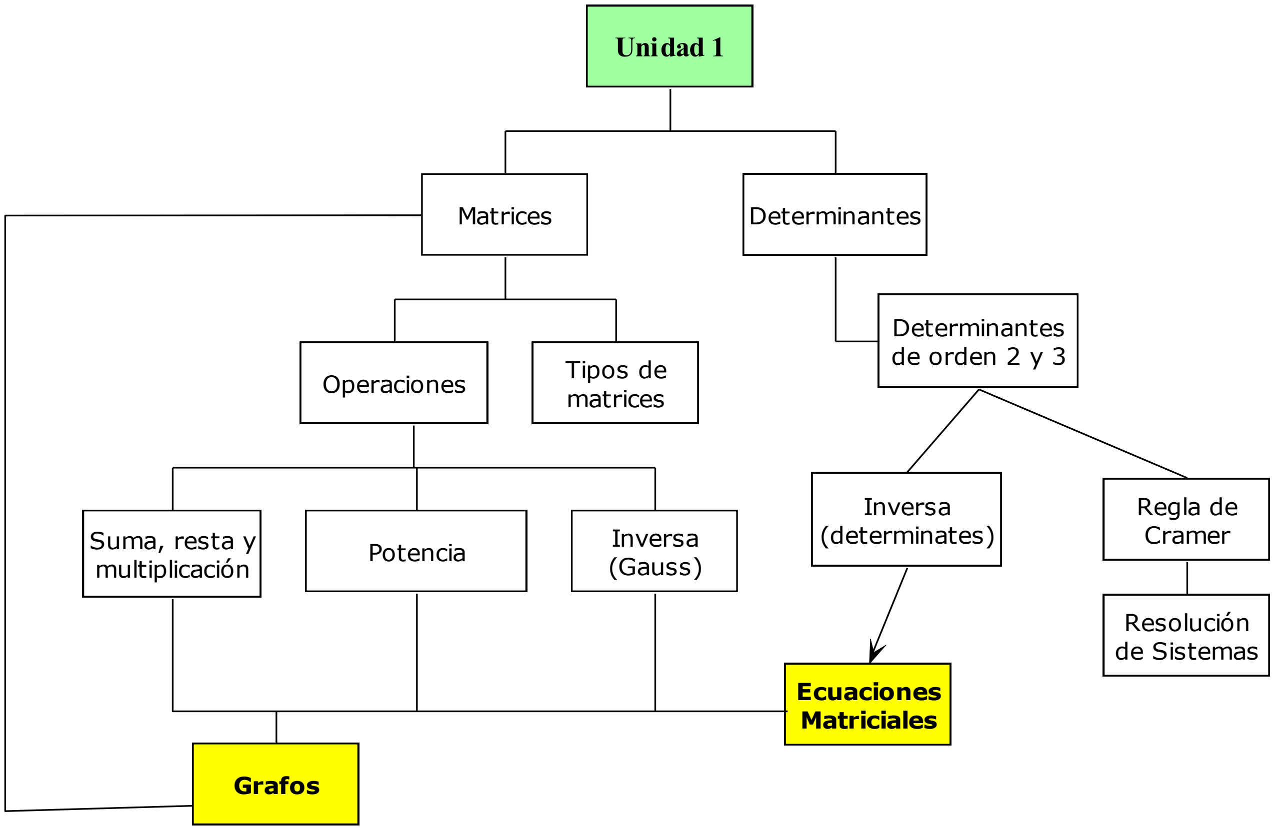
MATRICES Y DETERMINANTES

CONTENIDOS

Objetivos fundamentales

1.- Conocer los fundamentos del álgebra matricial y sus aplicaciones.
2.- Resolver ecuaciones matriciales.
3.- Saber calcular determinantes de orden 2 y 3.
4.- Calcular la matriz inversa (Gauss / Determinantes)
5.- Conocer la regla de Cramer para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

0.- MAPA CONCEPTUAL DE LA UNIDAD



1.- DEFINICIÓN

Una matriz de dimensión (u orden) $m \times n$ es un conjunto de mn números reales distribuidos en una tabla de m filas y n columnas (se acostumbra a encerrarlos entre paréntesis).

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

También se suele representar en la forma, $A = \left(a_{ij}\right),\ \ i = 1,\ldots,m,\ \ j = 1,\ldots,n$ en la que el elemento a_{ij} se encuentra en la intersección de la fila i con la columna j.

Diremos que dos matrices son iguales si tienen la misma dimensión y los elementos que están en la misma posición son iguales.

EJERCICIOS:

1. En un IES hay 107 alumnos en 3ºESO, y 110 alumnas. En 4ºESO hay 84 alumnos y 95 alumnas. En 1ºBACH. hay 69 alumnos y 68 alumnas, y en 2ºBACH. hay 46 alumnos y 48 alumnas.

a) Representa mediante una matriz, los datos anteriores. Dicha matriz la representaremos por la letra A.

b) Explica el significado de los elementos a_{22}, a_{31} y a_{42}.
c) Asigna subíndices a las entradas con valor superior a 60 e inferior a 100.
d) ¿Cuántos alumn@s cursan 2ºBACH.?

2. Si el IES anterior es un centro comarcal en el que se reúnen estudiantes procedentes de tres pueblos P_1, P_2 y P_3, atendiendo a su procedencia y sexo, obtenemos la siguiente matriz 2×3:

$$B = \begin{array}{c} \\ H \\ M \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} P_1 & P_2 & P_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 90 & 182 & 34 \\ 91 & 182 & 41 \end{pmatrix} \end{array}$$

a) ¿Cuántos alumnos preceden del pueblo 1?
b) ¿Qué significado tiene el elemento b_{23}?

Y si consideramos la actividad profesional principal de los padres de esos alumnos y su lugar de origen, tenemos la matriz 3×3:

$$C = \begin{array}{l} \\ \text{Funcionario} \\ \text{Agricultor} \\ \text{Manufacturero} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} P_1 & P_2 & P_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 22 & 105 & 11 \\ 114 & 115 & 12 \\ 45 & 151 & 52 \end{pmatrix} \end{array}$$

a) Explica el significado de los términos c_{12}, c_{31} y c_{23}.
b) Asigna subíndices a los elementos de la matriz de valor inferior a 50.
c) ¿Qué valor numérico corresponde a las entradas de la matriz c_{13}, c_{22} y c_{32}

3. En la matriz siguiente se representan los gramos de vitaminas A, B y C de dos alimentos 1 y 2. ¿Qué alimento tiene más vitamina B? ¿Y C? ¿Qué alimento tiene mayor cantidad de vitaminas?

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 15 & 6 & 2 \\ 0 & 18 & 9 \end{pmatrix} \end{array}$$

2.- TIPOS DE MATRICES

Matriz traspuesta
Se llama matriz traspuesta de A a la matriz que resulta de intercambiar ordenadamente las filas por las columnas. Se representa por A^t o por A^T.

Matriz nula
Una matriz es nula si todos sus elementos son cero.

Matriz cuadrada
Una matriz es cuadrada si tiene igual número de filas que de columnas.

Diagonal principal: Los elementos a_{ii} de una matriz cuadrada forman la diagonal principal.

Matriz simétrica

Una matriz cuadrada es simétrica cuando $a_{ij} = a_{ji}$, esto es, cuando $A = A^T$.

Matriz triangular
Una matriz cuadrada es:

- triangular superior cuando todos los elementos por debajo de la diagonal principal son cero.
- Triangular inferior cuando todos los elementos por encima de la diagonal principal son cero.

Matriz diagonal
Es una matriz cuadrada en la que todos los elementos que no estén en la diagonal principal son cero.

Matriz identidad
Matriz diagonal en la que los elementos de la diagonal principal son unos.

3.- OPERACIONES CON MATRICES

Suma

Sobre la dimensión: tienen que ser de igual dimensión

$$\left.\begin{array}{l} A = (a_{ij}) \\ B = (b_{ij}) \end{array}\right\} \Rightarrow A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$

Propiedades:
Exactamente las mismas que tiene la suma de números reales.

- Conmutativa: $A + B = B + A$
- Asociativa: $A + (B + C) = (A + B) + C$
- Existencia de elemento neutro: $A + O = A$
- Existencia de elemento simétrico: $A + (-A) = O$

EJERCICIOS:

6. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 6 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 8 \\ 7 & 9 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

halla:

a) $A + B + C$

b) $B + (-C)$

c) $A^T + B^T + (-C)^T$

d) $A + (-B) + (-C)$

e) $-C + A$

7. Efectúa las siguientes operaciones:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

8. Calcula a, b, c y d para que se cumpla:

$$\begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 7 \\ -2 & 3d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & a+b \\ c+d & 4 \end{pmatrix}$$

9. Comprueba con un ejemplo que la traspuesta de una suma de dos matrices es igual a la suma de las dos matrices traspuestas.

<u>Producto de un número real por una matriz</u>

Se multiplica dicho número por todos los elementos de la matriz.

$$\left.\begin{array}{l} A = (a_{ij}) \\ \alpha \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha A = \alpha (a_{ij}) = (\alpha a_{ij})$$

<u>EJERCICIOS:</u>

10. Realiza las siguientes operaciones:

a) $2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

b) $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

11. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

calcula:

a) $\frac{1}{2} A + B$ b) $3A + 5B - 6C$ c) $2A - \frac{1}{2} B - \frac{1}{3} C$

<u>Producto de matrices</u>

Para poder multiplicar dos matrices se tiene que cumplir la siguiente **condición sobre la dimensión de las matrices**:

número de columnas del primer factor = número de filas del segundo factor

Para <u>multiplicar</u> dos <u>matrices</u> (que cumplan la condición anterior), hay que efectuar el producto de cada fila de la primera matriz por todas las columnas de la segunda.

<u>Propiedades:</u>

Que no cumple:

- Conmutativa: $AB \neq BA$
- Divisores de cero: $AB = 0 \not\Rightarrow A = 0$ o $B = 0$
- Cancelativa: $AB = CB \not\Rightarrow A = C$ (para $B \neq 0$)

Que cumple:

- Asociativa: $A(BC) = (AB)C$

- Distributiva: $A\left(B+C\right)=AB+AC$
- Elemento neutro: $A_{m\times n}\cdot I_n=A_{m\times n}$ e $I_m\cdot A_{m\times n}=A_{m\times n}$

EJERCICIOS:

12. Calcula todos los productos posibles entre las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -2 & 5 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-7 & 1\\ 0 & 4\\ 2 & 1\\ 3 & 0\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1 & 0\\ 0 & 7 & 1 & 4\\ 0 & -2 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

13. Dadas las matrices A y B:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ -1 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3 & 5 & 0\\ -2 & 2 & 1\\ 0 & 4 & 0\end{pmatrix}$$

halla:

a) $(A\cdot B)\cdot B$
b) $A\cdot(B\cdot A)$

14. Para las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 4 & 0 & -3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & 3 & 4\\ -1 & -2 & 3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2 & 3 & 0 & 1\\ -5 & 1 & 4 & -2\\ 1 & 0 & 0 & -3\end{pmatrix}\ \text{y}\ D=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 3\end{pmatrix}$$

realiza las siguientes operaciones:

a) $A+B$ b) $3A-4B$ c) AB d) AD
e) DD^t f) BC g) CD h) D^tD
i) A^tC j) D^tA^t k) B^tA

Potencia de una matriz cuadrada

$A^0=I$

$A^n=\overset{n)}{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}$ con $n\in\mathbb{N}$

EJERCICIOS:

15. Con las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 6 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 9 & 8\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & 7\end{pmatrix}$, calcula:

a) AB b) BA c) C^2 d) C^3 e) A^tC^2

16. Calcula A^2, A^3 y A^4 siendo $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

17. Una fábrica decide distribuir sus excedentes en tres productos alimenticios A, B y C a cuatro países de África P1, P2, P3 y P4 según se describe en la matriz M_1 (cantidades en toneladas). Esta fábrica ha recibido presupuestos de dos empresas (E1 y E2) para el transporte de los productos a los países de destino como indica la matriz M_2 (en euros por tonelada).

$$M_1 = \begin{array}{c} \\ P1 \\ P2 \\ P3 \\ P4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 200 & 100 & 120 \\ 110 & 130 & 200 \\ 220 & 200 & 100 \\ 150 & 160 & 150 \end{pmatrix} \end{array} \qquad M_2 = \begin{array}{c} \\ E1 \\ E2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} P1 & P2 & P3 & P4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 500 & 450 & 375 & 350 \\ 510 & 400 & 400 & 350 \end{pmatrix} \end{array}$$

Efectúa el producto de las matrices y responde a las cuestiones:

i) ¿Qué representa el elemento a_{11} de la matriz producto?

ii) ¿Qué elemento de la matriz producto nos indica lo que cuesta transportar el producto C con la empresa E2?

iii) Indica qué elementos de la matriz producto te permiten decir cual es la empresa que más barato transporta el producto B a todos los países.

18. Los consumos anuales de agua mineral, pan y leche de 3 familias (F1, F2, F3) vienen expresados en la matriz A. La evolución de los precios de los años 2020 a 2023 viene reflejada en la matriz B.

i) Hallar, si es posible, $A \cdot B$ y $B \cdot A$ e indicar qué información proporciona el producto matricial.

ii) ¿Qué información nos da el elemento c_{34} de la matriz producto?

$$A = \begin{array}{c} \\ F1 \\ F2 \\ F3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} pan & agua & leche \end{array} \\ \begin{pmatrix} 450 & 800 & 650 \\ 500 & 810 & 620 \\ 200 & 500 & 600 \end{pmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \\ pan \\ agua \\ leche \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 2020 & 21 & 22 & 23 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 85 & 90 & 90 & 95 \\ 28 & 30 & 30 & 35 \\ 70 & 72 & 75 & 80 \end{pmatrix} \end{array}$$

19. Una fábrica de calzado deportivo dispone de zapatillas para atletismo (A), balonmano (B) y tenis (T), en dos modelos: Mujer (M) y hombre (H). El número de pares existentes en el almacén viene definido por la matriz E. El precio, en euros, de cada uno de los pares viene definido por la matriz P.

$$P = \begin{array}{c} \\ M \\ H \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & T \end{array} \\ \begin{pmatrix} 20 & 19 & 18 \\ 22 & 19 & 21 \end{pmatrix} \end{array} \qquad E = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ T \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} M & H \end{array} \\ \begin{pmatrix} 70 & 120 \\ 45 & 65 \\ 60 & 50 \end{pmatrix} \end{array}$$

Se pide:

1) Obtener, si es posible, las matrices $C = P \cdot E$ y $D = E \cdot P$

2) ¿Qué información proporcionan los elementos c_{11} de C y d_{31} de D

3) ¿Qué elemento de C o D nos informa de la valoración de todas las zapatillas de balonmano?

23. Efectúa las siguientes operaciones con matrices:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^2-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

c) $\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}-\frac{3}{5}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\right]^2$

d) $2\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^2$

Ejercicio resuelto:

Dada $A=\begin{pmatrix} 1 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcula A^{2024}.

Calculamos distintas potencias de A:

$$A^2=AA=\begin{pmatrix} 1 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3=AA^2=\begin{pmatrix} 1 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3/8 & 3/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4=AA^3=\begin{pmatrix} 1 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3/8 & 3/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 4/8 & 4/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

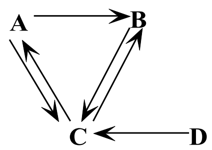
Por inducción, $A^n=\begin{pmatrix} 1 & n/8 & n/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y, por tanto, $A^{2024}=\begin{pmatrix} 1 & 2024/8 & 2024/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 253 & 253 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4.- GRAFOS

Un **grafo** es un conjunto, no vacío, de objetos llamados vértices y otra colección de pares de vértices, llamados aristas (que pueden ser orientados o no). Usualmente, un grafo se representa mediante una serie de puntos (los vértices) conectados por líneas (las aristas).

Ejemplo (Grafo dirigido):

Ángel, Beatriz, Celia y Diego son cuatro radioaficionados que pueden comunicarse según se indica en el siguiente grafo:



A: Ángel
B: Beatriz
C: Celia
D: Diego

La matriz que representa las comunicaciones entre ellos (*matriz de adyacencia*) es:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ M = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Cada elemento de esta matriz representa el número de formas que tienen de comunicarse <u>directamente</u> dos de éstos radioaficionados. Así, a_{12} significa que Ángel puede comunicarse directamente con Beatriz.

Calculamos M^2:

$$M^2 = M \cdot M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cada elemento de dicha matriz indica el número de formas posibles que tienen de comunicarse dos de estos radioaficionados <u>a través de un intermediario</u>. Así, por ejemplo, el número 2 que aparece en el elemento a_{33} indica que Celia puede comunicarse con ella misma, por medio de un intermediario, de dos formas distintas: una a través de Ángel y la otra a través de Beatriz.

Del mismo modo, si calculamos M^3, obtendremos el número de formas que tienen de relacionarse dos radioaficionados <u>mediante dos intermediarios</u>.

$$M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

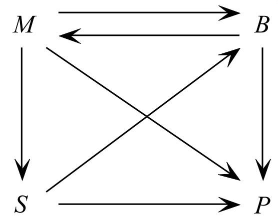
Además, si sumamos estas tres matrices, $\left(M, M^2, M^3\right)$, obtendremos las formas que, en total, tienen de comunicarse todos los radioaficionados entre sí, bien directamente o bien a través de intermediarios:

$$M + M^2 + M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

En general, dado un grafo de *n* vértices y dada *M*, su matriz de adyacencia, las sucesivas potencias de *M* $\left(M, M^2, M^3, \ldots\right)$ muestran el número de formas en que dos vértices del grafo pueden relacionarse (a través de 0, 1, 2, …, n – 2 intermediarios), y su suma $M+M^2+....+M^{n-1}$, el número total de formas que todos los vértices tienen de relacionarse entre sí.

Ejemplo (Grafo dirigido):

Las relaciones por avión entre cuatro ciudades vienen dadas por el siguiente grafo:



La matriz de adyacencia es:

$$A=\begin{array}{c} \\ M \\ S \\ P \\ B \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} M & S & P & B \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Vamos a calcular A^2:

$$A^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

A^2 indica cuántos vuelos hay que comuniquen dos ciudades con una escala intermedia. Por ejemplo, el elemento $a_{43}=2$ indica que hay 2 vuelos ente B y P con una escala: B – M – P y B – S – P.

Calculamos ahora A^3:

$$A^3=AA^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

A^3 indica cuántos vuelos hay que comuniquen dos ciudades con dos escalas intermedias. Por ejemplo, el elemento $x_{33}=2$ (donde $A^3=\left(x_{ij}\right)$) indica que hay dos vuelos que comunican P y P con dos escalas intermedias: P – B – S – P y P – B – M – P.

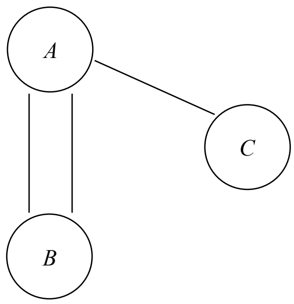
Por último,

$$A+A^2+A^3=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

y esta matriz indica si existe o no relación entre dos ciudades cualesquiera. En este caso, como todos los elementos que no están en la diagonal principal son no nulos, eso quiere decir que hay conexión entre dos ciudades cualesquiera.

Ejemplo (Grafo no dirigido):

El grafo siguiente muestra las conexiones por carretera entre las poblaciones A, B y C. Halla la matriz G asociada al grafo y calcula $G+G^2$. ¿Cuántas formas posibles existen de ir de A a C haciendo como máximo una escala (es decir, recorriendo un camino de dos aristas o menos)?



Calculamos la matriz de adyacencia asociada al grafo:

$$G = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Calculamos G^2 y $G+G^2$:

$$G^2 = GG = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G+G^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Para ver cuántas formas posibles hay en total para ir de A a C haciendo como máximo una escala, hay que mirar el elemento $(1,3)$ o el $(3,1)$ de la matriz $G+G^2$, esto es, hay una única forma.

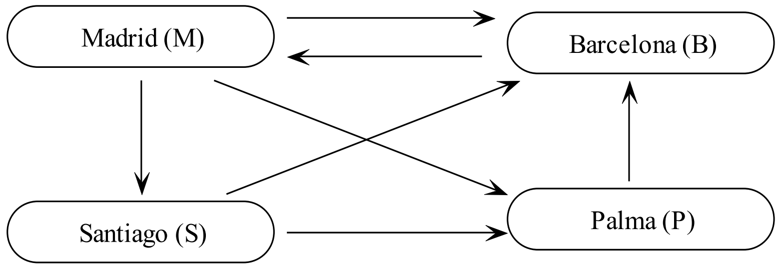
Ejemplo:

Una compañía aérea realiza vuelos entre cuatro ciudades, tal y como se indica en el grafo adjunto. Halla la matriz de incidencia y responde a las siguientes cuestiones:

a) Calcula A^2. ¿Cuántos vuelos hay con una escala entre Barcelona y Palma?

b) Determina A^3. ¿Cuántos vuelos hay entre Madrid y las otras ciudades con dos escalas intermedias?

c) Halla $A+A^2+A^3$. ¿Cómo interpretas este resultado?



La matriz de incidencia es:

$$A=\begin{array}{c} \\ M \\ S \\ P \\ B \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} M & S & P & B \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

a) Calculamos A^2:

$$A^2=AA=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz nos dice cuántos vuelos hay entre dos ciudades con una escala intermedia. Por tanto, entre Barcelona y Palma no hay ningún vuelo con una escala intermedia.

b) Calculamos A^3:

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Esta matriz nos indica el número de vuelos entre dos ciudades con dos escalas intermedias. Así, entre Madrid y Santiago hay dos vuelos con dos escalas intermedias, e igualmente, entre Madrid y Santiago, y entre Madrid y Barcelona.

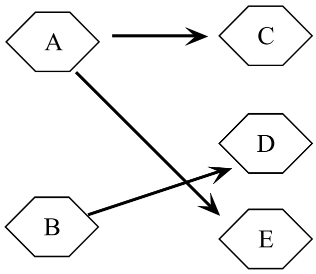
c) Calculamos $A+A^2+A^3$:

$$A+A^2+A^3=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Esta matriz nos dice si hay o no comunicación entre dos ciudades cualesquiera, y como todos los elementos que no están en la diagonal principal son distintos de cero, esto nos indica que hay comunicación entre dos ciudades cualesquiera.

Ejemplo:

Se considera un grupo de cinco personas, A y B, que han contraído una enfermedad contagiosa. Estas personas entran, a su vez, en contacto directo con otras tres personas C, D y E, según se muestra en el siguiente grafo.



a) Calcular la matriz de incidencia y explicar el significado de sus elementos.
b) Supongamos que hay un tercer grupo de cuatro personas, F, G, H e I, que también tienen contacto con las personas del segundo grupo. La información de estas relaciones se da en la siguiente matriz:

$$T = \begin{array}{c} \\ C \\ D \\ E \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} F & G & H & I \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Calcular la matriz MT y explicar su significado, donde M es la matriz de incidencia del primer grupo con el segundo.

a) Calculamos M:

$$M = \begin{array}{c} \\ A \\ B \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C & D & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

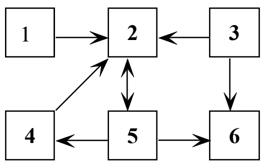
b) Calculamos MT:

$$MT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

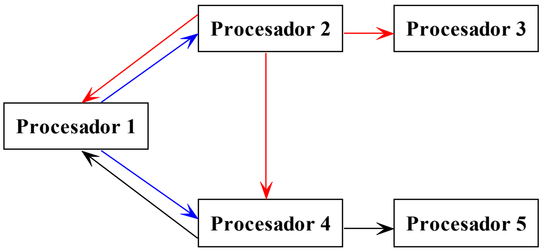
Esta matriz nos dice que las personas del tercer grupo, F, H e I, que mantienen contacto indirecto con la enfermedad a través de tres personas, mientras que G solo tiene un contacto indirecto.

EJERCICIOS:

24. El gráfico siguiente nos muestra las relaciones que se establecen en un grupo de seis personas. Construye una matriz que indique las relaciones anteriores, indicando con 1 la existencia de relación entre dos personas y con 0 la no existencia de relación.

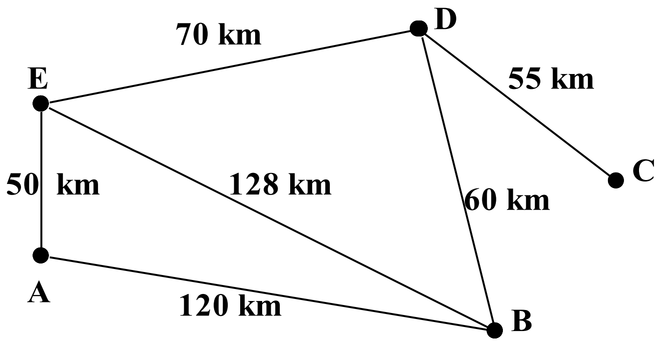


25. Una red de cinco procesadores puede relacionarse según el siguiente esquema:

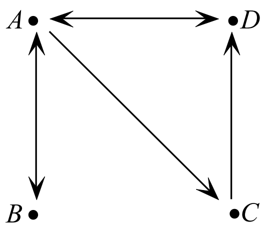


Construye una matriz que indique las relaciones entre los procesadores, indicando con 1 la existencia de relación entre dos procesadores y con 0 la no existencia de relación. ¿Es posible una comunicación total entre todos los procesadores?

26. El grafo adjunto representa los caminos que comunican diversas localidades, con sus respectivas distancias. Halla la matriz de las distancias más cortas.

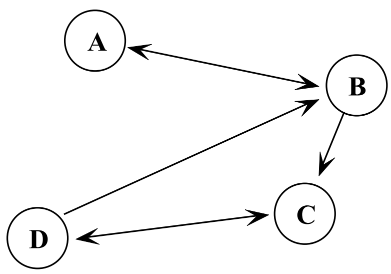


27. Dado el grafo de la figura:



Calcula su matriz de adyacencia R. Calcula R^2. ¿Qué representan los elementos de esta matriz respecto del grafo?

28. Hallar la matriz (M) de las conexiones señaladas en el grafo adjunto, entre cuatro pueblos A, B, C y D:



Calcular además M^2 (la matriz que indica el número de itinerarios de dos etapas para ir de un pueblo a otro) y M^3 (la matriz que indica el número de itinerarios de tres etapas para ir de un pueblo a otro). ¿Qué indica la matriz $M+M^2+M^3$?

5.- INVERSA DE UNA MATRIZ

Sobre la dimensión: la matriz (y como consecuencia su inversa) tienen que ser cuadradas

Una matriz A es invertible (o que tiene inversa), si existe una matriz, que se representa por A^{-1} y que verifica:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

La matriz inversa, caso de existir, es única.

- Método directo para calcular A^{-1}:
  Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales que resulta.

- Método de Gauss-Jordan
  $(A \mid I) \xrightarrow{\text{transformaciones de Gauss}} \left(I \mid A^{-1}\right)$

  Transformaciones elementales de Gauss:
  - Multiplicar una fila por un número distinto de cero ($F_i \to \alpha F_i$)
  - Sumar a una fila un múltiplo de otra ($F_j \to F_j + pF_i$)
  - Intercambiar filas ($F_i \leftrightarrow F_j$)

Diremos que una matriz es regular o no singular (o invertible) si tiene inversa.

Ejemplo:

Calculamos la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$:

a) Método directo:

Sea $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. Entonces:

$$AA^{-1} = I \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x+2z & y+2t \\ 2x+z & 2y+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2z=1 \\ y+2t=0 \\ 2x+z=0 \\ 2y+t=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x+2z=1 \\ 2x+z=0 \end{cases} \Rightarrow (x,z) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \\ \begin{cases} y+2t=0 \\ 2y+t=1 \end{cases} \Rightarrow (y,t) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) \end{cases} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

b) Método de Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-2F_1+F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2:(-3)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & -1/3 \end{array}\right) \xrightarrow{-2F_2+F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 2/3 & -1/3 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Propiedades de la inversa que es bueno conocer:

(1) $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$

<u>Demostración</u>:

Se tiene que $\left(A^{-1}\right)^{-1} \cdot A^{-1} = I$ y, por otro lado, $AA^{-1} = I$, por lo que A y $\left(A^{-1}\right)^{-1}$ son inversas de A, pero por la unicidad en la matriz inversa, se tiene que $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

(2) $\left(AB\right)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

<u>Demostración</u>:

Se tiene que

$$\left(B^{-1}A^{-1}\right)AB = B^{-1}\left(A^{-1}A\right)B = B^{-1} \cdot I \cdot B = B^{-1}B = I$$

y, por otro lado,

$$\left(AB\right)\left(B^{-1}A^{-1}\right) = A\left(BB^{-1}\right)A^{-1} = A \cdot I \cdot A^{-1} = AA^{-1} = I$$

Como consecuencia, $B^{-1}A^{-1}$ es la inversa de AB, esto es $\left(AB\right)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

(3) $\left(kA\right)^{-1} = k^{-1}A^{-1} \quad \forall k \in \mathbb{R} - \{0\}$

<u>Demostración</u>:

Por una lado $\left(k^{-1}A^{-1}\right)\left(kA\right) = \left(k^{-1}k\right)\left(A^{-1}A\right) = 1 \cdot I = I$, y por otro

$$\left(kA\right)\left(k^{-1}A^{-1}\right) = \left(kk^{-1}\right)AA^{-1} = 1 \cdot I = I$$

luego, $\left(kA\right)^{-1} = k^{-1}A^{-1} \quad \forall k \in \mathbb{R} - \{0\}$.

<u>EJERCICIOS:</u>

29. Calcula, si existe, la inversa de:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

30. Encuentra x e y tales que $A \cdot B = 0$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} -1 & x & y \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & x & y \end{pmatrix}$$

31. Halla la inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y la inversa de $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

32. Utilizando los métodos vistos en clase, calcula las matrices inversas de:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & 2\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

y comprueba que $AA^{-1}=I$ y $B^{-1}B=I$.
Comprueba además que:

a) $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ b) $(A^{-1})^{-1}=A$ c) $(3A)^{-1}=\frac{1}{3}A^{-1}$

33. Calcula, utilizando el método de Gauss-Jordan, las inversas de las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

y comprueba que $A^{-1}A=I$ y $BB^{-1}=I$.

6.- ECUACIONES Y SISTEMAS MATRICIALES

Una ecuación matricial lineal es aquella ecuación matricial lineal en la que la incógnita es una matriz.

Resolución de ecuaciones matriciales lineales: todas las ecuaciones matriciales (lineales), se pueden transformar en una del tipo

$$AX=B \quad \text{o} \quad XA=B$$

siguiendo los mismos pasos que para resolver ecuaciones polinómicas de primer grado. La única diferencia es que no hay una división de matrices, por lo que para despejar X, hay que usar la inversa:

$$AX=B \qquad\qquad XA=B$$
$$A^{-1}AX=A^{-1}B \qquad\qquad XAA^{-1}=BA^{-1}$$
$$X=A^{-1}B \qquad\qquad X=BA^{-1}$$

Un sistema lineal de ecuaciones matriciales es un sistema lineal en el que las incógnitas con matrices.

Resolución de sistemas lineales de ecuaciones matriciales: para resolver un sistema matricial (lineal), se aplican los métodos conocidos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales (reducción, sustitución o igualación).

Ejemplo:

Resolvemos la siguiente ecuación matricial $AX+B=C$, donde

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix} \text{ y } C=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$$

Despejamos X:

$$AX+B=C \Rightarrow AX=C-B \Rightarrow A^{-1}AX=A^{-1}(C-B) \Rightarrow X=A^{-1}(C-B)$$

Calculamos A^{-1}:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

Calculamos $C-B$:

$$C-B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -4\\ 1 & -5\end{pmatrix}$$

Calculamos X:

$$X=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -4\\ 1 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 5\\ 6 & -14\end{pmatrix}$$

Ejemplo:

Vamos a resolver el siguiente sistema matricial:

$$\begin{cases}2X+Y=\begin{pmatrix}0 & 2 & 6\\ -3 & 11 & 6\end{pmatrix}\\ 3X-Y=\begin{pmatrix}5 & -2 & 4\\ -12 & -12 & 9\end{pmatrix}\end{cases}$$

Llamamos $A=\begin{pmatrix}0 & 2 & 6\\ -3 & 11 & 6\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}5 & -2 & 4\\ -12 & -12 & 9\end{pmatrix}$.

El sistema que tenemos que resolver es:

$$\underbrace{\begin{cases}2X+Y=A\\ 3X-Y=B\end{cases}}_{\text{sumamos}}\Rightarrow 5X=A+B\Rightarrow X=\frac{1}{5}\left(A+B\right)$$

Calculamos X:

$$X=\frac{1}{5}\left[\begin{pmatrix}0 & 2 & 6\\ -3 & 11 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5 & -2 & 4\\ -12 & -12 & 9\end{pmatrix}\right]=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}5 & 0 & 10\\ -15 & -1 & 15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -3 & -\frac{1}{5} & 3\end{pmatrix}$$

De la primera ecuación:

$$Y=\begin{pmatrix}0 & 2 & 6\\ -3 & 11 & 6\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -3 & -\frac{1}{5} & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 2\\ 3 & \frac{57}{5} & 0\end{pmatrix}$$

Solución: $\left(X,Y\right)=\left(\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -3 & -\frac{1}{5} & 3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2 & 2 & 2\\ 3 & \frac{57}{5} & 0\end{pmatrix}\right)$

EJERCICIOS:

34. Si $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, resuelve las ecuaciones:

a) $A^2+3X=A$ b) $AX=B$

35. Calcula X e Y en el sistema: $\left.\begin{array}{l} 2X-3Y=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ X-Y=\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$

36. Expresa matricialmente los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{array}{l} 2x+3y=4 \\ x-y=2 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} x-y+z=1 \\ x-z=2 \\ y-z=0 \end{array}\right\}$

y resuélvelos.

37. Expresa en forma matricial y resuelve por los dos métodos vistos en clase:

a) $\left.\begin{array}{l} 3x+2y=-2 \\ 5x+4y=-8 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} 2x-y=3 \\ 3x-2y=4 \end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{l} x+2y=5 \\ 4x-3y=9 \end{array}\right\}$

38. Obtén la matriz X en las siguientes ecuaciones matriciales:

a) $AX+B=C$
b) $XA=2B+C$
c) $AX+A=B$
d) $A+2XB=C$
e) $A-BX=C$
f) $AX=BX+C$
g) $XA-B=X$
h) $X+3A^{-1}=A+B$
i) $AX-A=I-AX$
j) $AX+A^{-1}X=I$
k) $X-A^2X=B$
l) $XA+A^t=XB$
m) $XA+XA^t=C$
n) $AXB=C$

39. Resuelve la ecuación matricial $2X-AB=A^2$, donde:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

40. Encuentra una matriz X que verifique $X-B^2=AB$ siendo

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

41. Siendo

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad y \quad D=\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 8 & 13 \end{pmatrix}$$

resuelve la ecuación matricial $AB+CX=D$.

42. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, halla una matriz X tal que $XB=A+B$.

43. Determinar una matriz X tal que $AX+B=C$, siendo

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}\ \text{y}\ C=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}.$$

7.- DETERMINANTE DE UNA MATRIZ CUADRADA

A cada matriz cuadrada se le puede asociar un número real, llamado **determinante** de la matriz, que se obtiene a partir de los elementos de la misma. Debido a la complejidad de la fórmula general y a que sólo vamos a calcular determinantes de orden 2 y 3, no es preciso dar una expresión general que defina el determinante de una matriz de orden n. Si la matriz es A, se simboliza por $\det(A)$ o $|A|$.

Menor complementario

Se define el menor complementario del elemento a_{ij} de una matriz $A=(a_{ij})$, y se escribe M_{ij}, al determinante de la matriz que resulta de suprimir la fila i y la columna j de la matriz A.

Adjunto de un elemento

Se llama adjunto del elemento a_{ij}, al número $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

Regla de Laplace (desarrollo del determinante por una fila o columna)

El determinante de una matriz es la suma de los productos de los elementos de cualquier fila o columna por sus adjuntos correspondientes.

7.1. Determinante de una matriz de orden dos

Como el determinante de una matriz de orden 1 coincide con el número que representa la matriz, aplicando lo visto en el apartado anterior se tiene que el **determinante de una matriz de orden 2** es:

$$\det\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

EJERCICIOS:

44. Calcula el determinante de las siguientes matrices y di cuáles de ellas son regulares (tienen determinante distinto de cero):

a) $A=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{5}{3}\\ 0 & -6\end{pmatrix}$ b) $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & -2\end{pmatrix}$ c) $C=\begin{pmatrix}11 & 3\\ -7 & -2\end{pmatrix}$

45. Indica para que valores de x son regulares las siguientes matrices:

a) $A=\begin{pmatrix}x & 12\\ -3 & -x\end{pmatrix}$ b) $B=\begin{pmatrix}x-1 & -3\\ -x-1 & x+1\end{pmatrix}$

46. Resuelve las siguientes ecuaciones: a) $\begin{vmatrix}5+x & x\\ -3 & 2x\end{vmatrix}=15$ b) $\begin{vmatrix}9 & -5\\ x+1 & 3x\end{vmatrix}=69$

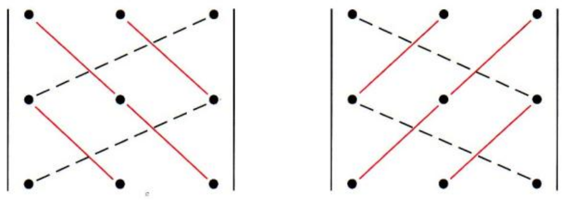
7.2. Determinante de una matriz de orden 3

Definición

El **determinante de una matriz de orden 3** es la suma de los productos de los elementos de cualquier fila o columna por sus adjuntos correspondientes.

Efectuando el desarrollo correspondiente se obtiene la **regla de Sarrus**:

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}$$



Productos con signo + Productos con signo −

Caracterización:

Una matriz cuadrada A es invertible (es decir, existe A^{-1}) $\Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow$ A es regular.

EJERCICIOS:

47. Calcula los determinantes de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 3 & -6 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ d) $D = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 4 & -8 & 3 \\ 7 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

48. Indica cuáles de las matrices del ejercicio anterior son regulares.

49. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\begin{vmatrix} 1 & x & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -6 & x \end{vmatrix} = 24$ b) $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2x & x & 1 \\ 4 & -3 & x \end{vmatrix} = -47$

50. Calcula todos los adjuntos de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 6 \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

7.3. Propiedades

1. **Si una matriz tiene una fila o una columna de ceros, el determinante es cero.**

2. Si se intercambian dos filas o dos columnas, cambia el signo del determinante.
3. **El determinante de una matriz con dos filas o columnas iguales es cero**.
4. Si multiplicamos una fila o columna por un número real, el valor del determinante queda multiplicado por dicho número.
5. Un determinante, con una fila o columna formada por la suma de dos números, puede descomponerse en suma de otros dos determinantes que tienen las mismas filas o columnas restantes y, en lugar de aquella, otra formada por los primeros y segundos sumandos, respectivamente.
6. El determinante de una matriz no cambia si a una cualquiera de sus filas o columnas se le suman o restan los elementos de otra paralela a ella, multiplicados por una constante.
7. Un determinante es cero si alguna de las filas o columnas que lo componen es combinación lineal de otras paralelas a ella.
8. **El determinante de un producto de matrices es igual al producto de los determinantes de cada factor**.
$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$
9. $\left|A^T\right| = |A|$
10. $\left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{|A|}$

8.- APLICACIONES DE LOS DETERMINANTES

8.1. 1ª Aplicación: cálculo de la matriz inversa

Matriz adjunta: La matriz adjunta de la matriz $A = (a_{ij})$ es la matriz $Adj(A) = (A_{ij})$ que resulta de sustituir el elemento a_{ij} por su adjunto correspondiente, A_{ij}.

EJERCICIO:

51. Calcula las matrices adjuntas de las matrices del ejercicio 47.

Cálculo de la inversa:

$$\boxed{A \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t}$$

EJERCICIOS:

52. Consideramos la matriz A: $A = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

a) ¿Para qué valores de a tendrá inversa la matriz?
b) Calcúlala para $a = 2$ y para $a = 3$.

53. Halla las matrices inversas de las siguientes:

a) $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 1 & 3\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix}$ b) $B=\begin{pmatrix}1 & -4 & 5\\ 1 & 0 & 0\\ 3 & 2 & -1\end{pmatrix}$

54. Calcula la matriz inversa, cuando exista:

a) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 3 & 2\\ 1 & -1 & -3\end{pmatrix}$ b) $B=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ c) $C=\begin{pmatrix}4 & -6 & -10\\ 0 & -3 & 0\\ 1 & 2 & 9\end{pmatrix}$

8.2. 2ª Aplicación: regla de Cramer

La **expresión matricial** del sistema de $m-$ ecuaciones y $n-$incógnitas

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+....+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=b_2\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}$$

es $AX=B$, donde $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$, $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix}$.

Sistema de CRAMER: $AX=B$ es un sistema de CRAMER $\Leftrightarrow$ A es regular

Regla de CRAMER (válida sólo para sistemas de CRAMER):

$$\boxed{|A|\neq 0\ \Rightarrow\ x_i=\frac{\det\left(c_1|...|b|...|c_n\right)}{|A|}}$$

donde el determinante del numerador está formado por las columnas de A, sustituyendo la $i-$ésima por la columna b de términos independientes.

¡¡Los problemas de aplicación de la regla de Cramer se verán en la unidad siguiente!

Coste computacional de la Regla de Cramer:
El coste del método, en cuanto a operaciones elementales, es el siguiente:
Hay que calcular $(n+1)-$determinantes de orden n, donde cada determinante es una suma de $n!$ sumandos, y cada sumando tiene $(n-1)-$multiplicaciones. Así, el número de operaciones para cada determinante es: $(n-1)-$multiplicaciones y $(n!-1)-$sumas, y como hay n determinantes, el número total de operaciones es:

$$(n+1)!n-1$$

y, como consecuencia, este método no es operativo para $n\geq 4$.

9.- EJERCICIOS DE SELECTIVIDAD (PAAU, PAEG, EvAU y PAU)

$\boxed{1.-}$ **[Junio de 2000]** Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&0&1\\2&1&0\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}\quad y\quad C=\begin{pmatrix}5&2\\3&0\\7&-2\end{pmatrix}$$

Se pide:

Calcular la matriz inversa de A y la matriz inversa de B.
Hallar una matriz X tal que $A\cdot X\cdot B=C$

$\boxed{2-}$ **[Septiembre de 2000]** Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&2&1\\0&1&2\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}1&2&2\\1&1&3\\2&0&2\end{pmatrix}\quad y\quad C=\begin{pmatrix}0&0&4\\-2&-8&-6\\-4&2&0\end{pmatrix}$$

Calcular una matriz X tal que $X\cdot A=2B+C$

$\boxed{3.-}$ **[Reserva 1 de 2000]** Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}3&1&2\\0&3&3\\3&2&1\end{pmatrix}$. Se pide:

1º) Calcular la matriz inversa de A.
2º) Calcular una matriz X tal que $AX + A = B$.

$\boxed{4.-}$ **[Junio de 2001]** Determina una matriz X tal que $A+2XB=C$, siendo

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&3&1\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&0&1\\-1&1&1\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}1&2&3\\8&-1&-1\end{pmatrix}$$

$\boxed{5.-}$ **[Reserva 1 de 2001]** Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}8&-2\\3&5\\5&7\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&1\\-1&2&1\end{pmatrix}\quad y\quad C=\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\\3&1\end{pmatrix}$$

halla otra matriz X tal que $A-BX=C$.

$\boxed{6.-}$ **[Septiembre de 2002]** Considerando las matrices $A=\begin{pmatrix}1&4\\2&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}2&0\\4&1\end{pmatrix}$.

Calcular una matriz X que verifique: $AX=BX+C$

7.– **[Reserva 1 de 2002]** Considerando las matrices $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$ y B una matriz que verifica: $2A+B=\begin{pmatrix}1&4\\2&0\end{pmatrix}$

a) Calcular A^2+B^2

b) Calcular la matriz inversa de la matriz producto AB.

8.– **[Junio de 2003]** Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&2&1\\1&1&1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}2&1\\0&1\\0&2\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\\0&0\end{pmatrix}$

1) Halla la matriz inversa de A.

2) Resuelve la ecuación matricial $AX-B=C$.

3) Calcula la matriz X.

9.– **[Septiembre de 2003]** Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\-1&-1&2\end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix}-1&-1&2\\-3&-3&3\\4&5&-5\end{pmatrix}$$

1) Halla la matriz inversa de A.

2) Resuelve la ecuación matricial $XA=A+B$.

3) Calcula la matriz X.

10.– **[Reserva 1 de 2003]** Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&0&2\\3&1&3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4&2&2\\3&2&0\\1&-1&4\end{pmatrix} \text{ e } I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

1) Halla la matriz inversa de $A-I$.

2) Resuelve la ecuación matricial $XA-B=X$.

3) Calcula la matriz X.

11.– **[Reserva 2 de 2003]** Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\-1&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&1&0\\1&1&-2\end{pmatrix} \text{ y } C=\begin{pmatrix}10&4&-5\\2&-1&-1\end{pmatrix}$$

1) Halla las matrices inversas de A y B.

2) Resuelve la ecuación matricial $AXB=C$.

3) Calcula la matriz X.

12.– **[Junio de 2004] 1)** Resuelve la ecuación matricial $XA+A^t=XB$, siendo A^t la matriz transpuesta de A.

2) Halla la matriz X sabiendo que $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\-1&0&-1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&0&-1\\\frac{1}{2}&1&1\\\frac{-3}{2}&1&-1\end{pmatrix}$

13.– **[Septiembre de 2004] 1)** Resuelve la ecuación matricial $XA+XA^t=C$, siendo A^t la matriz transpuesta de A.

2) Halla la matriz X sabiendo que $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&2\\-1&-1&0\end{pmatrix}$ y $\mathrm{C}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\3&0&-1\end{pmatrix}$

14.– **[Reserva 1 de 2004] 1)** Resuelve la ecuación matricial $X+3A^{-1}=A+B$ siendo A^{-1} la matriz inversa de A.

2) Halla la matriz X sabiendo que $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&1\\2&1&0\end{pmatrix}$ y $\mathrm{B}=\begin{pmatrix}-3&-3&3\\2&3&-1\\-3&-1&-1\end{pmatrix}$

15.– **[Reserva 2 de 2004] 1)** Resuelve la ecuación matricial $XA+X=B$.

2) Halla la matriz X sabiendo que $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\-1&-1&1\\1&0&2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&0&4\\-3&-2&-3\end{pmatrix}$

16.– **[Junio de 2005] 1)** Despeja la matriz X en la ecuación: $AX-A=I-AX$

2) Halla la matriz X sabiendo que $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&2\\1&0&1\end{pmatrix}$ e $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

17.– **[Septiembre de 2005] 1)** Despeja la matriz X en la ecuación: $AX+A^{-1}X=I$ siendo A^{-1} la matriz inversa de A.

2) Hallar la matriz X sabiendo que $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ e $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

18.– **[Reserva 1 de 2005] 1)** Despeja la matriz X en la ecuación: $X-A^2X=B$

2) Hallar la matriz X sabiendo que $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}-2&-6&-2\\-2&-2&-3\\-6&-4&-2\end{pmatrix}$

19.– **[Reserva 2 de 2005] 1)** Despeja la matriz X en la ecuación: $A - XB = C$

2) Halla la matriz X sabiendo que

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -5 \\ -3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

20.– **[Junio de 2006] 1)** Despeja la matriz X en la ecuación: $AX - X = BX + C$

2) Halla la matriz X sabiendo que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

21.– **[Septiembre de 2006] 1)** Despeja la matriz X en la ecuación: $XA^2 - B = X$

2) Halla la matriz X sabiendo que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

22.– **[Reserva 1 de 2006] 1)** Despeja la matriz X en la ecuación: $2X - ABX = 3C$

2) Halla la matriz X sabiendo que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2/3 & 0 \end{pmatrix}$

23.– **[Reserva 2 de 2006] 1)** Despeja la matriz X en la ecuación: $XA - X = B$

2) Halla la matriz X sabiendo que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

24.– **[Junio de 2007] 1)** Despeja la matriz X en la ecuación: $2X - AX = C - BX$

2) Halla X sabiendo que $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

25.– **[Septiembre de 2007] 1)** Despeja la matriz X en la ecuación: $X^{-1}A + A = B$

2) Halla la matriz X sabiendo que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

26.– **[Reserva 1 de 2007] 1)** Despeja la matriz X de la ecuación: A – 2 .X = I – A .X

2) Halla la matriz X siendo I la matriz identidad de orden 3 y $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}$

27.– **[Reserva 2 de 2007] 1)** Despeja la matriz X de la ecuación: $A+X+AX=B$

2) Halla la matriz X sabiendo que $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\1&0&1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0&5&6\\2&5&4\\2&3&5\end{pmatrix}$

28.– **[Junio de 2008] 1)** Despeja la matriz X en la ecuación: $2X-B=AX$

2) Halla la matriz X de la ecuación anterior sabiendo que $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&0\\-1&3&1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1&-2\\-3&3\\4&-3\end{pmatrix}$

29.– **[Septiembre de 2008] 1)** Despeja la matriz X en la ecuación: $XA-X=B$

2) Halla la matriz X de la ecuación anterior sabiendo que

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&3\\-1&1&-1\end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix}0&-1&8\\-1&2&-10\end{pmatrix}$$

30.– **[Reserva 1 de 2008] 1)** Despeja la matriz X en la ecuación: $AX-2X=B$

2) Halla la matriz X de la ecuación anterior sabiendo que

$$A=\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&0&1\\-1&-1&0\end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix}5&0\\0&3\\-1&-1\end{pmatrix}$$

31.– **[Reserva 2 de 2008] 1)** Despeja la matriz X en la ecuación: $AX-B=-3X$.

2) Halla la matriz X de la ecuación anterior sabiendo que $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&-1\\1&1&1\end{pmatrix}$ y $\mathrm{B}=\begin{pmatrix}2&1\\2&3\\-3&1\end{pmatrix}$

32.– **[Junio de 2009] 1)** Despeja la matriz X en la ecuación: $2X+AX=I$.

2) Halla la matriz X de la ecuación anterior sabiendo que $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&2\\1&1&-1\end{pmatrix}$ e $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

33.– **[Septiembre de 2009] 1)** Despeja la matriz X en la ecuación: $A^2+AX=B$

2) Halla la matriz X de la ecuación anterior sabiendo que $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0&2&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$

$\boxed{34.-}$ **[Reserva 1 de 2009] 1)** Despeja la matriz X en la ecuación: $A+BX=AX$

2) Halla la matriz X de la ecuación anterior sabiendo que $A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&0&-1\\2&1&1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&0\\1&1&0\end{pmatrix}$

$\boxed{35.-}$ **[Reserva 2 de 2009] 1)** Despeja la matriz X en la ecuación: $X-AX=B-X$

2) Halla la matriz X ecuación anterior sabiendo que $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1&-1\\-2&1\\1&1\end{pmatrix}$

$\boxed{36.-}$ **[Junio de 2010 – Propuesta A]** Dada la ecuación matricial $3X-AX=B-2AX$. Se pide:

a) Resuelve matricialmente la ecuación.

b) Si $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}3&-4&5\\-9&4&1\end{pmatrix}$, calcula la matriz X.

$\boxed{37.-}$ **[Septiembre de 2010 – Propuesta B]** Dada la ecuación matricial $I+AX-A^2X=B$. Se pide:

a) Resuelve matricialmente la ecuación.

b) Si $A=\begin{pmatrix}1&2\\-1&1\end{pmatrix}$, calcula la matriz $A-A^2$.

c) Siendo A la matriz anterior, $B=\begin{pmatrix}-3&-4\\7&11\end{pmatrix}$ e $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ calcula la matriz X.

$\boxed{38.-}$ **[Reserva 1 de 2010 – Propuesta A]** Dada la ecuación matricial $A^2X-2X=B$. Se pide:

a) Resuelve matricialmente la ecuación.

b) Si $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, calcula la matriz A^2.

c) Calcula la matriz X, siendo A la matriz anterior y $B=\begin{pmatrix}6&4\\2&4\\0&-2\end{pmatrix}$.

$\boxed{39.-}$ **[Reserva 2 de 2010 – Propuesta B]** Dada la ecuación matricial $ABX+X=C$. Se pide:

a) Resuelve matricialmente la ecuación.

b) Si $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$, calcula la matriz AB.

c) Si A y B son las matrices anteriores y $C=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$, calcula la matriz X.

$\boxed{40.-}$ **[Junio de 2011 – Propuesta A]** Dada la ecuación matricial $I+3X+AX=B$. Se pide:

a) Resuelve matricialmente la ecuación.

b) Si $A=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 7 & 1\end{pmatrix}$, calcula la matriz X que cumple $AX=I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

$\boxed{41.-}$ **[Septiembre de 2011 – Propuesta A]** Dada la ecuación matricial $6X-XA=B$. Se pide:

a) Resuelve matricialmente la ecuación.

b) Si $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 5 & 1\end{pmatrix}$, calcula la matriz X que cumpla $AX=I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

$\boxed{42.-}$ **[Reserva 1 de 2011 – Propuesta A]** Tenemos las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -2\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$. Se pide:

a) Calcular la matriz $M=(3I+AB)$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

b) Calcular la matriz X tal que $XC=I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

$\boxed{43.-}$ **[Reserva 2 de 2011 – Propuesta B]** Tenemos las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}$. Se pide:

a) Calcular la matriz $M=(3I+AB)$ donde I es la matriz identidad de orden 3.

b) Calcular la matriz X tal que $XC=I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

$\boxed{44.-}$ **[Junio de 2012 – Propuesta A]** a) Despeja la matriz X en la siguiente ecuación matricial: $7I-2X+AX=B$, suponiendo que todas las matrices son cuadradas del mismo orden (I es la matriz identidad).

b) Si $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, calcula la matriz X que cumple $AX=I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

45.– **[Junio de 2012 – Propuesta B]** a) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calcula la matriz $M=\left(3I+A^2\right)$ donde I es la matriz identidad de orden 3.
b) Calcula la matriz X tal que $XB=I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

46.– **[Septiembre de 2012 – Propuesta B]** a) Despeja la matriz X en la siguiente ecuación matricial: $2I+3X+XA=B$, suponiendo que todas las matrices son cuadradas del mismo orden (I es la matriz identidad).
b) Si $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, calcula la matriz X que cumple $AX=I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

47.– **[Reserva 1 de 2012 – Propuesta A]** a) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) Calcular la matriz $M=\left(3I+AB\right)$ donde I es la matriz identidad de orden 3.
b) Calcular la matriz X tal que $XC=I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

48.– **[Reserva 2 de 2012 – Propuesta B]** a) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) Calcular la matriz $M=\left(2I+AB\right)$ donde I es la matriz identidad de orden 3.
b) Calcular la matriz X tal que $XC=I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

49.– **[Septiembre de 2013 – Propuesta B]** a) Despeja la matriz X en la siguiente ecuación matricial: $-7I-5X+AX=B$, suponiendo que todas las matrices son cuadradas del mismo orden (I es la matriz identidad).
b) Si $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$, calcula la matriz X que cumple $XA=I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

$\boxed{50.-}$ **[Reserva 1 de 2013 – Propuesta A]** a) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & -3 & 1\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

a) Calcula la matriz $M=\left(3I+A^2\right)$ donde I es la matriz identidad de orden 3.

b) Calcula la matriz X tal que $XB=I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

$\boxed{51.-}$ **[Reserva 2 de 2013 – Propuesta A]** a) Despeja la matriz X en la siguiente ecuación matricial: $3I-2X+XA=B$, suponiendo que todas las matrices son cuadradas del mismo orden (I es la matriz identidad).

b) Si $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -5 & -3\end{pmatrix}$, calcula la matriz X que cumple $AX=I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

$\boxed{52.-}$ **[Junio de 2014 – Propuesta A]** a) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 1 & -3 & 1\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

a) Calcula la matriz $M=\left(2I+A\right)^2$ donde I es la matriz identidad de orden 3.

b) Calcula la matriz X tal que $XB=I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

$\boxed{53.-}$ **[Septiembre de 2014 – Propuesta A]** a) Despeja la matriz X en la siguiente ecuación matricial: $I^3-2X+XA=B$, suponiendo que todas las matrices son cuadradas del mismo orden (I es la matriz identidad).

b) Dada la ecuación matricial $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$, despeja y calcula la matriz X.

$\boxed{54.-}$ **[Junio de 2015 – Propuesta A]** a) Despeja la matriz X en la siguiente ecuación matricial: $3X+XA+B=I^4$, suponiendo que todas las matrices son cuadradas del mismo orden (I es la matriz identidad).

b) Dada la ecuación matricial $X\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 4\end{pmatrix}$, despeja y calcula la matriz X.

$\boxed{55.-}$ **[Septiembre de 2015 – Propuesta A]** a) Despeja la matriz X en la siguiente ecuación matricial: $XA+3X=B$, suponiendo que todas las matrices son cuadradas del mismo orden (I es la matriz identidad).

b) Dada la ecuación matricial $\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 2 & 2\end{pmatrix}$, despeja y calcula la matriz X.

$\boxed{56.-}$ **[Junio de 2016 – Propuesta A]** Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ -3 & 1\\ 0 & 4\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}-2 & -2\\ 0 & 3\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

a) Realiza la siguiente operación: $(A-B)C^T$ (donde C^T es la matriz traspuesta de C).
b) Explica la razón por la cual las dos matrices siguientes no tienen inversa:

$$M=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix} \qquad N=\begin{pmatrix}-2 & 0 & -2\\ 1 & -1 & 0\\ 2 & 4 & 6\end{pmatrix}$$

57.– **[Septiembre de 2016 – Propuesta B]** Dadas las matrices: $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}-4 & -2\\ k & -6\end{pmatrix}$.

Determina el valor que debe tomar el parámetro k para que ambas matrices conmuten; es decir, $AB=BA$.

58.– **[Junio de 2017 – Opción A]** Dada la matriz $M=\begin{pmatrix}-2\\ -1\end{pmatrix}$ se pide:

a) Realiza el producto MM^t (siendo M^t la matriz traspuesta de M).
b) Despeja X en la siguiente expresión matricial: $PX=MM^t$.
c) Si $P=\begin{pmatrix}-2 & -3\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, obtén la expresión de la matriz X del apartado anterior.

59.– **[Septiembre de 2017 – Opción A]** a) Despeja la matriz X en la siguiente expresión matricial: $MXN=P$.
b) Despeja y calcula la matriz X en la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix}-3 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 5 & 4\end{pmatrix}=I$$

donde I es la matriz identidad de orden 2.

60.– **[Junio de 2018 – Propuesta B]** Dadas las matrices: $A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 0\\ 3 & 0 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -5 & 0\\ -1 & -3\end{pmatrix}$,

$C=\begin{pmatrix}4\\ -4\\ 1\end{pmatrix}$ y $D=\begin{pmatrix}0 & -1 & 3\end{pmatrix}$.

a) De los siguientes productos, explica razonadamente cuáles pueden realizarse y cuáles no:
$$AB,\ AC,\ AD,\ CD$$
b) De los productos anteriores, realiza correctamente aquéllos que den como resultado una matriz cuadrada.

61.– **[Julio de 2018 – Propuesta B]** a) Dadas la matriz $A=\begin{pmatrix}2 & 7\\ -1 & -3\end{pmatrix}$ se pide que compruebes que su cuadrado coincide con su inversa, es decir, $A^2=A^{-1}$.
b) Calcula A^3 y A^4.

62.– **[Junio de 2019 – Propuesta B]** Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & 5\\ a & b\end{pmatrix}$, encontrar los valores de los parámetros a y b para que las matrices conmuten.

63.– **[Julio de 2019 – Propuesta B]** Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}3\\ 2\\ 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 5\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & -2\\ 0 & 2 & 4\end{pmatrix}$ y $D=\begin{pmatrix}4 & -5\\ -3 & 4\end{pmatrix}$:

a) Calcula $AB-C^T$.
b) Comprueba que la matriz C no tiene inversa y explica la razón por la que el producto D^2B no puede ser realizado.

64.– **[Julio de 2020 – Sección 3 – Bloque 1]** Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ 6 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}5 & 0\\ -4 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$:

a) Calcula $M=AC-(B-I)^T$ siendo I la matriz identidad de orden 2.
b) Calcula, si es posible, la matriz X tal que $XB=\begin{pmatrix}2 & 4\end{pmatrix}$.

65.– **[Septiembre de 2020 – Sección 3 – Bloque 1]** Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 1 & -5\end{pmatrix}$:

a) Calcula $(A-B)^2$.
b) ¿Se podría calcular la matriz inversa de $(A-B)^2$?
c) ¿Qué propiedad tienen que cumplir dos matrices A y B cualesquiera para que se cumpla

$$(A-B)^2=A^2-2AB+B^2 ?$$

66.– **[Septiembre de 2020 – Bloque 2]** a) Dadas las matrices $M=\begin{pmatrix}-2 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ y $N=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ comprueba que $(MN)^{-1}=N^{-1}M^{-1}$.

b) Resuelve la ecuación $MX=N$.

67.– **[Septiembre de 2020 – Sección 3 – Bloque 1]** Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -\frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ y $D=\begin{pmatrix} -6 & 3 \end{pmatrix}$:

a) Calcula $AC+D^T$.
b) Razona si A y B tienen matriz inversa (no es necesario calcularla).
c) ¿Qué dimensiones tienen las matrices resultantes de los productos DC y D^TC^T (no es necesario hacer las multiplicaciones).

68.– **[Junio de 2021 – Bloque 2, Sección 3, Ejercicio 6]** a) Dadas las matrices $M=\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $N=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ comprueba que $(MN)^{-1}=N^{-1}M^{-1}$.

b) Resuelve la ecuación $MX=N$.

69.– **[Julio de 2021 – Sección 3, Bloque 1, Ejercicio 5]** a) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -\frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ y $D=\begin{pmatrix} -6 & 3 \end{pmatrix}$:

a) Calcula $AC+D^T$.
b) Razona si A y B tienen matriz inversa (no es necesario calcularlas).
c) ¿Qué dimensiones tienen las matrices resultantes de los productos DC y D^TC^T? (No es necesario hacer las multiplicaciones).

70.– **[Junio de 2022 – Bloque 2, Ejercicio 4]** a) Dadas las matrices cuadradas A y B, razona si se obtendría el mismo resultado en la resolución de las ecuaciones $AX=B$ y $B=XA$? ¿De qué propiedad estamos hablando?

b) Si la dimensión de la matriz M es $3\times m$, la dimensión de la matriz N es 2×5 y P es una matriz cuadrada de orden p. ¿Qué valores han de tomar m y p para que se pueda realizar el producto MNP? ¿Qué dimensión tendría la matriz resultante?

c) Para las matrices $C=\begin{pmatrix} -4 & 11 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $E=\begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}$ resuelve la ecuación matricial $XC-D^2=\frac{1}{3}E^T$.

71.– **[Julio de 2022 – Bloque 2, Ejercicio 4]** a) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 2 & -6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 5 & 4\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}0 & 9\\ 3 & 5\end{pmatrix}$:

a) Resuelve la ecuación matricial $X+X\frac{1}{2}A=AB$.

b) Calcula $-\frac{1}{2}A-2B^T+C$.

72.– **[Junio de 2023 – Bloque 2, Ejercicio 4]** a) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}0 & 2 & 2\end{pmatrix}$:

a) Calcula ABC^T.

b) Calcula $\frac{1}{3}B^2-I$.

c) Razona si se puede calcular $(A-B)-C$ y BC (No es necesario realizar las operaciones).

73.– **[Julio de 2023 – Bloque 2, Ejercicio 4]** a) Dadas las matrices $M=\begin{pmatrix}4 & 9\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $N=\begin{pmatrix}-2 & 9\\ 1 & -4\end{pmatrix}$ y $P=\begin{pmatrix}6 & -3\\ -3 & 1\end{pmatrix}$ demuestra que M y N conmutan.

b) Resuelve la ecuación $MPX=N^T-M$.

c) Calcula la matriz que sumada con la matriz $(N+I)^2$ da como resultado la matriz nula, siendo I la matriz identidad de orden 2.

74.– **[Junio de 2024 – Bloque 2, Ejercicio 4]** Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$:

a) Calcula, si es posible, $C+AB$.

b) ¿Son iguales $C^{-1}+(AB)^{-1}$ y $(C+AB)^{-1}$?

75.– **[Julio de 2024 – Bloque 2, Ejercicio 4]** Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}5 & -4 & 2\\ 2 & -1 & 1\\ -4 & 4 & -1\end{pmatrix}$:

a) Comprueba que $A^2 = 2A - I$.
b) Usando la fórmula anterior, expresa A^4 a partir de las matrices A e I y calcula su valor.

76.– **[Junio de 2025 – Ejercicio 3 – Apartado b.2)]** Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, calcula la matriz X en la ecuación matricial $ABX = CX + I$.

77.– **[Julio de 2025 – Ejercicio 3 – Apartado b.2)]** Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, calcula la matriz X en la ecuación matricial $CX = AB + X$.