Universidad de Castilla-La Mancha
Pruebas de Acceso a Estudios Universitarios Bachillerato (LOGSE)
Materia: **MATEMÁTICAS II**

La prueba consta de cuatro bloques de dos preguntas cada uno. Debes contestar una pregunta de cada bloque. Cada pregunta puntúa de cero a 2'5 puntos. Puedes usar cualquier tipo de calculadora.

PRIMER BLOQUE

A. Un objeto se lanza hacia arriba, verticalmente, desde un determinado punto. La altura, en metros, alcanzada al cabo de t segundos viene dada por $h(t) = 5 - 5t - 5e^{-2t}$.
Calcula el tiempo transcurrido hasta alcanzar la altura máxima y el valor de ésta.

B. De la función $f : R \to R$ definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ se sabe que tiene un máximo relativo en $x = 1$, un punto de inflexión en (0,0) y que $\int_0^1 f(x)dx = \frac{5}{4}$.

Calcula *a*, *b*, *c* y *d*.

SEGUNDO BLOQUE

A. La función $f : R \to R$ dada por $f(x) = \begin{cases} x^2 + bx + c & \text{si} \quad x \le 0 \\ \dfrac{L(x+1)}{x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$ es derivable en el punto $x = 0$. ¿Cuánto valen *b* y *c*?

B. a) Halla el valor positivo de a para que $\int_0^{a-1} (x+1)dx = \frac{9}{2}$.

b) Calcula el área de la superficie comprendida entre el eje $\overline{OX}$, la recta $y = x + 1$ y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

TERCER BLOQUE

A. Se considera el sistema de ecuaciones siguiente: $\begin{aligned} (m+2)x + (m-1)y - z &= 3 \\ mx - y + z &= 2 \\ x + my - z &= 1 \end{aligned}$

Se pide:
a) discutirlo para los distintos valores de *m*.
b) resolverlo para *m* = 1.

B. Estudia para qué valores de *m* la matriz siguiente tiene inversa: $\begin{pmatrix} m & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ m & 0 & m \end{pmatrix}$

y, en el caso de ser posible, halla su inversa para *m* = -1.

CUARTO BLOQUE

A. Encuentra un punto R perteneciente a la recta $r \equiv \begin{cases} 2x - y - z + 3 = 0 \\ -2x + 3y - z - 1 = 0 \end{cases}$

tal que los segmentos $\overline{PQ}$ y $\overline{PR}$ formen un ángulo recto, siendo P(1,0,0) y Q(0,-1,5).

B. Dada la recta de ecuaciones paramétricas: $r \equiv \begin{cases} x = -1 + 2\alpha \\ y = -1 + \alpha \\ z = 1 \end{cases}$

y los puntos P(1,1,2) y Q(1,-1,2), se pide que:
a) encuentres la posición relativa de *r* y la recta determinada por los puntos P y Q;
b) halles el punto R de *r* para los que el triángulo PQR sea isósceles de lados iguales $\overline{PR}$ y $\overline{QR}$.

Junio de 2005

PRIMER BLOQUE

A $h(t) = 5 - 5t - 5e^{-2t}$

$h'(t) = -5 + 10e^{-2t}$

$h'(t) = 0 \iff -5 + 10e^{-2t} = 0 \Rightarrow e^{-2t} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log e^{-2t} = \log \frac{1}{2} \Rightarrow -2t = \log \frac{1}{2} \Rightarrow t = -\frac{1}{2} \log \frac{1}{2} =$

$= -\frac{1}{2}(\log 1 - \log 2) = \frac{\log 2}{2}$ (log ≡ logaritmo natural)

$h''(t) = -20e^{-2t}$

$h''\left(\frac{\log 2}{2}\right) = -20e^{-2\frac{\log 2}{2}} = -20e^{-\log 2} = -20e^{\log 2^{-1}} = -20 \cdot 2^{-1} = -10 < 0$

$\Rightarrow t = \frac{\log 2}{2}$ es un máx. relativo de h

El objeto alcanza la altura máxima a los $t = \frac{\log 2}{2}$ segundas, y dicha altura máxima es de $h\left(\frac{\log 2}{2}\right) = \frac{5 - \log 2}{2}$ metros.

$h\left(\frac{\log 2}{2}\right) = 5 - 5\frac{\log 2}{2} - 5e^{-2\frac{\log 2}{2}} = 5 - \frac{1}{2}\log 2 - \frac{5}{2} =$

$= \frac{5 - \log 2}{2}$

B $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

- f tiene un máx. relativo en $x = 1 \Rightarrow \begin{cases} f'(1) = 0 \\ f''(1) < 0 \end{cases}$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f'(1) = \boxed{3a + 2b + c = 0}$

- f tiene un punto de inflexión en $(0,0) \Rightarrow \begin{cases} f''(0) = 0 \\ f'''(0) \neq 0 \end{cases}$ y $f(0) = 0$

$f''(x) = 6ax + 2b$

$f''(0) = \boxed{2b = 0} \Rightarrow b = 0$

$f(0) = \boxed{d = 0}$

- $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{5}{4}$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (ax^3+bx^2+cx+d)\,dx = \frac{a}{4}x^4+\frac{b}{3}x^3+\frac{c}{2}x^2+dx\Big]_0^1 =$$

$$= \boxed{\frac{a}{4}+\frac{b}{3}+\frac{c}{2}+d=\frac{5}{4}}$$

- Resolvemos el sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} 3a+2b+c=0 \\ 2b=0 \longrightarrow b=0 \\ d=0 \\ \frac{a}{4}+\frac{b}{3}+\frac{c}{2}+d=\frac{5}{4} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 3a+c=0 \\ \\ \frac{a}{4}+\frac{c}{2}=\frac{5}{4} \Rightarrow a+2c=5 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 3a+c=0 \\ a+2c=5 \longrightarrow a=5-2c \end{array}\right.$$

$3(5-2c)+c=0$

$15-6c+c=0$

$c=3 \Rightarrow a=5-2\cdot 3=-1$

Por tanto, la función es:

$$\boxed{f(x)=-x^3+3x}$$

SEGUNDO BLOQUE

(A) $f(x)=\begin{cases} x^2+bx+c & x\leq 0 \\ \dfrac{\log(x+1)}{x} & x>0 \end{cases}$ donde $L=\ln=\log=$ logaritmo natural

Como f es derivable en $x=0$, también es continua en $x=0$.

Continuidad en $x=0$: ¿$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$?

$$\lim_{x\to 0} f(x) \begin{cases} \lim_{x\to 0^-} (x^2+bx+c)=c \\ \lim_{x\to 0^+} \dfrac{\log(x+1)}{x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{1}{x+1}}{1} = 1 \end{cases} \Rightarrow c=1 \text{ para que } \exists \lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$$

Derivabilidad en $x=0$: ¿$\exists f'(0)$?

$$f'(x) \begin{cases} f'_-(x)=2x+b \longrightarrow f'_-(0)=b \\ f'_+(x)=\dfrac{\frac{1}{x+1}\cdot x-\log(x+1)}{x^2} \longrightarrow f'_+(0)=\left[\dfrac{0}{0}\right] \end{cases}$$

No existe ningún $b\in\mathbb{R}$ para el que $f(x)$ sea derivable en $x=0$.

(B) a) $\int_0^{a-1} (x+1)\,dx = \frac{9}{2}$

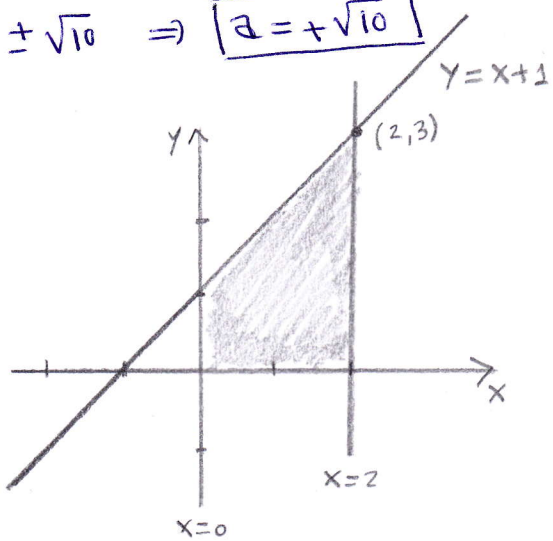
$$= \frac{x^2}{2} + x \Big]_0^{a-1} = \frac{(a-1)^2}{2} + a-1 = \frac{9}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a-1)^2 + 2(a-1) = 9 \Rightarrow a^2 + 1 \cancel{-2a} \cancel{+2a} - 2 = 9 \Rightarrow a^2 = 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \pm\sqrt{10} \Rightarrow \boxed{a = +\sqrt{10}}$$

b) $y = x+1$

x	y
0	1
-1	0



Usando geometría elemental:

$$A = A_{trapecio} = \frac{(3+1)\cdot 2}{2} = \boxed{4\,u^2}$$

Usando cálculo integral

$$A = \int_0^2 (x+1)\,dx = \frac{x^2}{2} + x \Big]_0^2 =$$

$$= \frac{4}{2} + 2 = \boxed{4\,u^2}$$

TERCER BLOQUE

(A) $\left.\begin{array}{l} (m+2)x + (m-1)y - z = 3 \\ mx - y + z = 2 \\ x + my - z = 1 \end{array}\right\}$

a) $A = \begin{pmatrix} m+2 & m-1 & -1 \\ m & -1 & 1 \\ 1 & m & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = m+2-m^2+m-1 - [1 + m(m+2) -$

$- m(m-1)] =$

$= -m^2 + 2m \cancel{+1} \cancel{-1} \cancel{-m^2} - 2m \cancel{m^2} - m =$

$= -m^2 - m = 0 \Rightarrow m(-m-1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow m = \begin{cases} 0 \\ -1 \end{cases}$

$\boxed{m=0}$ $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ rango $A = 2$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-2F_3+F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow{2F_2+F_3}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \text{rango}(A|b) = 3$$

$\boxed{m=-1}$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-F_1+F_3]{F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{3F_3+F_2}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \text{rango}(A|b) = 3 \text{ y rango } A = 2 \text{ ya que } \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Discusión:

Si $m = \begin{cases} 0 \\ -1 \end{cases} \Rightarrow \text{rg}\, A = 2 < \text{rg}(A|b) = 3 \Rightarrow$ S.I.

Si $m \neq \begin{cases} 0 \\ -1 \end{cases} \Rightarrow \text{rg}\, A = 3 = \text{rg}(A|b) =$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ S.C.D.

b) $\left.\begin{array}{l} 3x - z = 3 \\ x - y + z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{array}\right\}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to -3F_3+F_1]{F_2 \to -3F_2+F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & +3 & -4 & -3 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{F_3 \to +F_2+F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & +3 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} [1] \\ [2] \\ [3] \end{array}$$

De [3]: $-2z = -3 \Rightarrow z = \frac{3}{2}$

Sustituimos en [2]: $3y - 4z = -3 \Rightarrow y = \dfrac{-3 + 4 \cdot \frac{3}{2}}{3} = 1$

Sustituimos en [1]: $3x - z = 3 \Rightarrow x = \dfrac{3 + \frac{3}{2}}{3} = \frac{3}{2}$

$\boxed{\text{Solución: } (x, y, z) = \left(\frac{3}{2}, 1, \frac{3}{2}\right)}$

CUARTO BLOQUE

(A) $r \equiv \begin{cases} 2x - y - z + 3 = 0 \\ -2x + 3y - z - 1 = 0 \end{cases}$

sumando: $2y - 2z + 2 = 0$

$y - z + 1 = 0$

Llamando $z=\lambda \Rightarrow y=\lambda-1$

$2x=y+z-3=\lambda-1+\lambda-3 \Rightarrow x=\lambda-2$

Un punto genérico de r es:

$$R\begin{cases} x=-2+\lambda \\ y=-1+\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$$

Como los segmentos $\overline{PQ}$ y $\overline{PR}$ forman un ángulo de 90°, se tiene que

$\measuredangle\{\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR}\}=90° \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{PR} \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}=0$

$\overrightarrow{PQ}=(0,-1,5)-(1,0,0)=(-1,-1,5)$

$\overrightarrow{PR}=(-2+\lambda,-1+\lambda,\lambda)-(1,0,0)=(-3+\lambda,-1+\lambda,\lambda)$

$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}=0 \Leftrightarrow (-1,-1,5)\cdot(-3+\lambda,-1+\lambda,\lambda)=0 \Leftrightarrow 3+\lambda+1-\lambda+5\lambda=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda=-\frac{4}{5}$

El punto pedido es: $\boxed{R\left(-\frac{5}{2}+\left(\frac{-4}{5}\right),-2+\left(\frac{-4}{5}\right),\frac{-4}{5}\right)=\left(-\frac{33}{10},\frac{-14}{5},\frac{-4}{5}\right)}$

(B) $r\equiv\begin{cases} x=-1+2\alpha \\ y=-1+\alpha \\ z=1 \end{cases}$, $P(1,1,2)$, $Q(1,-1,2)$

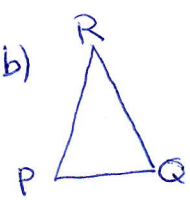
a) $s_{PQ}\equiv\begin{cases} P(1,1,2) \\ \overrightarrow{u_{PQ}}=\overrightarrow{PQ}=(1,-1,2)-(1,1,2)=(0,-2,0) \end{cases}$

Consideramos las matrices

$$M=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad \tilde{M}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & \underbrace{1-(-1)}_{\text{pto de r}} \\ 1 & -2 & 1-(-1) \\ 0 & 0 & \underbrace{2-1}_{\text{pto de s}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se tiene que rango $M=2$ ya que $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}\neq 0$ y $|M|=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-4\neq 0$

$\Rightarrow$ rango $\tilde{M}=3$, luego r y s_{PQ} se cruzan.

b) 

$R\in r$ t.q. $|\overrightarrow{PR}|=|\overrightarrow{QR}|$

Un punto genérico de r es: $R(-1+2\alpha,-1+\alpha,1)$

Por otra parte:

$\overrightarrow{PR}=(-1+2\alpha,-1+\alpha,1)-(1,1,1)=(-2+2\alpha,-2+\alpha,0)$

$\overrightarrow{QR}=(-1+2\alpha,-1+\alpha,1)-(1,-1,2)=(-2+2\alpha,\alpha,-1)$

y por tanto:

$$\sqrt{(-2+2\alpha)^2+(-2+\alpha)^2} = \sqrt{(-2+2\alpha)^2+\alpha^2+(-1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{(-2+2\alpha)^2} + (-2+\alpha)^2 = \cancel{(-2+2\alpha)^2} + \alpha^2 + (-1)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4+\cancel{\alpha^2}-4\alpha = \cancel{\alpha^2}+1 \Rightarrow \alpha = \frac{3}{4}$$

Así, el punto pedido es:

$$\boxed{R\left(-1+2\cdot\frac{3}{4}, -1+\frac{3}{4}, 1\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{4}, 1\right)}$$

Septiembre 2005

Universidad de Castilla-La Mancha
Pruebas de Acceso a Estudios Universitarios Bachillerato (LOGSE)
Materia: **MATEMÁTICAS II**

La prueba consta de cuatro bloques de dos preguntas cada uno. Debes contestar una pregunta de cada bloque. Cada pregunta puntúa de cero a 2'5 puntos. Puedes usar cualquier tipo de calculadora.

PRIMER BLOQUE

A. De todos los prismas rectos de base cuadrada y tales que el perímetro de una cara lateral es de 30 cm, halla las dimensiones del que tiene volumen máximo.

B. Estudia el crecimiento y la concavidad de la función $f:(0,+\infty)\to R$ definida por

$$f(x)=\frac{Lx}{x}.$$

(L = logaritmo neperiano)

SEGUNDO BLOQUE

A. a) Halla los valores de los coeficientes *b*, *c* y *d* para que la gráfica de la función $y=x^3+bx^2+cx+d$ corte al eje OY en el punto (0,-1), pase por el punto (2,3) y, en ese punto, tenga tangente paralela al eje OX.

b) Una vez hallados esos valores, halla los máximos y mínimos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la citada función.

B. Calcula la primitiva de $\int \frac{x+\sqrt{x}}{x^2}dx$.

TERCER BLOQUE

A. a) Discute, en función de los valores de *m*, el siguiente sistema: $\begin{array}{l} 2x-3y=0 \\ x-y+z=0 \\ x+2y+mz=m \end{array}$

b) Resuelve, en los casos de compatibilidad, el sistema anterior.

B. Se consideran las matrices: $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,

donde <u>*m*</u> es un número real. Encuentra los valores de <u>*m*</u> para los que A·B tiene inversa.

CUARTO BLOQUE

A. Calcula la ecuación de una recta que pasa por el punto de intersección del plano $\pi \equiv x+y-z+6=0$ con la recta $s\equiv \frac{x}{3}=y-2=z+1$ y es paralelo a la recta

$$r\equiv\begin{cases} 3x+y-4=0 \\ 4x-3y+z-1=0 \end{cases}.$$

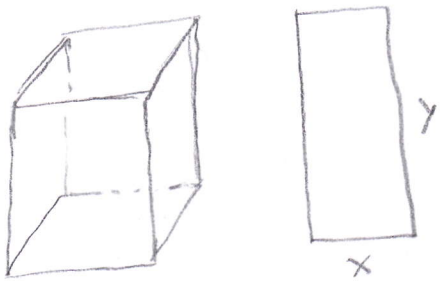
B. Dados los puntos A(1,-2,3) y B(0,2,1), se pide:

a) la ecuación paramétrica de la recta que pasa por ambos puntos;
b) la ecuación del plano π que está a igual distancia de A y B;
c) la distancia al origen de la recta intersección del plano $2y-z=0$ con el plano π del apartado b).

Septiembre de 2005

PRIMER BLOQUE

A



$P_{\text{cara lateral}} = 30\,\text{cm} = 2x + 2y$

$15 = x + y \Rightarrow y = 15 - x$

$V_{\text{prisma}} = A_{\text{base}} \cdot h = x^2 \cdot y = x^2(15 - x) =$

$= 15x^2 - x^3 = V(x)$

Hay que maximizar $V(x)$:

$V'(x) = 30x - 3x^2$

$V'(x) = 0 \Rightarrow 30x - 3x^2 = 0 \Rightarrow 3x(10 - x) = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ 10 \end{cases}$

$V''(x) = 30 - 6x$

$V''(0) = 30 > 0$

$V''(10) = 30 - 6 \cdot 10 < 0 \Rightarrow x = 10$ es un máx. relativo

Las dimensiones del prisma recto son: $\boxed{10 \times 10 \times 5\,\text{cm}}$

B $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = \dfrac{\log x}{x}$ con $\log \equiv L \equiv$ logaritmo natural

- Crecimiento (signo de f')

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \log x}{x^2} = \frac{1 - \log x}{x^2}$$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - \log x > 0 \Leftrightarrow 1 > \log x \Leftrightarrow e > x$

$$\boxed{f \text{ es } \begin{cases} \text{creciente en } (0, e) \\ \text{decreciente en } (e, +\infty) \end{cases}}$$

- Curvatura (concavidad/convexidad): (signo de f'')

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x}x^2 - (1 - \log x)2x}{x^4} = \frac{-x - 2x + 2x\log x}{x^4} = \frac{-3x + 2x\log x}{x^4}$$

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow -3x + 2x\log x > 0 \Leftrightarrow \log x > \dfrac{3x}{2x} \Leftrightarrow \log x > \dfrac{3}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x > e^{3/2} = \sqrt{e^3}$

$$\boxed{f \text{ es } \begin{cases} \text{cóncava en } (0, e^{3/2}) \\ \text{convexa en } (e^{3/2}, +\infty) \end{cases}}$$

SEGUNDO BLOQUE

(A) $f(x) = y = x^3 + bx^2 + cx + d \begin{cases} f \text{ corta a } OY \text{ en } (0,-1) \\ f \text{ pasa por } (2,3) \\ f \text{ tiene en } (2,3) \text{ una tangente paralela a } OX \end{cases}$

f corta al eje OY en $(0,-1) \Leftrightarrow f(0) = -1 \Leftrightarrow \boxed{d = -1}$

f pasa por $(2,3) \Leftrightarrow f(2) = 3 \Leftrightarrow 8 + 4b + 2c + d = 3 \Leftrightarrow \boxed{4b + 2c = -4}$

f tiene en $(2,3)$ una tangente paralela a $OX \Leftrightarrow$ la pendiente de la recta tangente a f en $x = 2$ vale cero $\Leftrightarrow f'(2) = 0$

$f'(x) = 3x^2 + 2bx + c$

$f'(2) = 12 + 4b + c = 0 \Rightarrow \boxed{4b + c = -12}$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{aligned} 4b + 2c &= -4 \\ 4b + c &= -12 \end{aligned} \xrightarrow{\cdot(-1)} \begin{aligned} 4b + 2c &= -4 \\ -4b - c &= 12 \\ \hline c &= 8 \end{aligned}$$

Como $4b + c = -12$

$$b = \frac{-12-8}{4} = \frac{-20}{4} = -5$$

Por tanto, la función es $\boxed{y = x^3 - 5x^2 + 8x - 1}$

(B) $$\int \frac{x + \sqrt{x}}{x^2}\,dx = \int \frac{x + x^{1/2}}{x^2}\,dx = \int \frac{x}{x^2}\,dx + \int \frac{x^{1/2}}{x^2}\,dx =$$

$$= \int \frac{1}{x}\,dx + \int x^{-3/2}\,dx = \log|x| + \frac{x^{-1/2}}{-1/2} = \boxed{\log|x| - \frac{2}{\sqrt{x}} + C}$$

TERCER BLOQUE

(A) $\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x + 2y + mz = m \end{cases}$

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & m \end{pmatrix}$, $(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & m & m \end{array}\right)$

$|A| = -2m - 3 - 4 + 3m = m - 7 = 0 \Rightarrow m = 7$

Si $m \neq 7 \Rightarrow rg\,A = 3 = rg(A|b)$

Si $\boxed{m=7}$: Rango de A: $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rg\,A = 2$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 7 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 7 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[-F_1+F_3]{-2F_1+F_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow rg(A|b) = 3$

Discusión

Si $m \neq 7 \Rightarrow rg\,A = rg(A|b) = 3 =$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ S.C.D.

$m = 7 \Rightarrow rg\,A = 2 \neq 3 = rg(A|b) \Rightarrow$ S.I.

b) $$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & m & m \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & m & m \end{pmatrix} \xrightarrow[-F_1+F_3]{-2F_1+F_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & m-1 & m \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{4F_2+F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & m-7 & m \end{array}\right) \begin{array}{l} [1] \\ [2] \\ [3] \Rightarrow (m-7)z = m \Rightarrow z = \dfrac{m}{m-7} \end{array}$$

Sustituimos en [2]: $y + 2z = 0 \Rightarrow y = -\dfrac{2m}{m-7}$

Sustituimos en [1]: $x - y + z = 0$

$$x = -\frac{2m}{m-7} - \frac{m}{m-7} = \frac{-3m}{m-7}$$

Solución: $\boxed{(x,y,z) = \left(\dfrac{-3m}{m-7}, -\dfrac{2m}{m-7}, \dfrac{m}{m-7}\right)}$

B $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m+1 & 2m+1 \\ 1-m & 0 \end{pmatrix}$$

$$|AB| = \begin{vmatrix} 2m+1 & 2m+1 \\ 1-m & 0 \end{vmatrix} = 2m^2 - 2 = 0 \Rightarrow m = \pm 1$$

Luego, $\boxed{AB \text{ tiene inversa si } m \neq \pm 1}$

CUARTO BLOQUE

A) El punto de intersección es:

$$\left.\begin{array}{l} x+y-z+6=0 \\ \frac{x}{3}=y-2 \\ \frac{x}{3}=z+1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x+y-z+6=0 \\ x-3y \quad +6=0 \\ x \quad -3z-3=0 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -6 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[-F_1+F_3]{-F_1+F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -6 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{-4F_3+F_2} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -6 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -36 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} [1] \\ [2] \\ [3] \end{array}$$

De [3]: $z=\frac{-36}{9}=-4$

Sustituimos en [2]: $-4y+z=0 \Rightarrow y=-1$

Sustituimos en [1]: $x+y-z=-6 \Rightarrow x=-9$

El punto de corte es $P(-9,-1,-4)$

Como la recta es paralela a r, podemos tomar como vector director el de r:

$$\vec{u}_r = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \vec{i}-3\vec{j}-13\vec{k} = (1,-3,-13)$$

Por tanto, la recta pedida es: $\boxed{t \equiv \{P, \vec{u}_r\} \equiv \frac{x+9}{1} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z+4}{-13}}$

B) $A(1,-2,3)$, $B(0,2,1)$

a) $r \equiv \begin{cases} A(1,-2,3) \\ \vec{u}_r = \overrightarrow{AB} = (0,2,+1)-(1,-2,3) = (-1,4,-2) \end{cases}$

$$\boxed{r \equiv \begin{cases} x = 1-\lambda \\ y = -2+4\lambda \\ z = 3-2\lambda \end{cases} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}}$$

b) El plano que está a igual distancia de A que de B pasa por el punto medio del segmento $\overline{AB}$ y es perpendicular a $\overrightarrow{AB}$:

Punto medio de $\overline{AB}$: $M\left(\frac{1+0}{2}, \frac{-2+3}{2}, \frac{3+1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, 0, 2\right)$

$\overrightarrow{AB} = (-1,4,2)$ es un vector normal al plano

Por tanto, la ecuación del plano es $\pi \equiv -x+4y-2z+D=0$

Como $M \in \pi \Rightarrow -\frac{1}{2}+4\cdot 0-2\cdot 2+D=0 \Rightarrow D=\frac{9}{2}$

luego el plano es $\pi \equiv -x+4y-2z+\frac{9}{2}=0$ o equivalentemente

$$\boxed{\pi \equiv -2x+8y-4z+9=0}$$

c) La recta intersección es:

$$s \equiv \begin{cases} -2x+8y-4z+9=0 \\ 2y-z=0 \end{cases}$$

Se tiene que $d(O,s)=\dfrac{|\overrightarrow{OP_s}\times\vec{u_s}|}{|\vec{u_s}|}$ donde $P_s \in s$

Punto de la recta s:

$$\left.\begin{array}{l} -2x+8y-4z+9=0 \\ 2y-z=0 \end{array}\right\} z=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -2x+8y+9=0 \\ 2y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow y=0 \Rightarrow x=\frac{9}{2}$$

$$P_s\left(\frac{9}{2},0,0\right)$$

Vector director de la recta s:

$$\vec{u_s}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 8 & -4 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}=-2\vec{j}-4\vec{k}=(0,-2,-4)$$

$$|\vec{u_s}|=\sqrt{0^2+(-2)^2+(-4)^2}=\sqrt{20}$$

Producto vectorial y módulo

$$\overrightarrow{OP_s}\times\vec{u_s}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 9/2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 \end{vmatrix}=18\vec{j}-9\vec{k}=(0,18,-9)$$

$$|\overrightarrow{OP_s}\times\vec{u_s}|=\sqrt{0^2+18^2+(-9)^2}=9\sqrt{5}$$

Distancia

$$d(O,s)=\frac{|\overrightarrow{OP_s}\times\vec{u_s}|}{|\vec{u_s}|}=\frac{9\sqrt{5}}{\sqrt{20}}=\boxed{\frac{9}{2}\ u}$$

Universidad de Castilla-La Mancha
Pruebas de Acceso a Estudios Universitarios Bachillerato (LOGSE)
Materia: **MATEMÁTICAS II**

La prueba consta de cuatro bloques de dos preguntas cada uno. Debes contestar una pregunta de cada bloque. Cada pregunta puntúa de cero a 2'5 puntos. Puedes usar cualquier tipo de calculadora.

PRIMER BLOQUE

A. Dada la función $f(x) = (2x+1)e^{x^2+x}$, determina la función $g(x)$ tal que $g'(x) = f(x)$, con la condición de que su gráfica pase por el punto (0,2).

B. Se desea construir una lata de conservas en forma de cilindro circular recto, de área total 150 cm² y volumen máximo. Determina el radio de la tapa y la altura del cilindro.

SEGUNDO BLOQUE

A. Se sabe que la función $f:[0,5] \to R$ dada por $f(x) = \begin{cases} ax + bx^2 & \text{si } 0 \le x < 2 \\ c + \sqrt{x-1} & \text{si } 2 \le x \le 5 \end{cases}$ es derivable en el intervalo (0,5), y verifica que $f(0) = f(5)$. ¿Cuánto valen a, b y c?

B. Considera la función $f: R \to R$ definida por $f(x) = (x-2)e^x$.

a) Determina los intervalos en los que la función f es creciente.
b) Dibuja la región limitada por la gráfica de f, el eje de abscisas y las rectas de ecuaciones x = 1 y x = 3.
c) Halla el área de la región descrita en el apartado anterior.

TERCER BLOQUE

A. Se considera el sistema de ecuaciones
$$\begin{aligned} 3x + 4y + 3z &= 9 \\ mx + 2y + z &= 5 \\ x + y + z &= 2 \end{aligned}$$

a) Determina los valores de *m* para que el sistema dado tenga solución única.
b) Resuelve para m = 1.

B. Encuentra las matrices A y B, sabiendo que verifican las siguientes ecuaciones matriciales:

2A + 3B = M
-A + B = N

siendo M = $\begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 18 & 11 & -6 \\ 8 & 3 & 13 \end{pmatrix}$ y N = $\begin{pmatrix} 9 & -2 & 16 \\ 17 & 1 & -10 \\ 9 & 4 & 13 \end{pmatrix}$

CUARTO BLOQUE

A. Halla la ecuación del haz de planos que tienen por eje o arista la recta

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = -1 + 3\lambda \end{cases}$$

y calcula, después, el que pasa por el punto P(1,1,1).

B. Calcula el volumen del tetraedro que tiene como vértices el punto D(10,10,10) y los puntos en que el plano $\pi \equiv 2x + 3y + z - 12 = 0$ corta los ejes de coordenadas.

Reserva 1 de 2005

PRIMER BLOQUE

A $f(x)=(2x+1)e^{x^2+x}$

Lo que nos están pidiendo es una primitiva de $f(x)$ que pase por $(0,2)$:

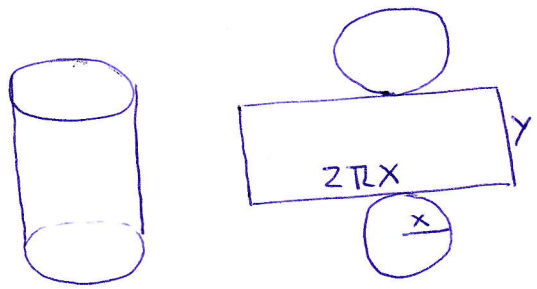
$$\int f(x)\,dx = \int (2x+1)e^{x^2+x}\,dx = e^{x^2+x} + C = g(x)$$

Para calcular C imponemos que g pase por $(0,2)$:

$$g(0) = e^0 + C = 2 \Rightarrow 1 + C = 2 \Rightarrow C = 1$$

Así, la función pedida es $\boxed{g(x) = e^{x^2+x} + 1}$

B



$$A_{TOTAL} = 2\pi xy + 2\pi x^2 = 150$$
$$\Rightarrow y = \frac{150 - 2\pi x^2}{2\pi x}$$

$$V_{CILINDRO} = A_{base}\cdot h = \pi x^2 \cdot y = \pi x^2 \frac{150 - 2\pi x^2}{2\pi x} = \frac{150\pi x^2 - 2\pi^2 x^4}{2\pi x} =$$

$$= \frac{2\pi x(75x - \pi x^3)}{2\pi x} = 75x - \pi x^3$$

Hay que maximizar $V(x) = 75x - \pi x^3$

$$V'(x) = 75 - 3\pi x^2$$

$$V'(x) = 0 \Rightarrow 75 - 3\pi x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{75}{3\pi}} = \pm\frac{5}{\sqrt{\pi}} = \pm\frac{5\sqrt{\pi}}{\pi}$$

$$V''(x) = -6\pi x$$

$V''\left(\frac{5\sqrt{\pi}}{\pi}\right) < 0 \Rightarrow x = \frac{5\sqrt{\pi}}{\pi}$ es un máx. relativo de $V(x)$

Por tanto, las dimensiones de la lata son:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{radio: } x = \frac{5\sqrt{\pi}}{\pi}\ \text{cm} \\ \text{altura: } y = \frac{10\sqrt{\pi}}{\pi}\ \text{cm} \end{array}}$$

SEGUNDO BLOQUE

A $f:[0,5]\longrightarrow\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases} ax+bx^2 & 0\leq x<2 \\ c+\sqrt{x-1} & 2\leq x\leq 5\end{cases}$$

- f derivable en $(0,5) \Rightarrow \begin{cases} f \text{ continua en } x=2 \\ f \text{ derivable en } x=2\end{cases}$
- $f(0)=f(5)$
- f continua en $x=2 \Leftrightarrow \exists \lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$

$$\lim_{x\to 2} f(x) \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-}(ax+bx^2)=2a+4b \\ \lim\limits_{x\to 2^+}(c+\sqrt{x-1})=c+1\end{cases} \Rightarrow \boxed{2a+4b=c+1}$$

para que $\exists \lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$

- f derivable en $x=2 \Leftrightarrow \exists f'(2)$

$$\left.\begin{array}{l} f'_-(x)=a+2bx \Rightarrow f'_-(2)=2+4b \\ f'_+(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} \Rightarrow f'_+(2)=\dfrac{1}{2}\end{array}\right] \boxed{a+4b=\frac{1}{2}}$$

para que $\exists f'(2)$

- $f(0)=f(5) \Leftrightarrow \boxed{0=c+2}$

Resolvemos el sistema

$$\left.\begin{array}{l} 2a+4b=c+1 \\ 2a+8b=1 \\ c=-2\end{array}\right\} \xrightarrow{\cdot(-1)} \begin{array}{r} 2a+4b=-1 \\ -2a-8b=-1 \\ \hline -4b=-2 \Rightarrow b=\frac{1}{2}\end{array}$$

Como $2a+8b=+1 \Rightarrow a=\frac{-3}{2}$

Así, los parámetros valen: $\boxed{(a,b,c)=\left(-\frac{3}{2},\frac{1}{2},-2\right)}$

B $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$

$f(x)=(x-2)e^x$

a) f creciente $\Leftrightarrow f'(x)>0$

$f'(x)=e^x+(x-2)e^x$

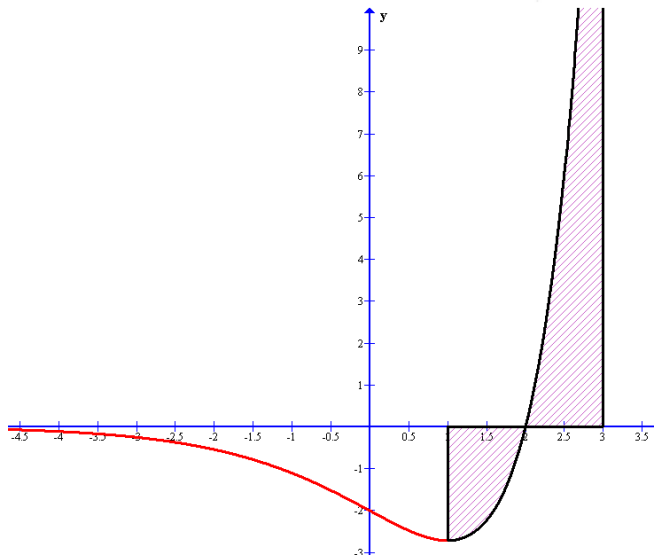
$f'(x)>0 \Rightarrow e^x+(x-2)e^x>0 \Rightarrow e^x(1+x-2)>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x-1>0 \Rightarrow x>1$

$\boxed{f \text{ es creciente en } (1,+\infty)}$

b) $y = f(x)$ continua y derivable en $\mathbb{R}$

x	-5	-1	0	1	2	5
y	$-0{,}05$	$-1{,}1$	-2	$-2{,}71$	0	$445{,}2$



c) $A = -\int_1^2 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx$

$$\int (x-2)e^x\,dx = \int xe^x dx - 2\int e^x\,dx = \begin{bmatrix} u = x \longrightarrow du = dx \\ dv = e^x dx \rightarrow v = e^x \end{bmatrix} =$$

$$= xe^x - \int e^x dx - 2e^x = xe^x - e^x - 2e^x = (x-3)e^x$$

$$A = -\left[(x-3)e^x\Big|_1^2\right] + \left[(x-3)e^x\Big|_2^3\right] = -(-e^2+2e) + (0+e^2) =$$

$$= 2e^2 - 2e = \boxed{2e(e-1)\ u^2}$$

TERCER BLOQUE

A) $\begin{cases} 3x + 4y + 3z = 9 \\ mx + 2y + z = 5 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ m & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ (A|b) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 & 9 \\ m & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

a) $|A| = 6 + 3m + 4 - 6 - 3 - 4m = 1 - m = 0 \Rightarrow m = 1$

Si $m \neq 1 \Rightarrow rg\,A = 3 = rg(A|b)$

Si $\boxed{m=1}$: $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rg\, A = 2$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[-3F_3+F_1]{-F_3+F_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-F_1+F_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow rg(A|b) = 2$$

Discusión:

Si $m \neq 1 \Rightarrow rg\, A = 3 = rg(A|b) =$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ S.C.D.

$m = 1 \Rightarrow rg\, A = 2 = rg(A|b) < 3 =$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ S.C.I.

b) Resolución para $m=1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ [2] \\ [1] \end{matrix} \longrightarrow \left.\begin{matrix} z = \lambda \\ y = 3. \\ x = 3-3-z = -\lambda \end{matrix}\right\}$$

Soluciones: $\boxed{(x,y,z) = (-\lambda, 3, \lambda) \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}}$

B

$$\begin{matrix} 2A+3B=M \\ -A+B=N \end{matrix} \xrightarrow{\cdot 2} \begin{matrix} 2A+3B=M \\ -2A+2B=2N \end{matrix}$$

$$5B = M+2N$$

$$B = \frac{1}{5}(M+2N)$$

Como $-A+B=N \Rightarrow A = B-N = \frac{1}{5}(M+2N)-N$

Calculamos B

$$\boxed{B} = \frac{1}{5}\left[\begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 18 & 17 & -6 \\ 8 & 3 & 13 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 9 & -2 & 16 \\ 17 & 1 & -10 \\ 9 & 4 & 13 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{5}\left[\begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 18 & 17 & -6 \\ 8 & 3 & 13 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 18 & -4 & 32 \\ 34 & 2 & -20 \\ 18 & 8 & 26 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 26 & 0 & 39 \\ 52 & 19 & -26 \\ 26 & 11 & 39 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 26/5 & 0 & 39/5 \\ 52/5 & 19/5 & -26/5 \\ 26/5 & 11/5 & 39/5 \end{pmatrix}}$$

Calculamos A

$$\boxed{A} = B - N = \begin{pmatrix} 26/5 & 0 & 39/5 \\ 52/5 & 19/5 & -26/5 \\ 26/5 & 11/5 & 39/5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & -2 & 16 \\ 17 & 1 & -10 \\ 9 & 4 & 13 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -19/5 & 2 & -41/5 \\ -33/5 & 14/5 & 24/5 \\ -19/5 & -9/5 & -26/5 \end{pmatrix}}$$

CUARTO BLOQUE

A $r \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = -1+3\lambda \end{cases} \Rightarrow \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{3} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} \Rightarrow 2x-y-2=0 \\ \frac{x-1}{1} = \frac{z+1}{3} \Rightarrow 3x-z-4=0 \end{cases}$

La ecuación del haz de planos de eje r es:

$$\boxed{\mu(2x-y-2)+\beta(3x-z-4)=0 \quad \text{con } \mu,\beta \in \mathbb{R}^*}$$

Para determinar el que pasa por $P(1,1,1)$, imponemos que dicho punto pertenezca a ambos planos, y escribimos la ec. anterior en función de un solo parámetro (dividiendo por μ, y llamando $\alpha = \frac{\beta}{\mu}$):

$$(2x-y-2)+\alpha(3x-z-4)=0$$

$$2\cdot 1-1-2+\alpha(3\cdot 1-1-4)=0 \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2}$$

Así, la ecuación del plano pedido es:

$$(2x-y-2)-\frac{1}{2}(3x-z-4)=0 \Leftrightarrow \boxed{x+z-2=0}$$

B $V_{tetraedro} = \frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}]\right|$

A punto de corte con OX: $\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow x=6 \Rightarrow A(6,0,0)$

B punto de corte con OY: $\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow y=4 \Rightarrow B(0,4,0)$

C punto de corte con OZ: $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow z=12 \Rightarrow C(0,0,12)$

$\overrightarrow{DA} = (6,0,0)-(10,10,10) = (-4,-10,-10)$

$\overrightarrow{DB} = (0,4,0)-(10,10,10) = (-10,-6,-10)$

$\overrightarrow{DC} = (0,0,12)-(10,10,10) = (-10,-10,2)$

$$V_{tetraedro} = \frac{1}{6}\left|\det\begin{pmatrix} -4 & -10 & -10 \\ -10 & -6 & -10 \\ -10 & -10 & 2 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{6}1152 = \boxed{192\ u^3}$$

Universidad de Castilla-La Mancha
Pruebas de Acceso a Estudios Universitarios Bachillerato (LOGSE)
Materia: **MATEMÁTICAS II**

La prueba consta de cuatro bloques de dos preguntas cada uno. Debes contestar una pregunta de cada bloque. Cada pregunta puntúa de cero a 2'5 puntos. Puedes usar cualquier tipo de calculadora.

PRIMER BLOQUE

A. Un objeto se lanza hacia arriba, verticalmente, desde un determinado punto. La altura, en metros, alcanzada al cabo de *t* segundos viene dada por $h(t) = 5 - 5t - 5e^{-2t}$.
Calcula el tiempo transcurrido hasta alcanzar la altura máxima y el valor de ésta.

B. De la función $f : R \to R$ definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ se sabe que tiene un máximo relativo en x = 1, un punto de inflexión en (0,0) y que $\int_0^1 f(x)dx = \frac{5}{4}$.
Calcula *a*, *b*, *c* y *d*.

SEGUNDO BLOQUE

A. La función $f : R \to R$ dada por $f(x) = \begin{cases} x^2 + bx + c & \text{si} \quad x \le 0 \\ \dfrac{L(x+1)}{x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$ es derivable en el punto x = 0. ¿Cuánto valen *b* y *c*?

B. a) Halla el valor positivo de a para que $\int_0^{a-1} (x+1)dx = \frac{9}{2}$.

b) Calcula el área de la superficie comprendida entre el eje $\overline{OX}$, la recta *y* = x + 1 y las rectas x = 0 y x = 2.

TERCER BLOQUE

A. Se considera el sistema de ecuaciones siguiente: $\begin{aligned} (m+2)x + (m-1)y - z &= 3 \\ mx - y + z &= 2 \\ x + my - z &= 1 \end{aligned}$

Se pide:
a) discutirlo para los distintos valores de *m*.
b) resolverlo para *m* = 1.

B. Estudia para qué valores de *m* la matriz siguiente tiene inversa: $\begin{pmatrix} m & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ m & 0 & m \end{pmatrix}$

y, en el caso de ser posible, halla su inversa para *m* = -1.

CUARTO BLOQUE

A. Encuentra un punto R perteneciente a la recta $r \equiv \begin{cases} 2x - y - z + 3 = 0 \\ -2x + 3y - z - 1 = 0 \end{cases}$

tal que los segmentos $\overline{PQ}$ y $\overline{PR}$ formen un ángulo recto, siendo P(1,0,0) y Q(0,-1,5).

B. Dada la recta de ecuaciones paramétricas: $r \equiv \begin{cases} x = -1 + 2\alpha \\ y = -1 + \alpha \\ z = 1 \end{cases}$

y los puntos P(1,1,2) y Q(1,-1,2), se pide que:
a) encuentres la posición relativa de *r* y la recta determinada por los puntos P y Q;
b) halles el punto R de *r* para los que el triángulo PQR sea isósceles de lados iguales $\overline{PR}$ y $\overline{QR}$.

Reserva 2 de 2005

Cipri

Primer Bloque

A $h(t) = 5 - 5t - 5e^{-2t}$ ¿Máx. de $h(t)$?

$h'(t) = -5 + 10e^{-2t}$

$h'(t) = 0 \Rightarrow -5 + 10e^{-2t} = 0 \Rightarrow e^{-2t} = \frac{1}{2} \Rightarrow \ln e^{-2t} = \ln \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow -2t = \ln 1 - \ln 2 \Rightarrow -2t = -\ln 2 \Rightarrow t = \frac{\ln 2}{2}$

$h''(t) = -20e^{-2t}$

$h''(t) = -20e^{-2\frac{\ln 2}{2}} < 0 \Rightarrow t = \frac{\ln 2}{2}$ es un máx. relativo de $h(t)$

Solución: la altura máxima que alcanza el objeto es de $\frac{\ln 2}{2} \simeq 0{,}35$ m y es alcanzada a los $h\left(\frac{\ln 2}{2}\right) = \frac{5 - 5\ln 2}{2} \simeq 0{,}77$ segundos

B $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

(1) f tiene un máximo relativo en $x = 1 \Rightarrow f'(1) = 0$

(2) f tiene un punto de inflexión en $(0,0) \Rightarrow \begin{cases} f''(0) = 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

(3) $\int_0^1 f(x)dx = \frac{5}{4}$

(1) $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f'(1) = \boxed{3a + 2b + c = 0}$

(2) $f(0) = 0 \Rightarrow \boxed{d = 0}$

$f''(x) = 6ax + 2b$

$f''(0) = 2b = 0 \Rightarrow \boxed{b = 0}$

(3) $\int_0^1 f(x)dx = \left.\frac{ax^4}{4} + \frac{bx^3}{3} + \frac{cx^2}{2} + dx\right]_0^1 =$

$= \frac{a}{4} + \frac{c}{2} = \frac{5}{4} \Rightarrow \boxed{a + 2c = 5}$

teniendo en cuenta que $b = d = 0$

Resolvemos el sistema

$$\left.\begin{array}{l} 3a+2b+c=0 \\ b=d=0 \\ a+2c=5 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 3a+c=0 \\ a+2c=5 \longrightarrow a=5-2c \end{array} \quad \begin{array}{l} 3(5-2c)+c=0 \\ 15-6c+c=0 \\ c=3 \\ \Downarrow \\ a=-1 \end{array}$$

$\boxed{\text{Solución: la función pedida es } f(x)=-x^3+3x}$

Segundo Bloque

A $f(x)=\begin{cases} x^2+bx+c & x\leq 0 \\ \dfrac{\ln(x+1)}{x} & x>0 \end{cases}$ ¿b y c para que f sea derivable en $x=0$?

Continuidad en $x=0$: ¿$\exists \lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$?

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^-} (x^2+bx+c)=c=f(0) \\ \lim_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(x+1)}{x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]\underset{\text{regla de L'Hôpital}}{=}\lim_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x+1}}{1}=\lim_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x+1}=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{c=1}$$

Derivabilidad en $x=0$: ¿$\exists f'(0)$?

$$\left.\begin{array}{l} f'_-(0)=b \\ y=x^2+bx+c \\ y'=2x+b \\ f'_+(0)=-\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow b=-\frac{1}{2}$$

$\boxed{\text{Solución: para } (b,c)=(-\tfrac{1}{2},1), \text{ la función } f \text{ es "derivable" en } x=0}$

$$y=\frac{\ln(x+1)}{x}$$

$$y'=\frac{\frac{1}{x+1}\cdot x-\ln(x+1)}{x^2} \Rightarrow y'(0^+)=\left[\frac{0}{0}\right]$$ luego calculamos el límite de la derivada

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{x}{x+1}-\ln(x+1)}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-(x+1)\ln(x+1)}{x^2(x+1)}=$$

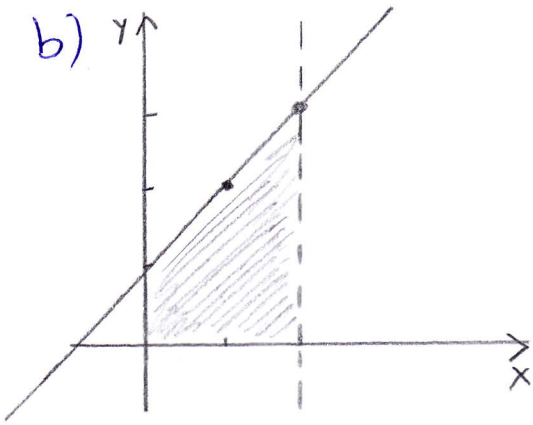
$$\underset{\text{regla de L'Hôpital}}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\ln(x+1)-(x+1)\frac{1}{x+1}}{3x^2+2x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{-1}{x+1}}{6x+2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-1}{(x+1)(6x+2)}=-\frac{1}{2}$$

B a) $\int_0^{a-1} (x+1)\,dx = \frac{9}{2}$ con $a>0$

$$\left.\frac{x^2}{2}+x\right]_0^{a-1} = \frac{(a-1)^2}{2}+(a-1) = \frac{a^2+1-\cancel{2a}+\cancel{2a}-2}{2} = \frac{9}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow a^2-1=9 \Rightarrow a=\pm\sqrt{10} \Rightarrow$ (como $a>0$) $\boxed{a=\sqrt{10}}$

b)



$y = x+1$

x	y
0	1
1	2
2	3

El área pedida es el área de un trapecio:

$$A = \frac{(3+1)\cdot 2}{2} = \boxed{4u^2}$$

Por integración

$$\boxed{A = \int_0^2 (x+1)\,dx = \left.\frac{x^2}{2}+x\right]_0^2 = \frac{4}{2}+2 = 4u^2}$$

Tercer Bloque

A $A = \begin{pmatrix} m+2 & m-1 & -1 \\ m & -1 & 1 \\ 1 & m & -1 \end{pmatrix}$, $\tilde{A} = \begin{pmatrix} m+2 & m-1 & -1 & 3 \\ m & -1 & 1 & 2 \\ 1 & m & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Rango de A

$|A| = -m^2-m = 0 \Rightarrow -m(m+1) = 0 \Rightarrow m = \begin{cases} 0 \\ -1 \end{cases}$

Si $m \neq \begin{cases} 0 \\ -1 \end{cases} \Rightarrow$ rango $A = 3$

$m=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ rango $A = 2$

$m=1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ rango $A = 2$

Rango de $\tilde{A}$

Si $m=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2F_3+F_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-F_2+F_3}$

$\longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ rango $\tilde{A} = 3$

$m=-1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{vmatrix} -2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow$ rango $\tilde{A} = 3$

Discusión

Si $m \neq \begin{cases} 0 \\ -1 \end{cases} \Rightarrow$ rango $A = 3 =$ rango $\tilde{A} =$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ S.C.D.

Si $m = \begin{cases} 0 \\ -1 \end{cases} \Rightarrow$ rango $A = 2 \neq 3 =$ rango $\tilde{A} \Rightarrow$ S.I.

b) Resolución para $m=1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-F_3+F_2]{-3F_3+F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-2F_1+3F_2}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} [1] \\ [2] \\ [3] \end{array}$$

De [1]: $z = \frac{3}{2}$

Sustituimos en [2]: $y = \frac{1 - 2 \cdot \frac{3}{2}}{-2} = 1$

Sustituimos en [1]: $x = 1 + \frac{3}{2} - 1 = \frac{3}{2}$

$\boxed{\text{Solución: } (x, y, z) = \left(\frac{3}{2}, 1, \frac{3}{2}\right)}$

B $M = \begin{pmatrix} m & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ m & 0 & m \end{pmatrix}$

a) $\exists M^{-1} \Leftrightarrow |M| \neq 0$

$|M| = m^2 - m = 0 \Rightarrow m(m-1) = 0 \Rightarrow m = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$

$\boxed{\text{Solución: } \exists M^{-1} \quad \forall m \neq \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}}$

b) $N = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_1+F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3:(-2)]{F_1:(-1)}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & -1/2 \end{array}\right) \xrightarrow[-F_3+F_1]{-F_3+F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & -1/2 \end{array}\right)$$

$$\boxed{N^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}}$$

Cuarto Bloque

A a) $R \in r \equiv \begin{cases} 2x - y - z + 3 = 0 \\ -2x + 3y - z - 1 = 0 \end{cases}$, $P(1,0,0)$, $Q(0,-1,5)$

$\overline{PQ}$ y $\overline{PR}$ forman un ángulo recto

Calculamos un punto genérico de r

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y - z + 3 = 0 \\ -2x + 3y - z - 1 = 0 \end{cases}$$

$z = \lambda$ $\quad 2y - 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow y = -1 + \lambda$

$$x = \frac{3 + \lambda - 1 + \lambda}{2} = \frac{2 + 2\lambda}{2} = 1 + \lambda$$

$$\Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

$\Rightarrow R(1+\lambda, -1+\lambda, \lambda)$

Imponemos que $\overline{PQ}$ y $\overline{PR}$ formen un ángulo recto

$\overrightarrow{PQ} = (0,-1,5) - (1,0,0) = (-1,-1,5)$

$\overrightarrow{PR} = (1+\lambda, -1+\lambda, \lambda) - (1,0,0) = (\lambda, -1+\lambda, \lambda)$

$\overline{PQ}$ y $\overline{PR}$ forman un ángulo recto $\Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{PR} \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (-1,-1,5) \cdot (\lambda, -1+\lambda, \lambda) = 0 \Leftrightarrow -\lambda + 1 - \lambda + 5\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{3}$

El punto pedido es: $R \begin{cases} x = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \\ y = -1 - \frac{1}{3} = \frac{-4}{3} \\ z = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \boxed{R\left(\frac{2}{3}, \frac{-4}{3}, \frac{-1}{3}\right)}$

$\boxed{B}$ $r \equiv \begin{cases} x = -1+2\alpha \\ y = -1+\alpha \\ z = 1 \end{cases}$, $P(1,1,2)$, $Q(1,-1,2)$

a) Posición relativa de r y $r_{PQ} = s$

$s \equiv \{P, \overrightarrow{PQ}\} \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 1-2\beta \\ z = 2 \end{cases}$

$\overrightarrow{PQ} = (1,-1,2)-(1,1,2) = (0,-2,0)$

Estudiamos el sistema que determinan r y s

$\left.\begin{array}{l} -1+2\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 1 \\ -1+\alpha = 1-2\beta \\ 1 = 2 \;\; !! \end{array}\right\}$ Sistema incompatible y como además

$\vec{u}_r = (2,1,0) \nparallel \vec{u}_s = (0,-2,0)$ (ya que las coordenadas no son proporcionales), se tiene que $\boxed{r \text{ y } s \text{ se cruzan}}$

De otra forma

Estudiando el rango de las matrices $M = \begin{pmatrix} v_1 & v_1' \\ v_2 & v_2' \\ v_3 & v_3' \end{pmatrix}$ y $\tilde{M} = \begin{pmatrix} v_1 & v_1' & a_1'-a_1 \\ v_2 & v_2' & a_2'-a_2 \\ v_3 & v_3' & a_3'-a_3 \end{pmatrix}$

donde $\vec{u} = (v_1, v_2, v_3)$ es un vector director de r, $\vec{v} = (v_1', v_2', v_3')$ es un vector director de s, $A(a_1, a_2, a_3) \in r$ y $A'(a_1', a_2', a_3') \in s$.

$\left.\begin{array}{l} M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rango } M = 2 \\ \tilde{M} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, |\tilde{M}| = -4 \neq 0 \Rightarrow \text{rango } \tilde{M} = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{r \text{ y } s \text{ se cruzan}}$

b) $R(-1+2\alpha, -1+\alpha, 1) \in r$ t.q. $|\overrightarrow{PR}| = |\overrightarrow{QR}| \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{PR} = (-1+2\alpha, -1+\alpha, 1)-(1,1,2) = (-2+2\alpha, -2+\alpha, -1) \\ \overrightarrow{QR} = (-1+2\alpha, -1+\alpha, 1)-(1,-1,2) = (-2+2\alpha, \alpha, -1) \end{cases}$

$|\overrightarrow{PR}| = |\overrightarrow{QR}| \Leftrightarrow \sqrt{(-2+2\alpha)^2+(-2+\alpha)^2+(-1)^2} = \sqrt{(-2+2\alpha)^2+\alpha^2+(-1)^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cancel{(-2+2\alpha)^2}+(-2+\alpha)^2+\cancel{(-1)^2} = \cancel{(-2+2\alpha)^2}+\alpha^2+\cancel{(-1)^2} \Leftrightarrow$

$\Rightarrow 4+\cancel{\alpha^2}-4\alpha=\cancel{\alpha^2} \Rightarrow \alpha=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{R(-1+2,-1+1,1)\equiv(1,0,1)}$