

Instrucciones: El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B.
Los ejercicios deben redactarse con claridad y lo más detalladamente posible.
Puedes utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntuá 2,5 puntos.

PROPIUESTA A

1A. a) Enuncia el teorema de Bolzano. (0,5 puntos)

b) ¿Se puede aplicar dicho teorema a la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ en algún intervalo? (1 punto)

c) Demuestra que la función $f(x)$ anterior y $g(x) = 2x - 1$ se cortan al menos en un punto. (1 punto)

2A. a) Representa gráficamente las parábolas $f(x) = x^2 - 3x - 1$ y $g(x) = -x^2 + x + 5$. (0,5 puntos)

b) Calcula el área del recinto limitado por ambas gráficas. (2 puntos)

3A. a) Clasifica en función del parámetro $k \in \mathbb{R}$ el sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} kx + y + z = k \\ x + ky + z = k \\ x + y + kz = k \end{array} \right. \quad (1,5 \text{ puntos})$$

b) Resuélvelo, si es posible, para $k = 1$. (1 punto)

4A. a) Estudia la posición relativa de la recta $r \equiv \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 0 \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, y el plano de ecuación general $\pi \equiv 2x - y + 3z = 6$. (1,5 puntos)

b) Encuentra la ecuación general de un plano π' perpendicular a π que contenga a r . (1 punto)

(sigue a la vuelta)

Propuesta A(1A) a) Teorema de Bolzano

Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$ y en los extremos del intervalo toma valores de signo contrario, entonces $\exists c \in (a,b)$ tal que $f(c)=0$.

$$b) f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Se tiene que f es continua en \mathbb{R} , ya que $1+x^2=0$ no tiene soluciones reales, y por tanto, también es continua en cualquier intervalo cerrado $[a,b]$.

Sin embargo, como $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, $\nexists [a,b]$ tal que $\text{signo } f(a) \neq \text{signo } f(b)$, y como consecuencia, no se cumple el teorema de Bolzano.

c) Consideramos la función

$$h(x) = f(x) - g(x) = \frac{1}{1+x^2} - (2x-5) =$$

que verifica:

• h es continua en \mathbb{R} , por ser diferencia de funciones continuas en \mathbb{R}

• consideramos $[a,b] = [0,1]$

$$\begin{cases} f(0) = 2 \\ f(1) = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \text{signo } f(0) \neq \text{signo } f(1)$$

Aplicando el teorema de Bolzano, $\exists c \in (0,1)$ tal que $h(c)=0$, y por tanto, c es un punto de corte de f y g .

(2A) $y = x^2 - 3x + 1$

Vértice:

$$\begin{aligned} x_v &= \frac{-b}{2a} = \frac{3}{2} = 1,5 \\ y_v &= \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3}{2} + 1 = -1,25 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} V_f(1,5, -1,25) \end{array} \right.$$

Puntos de corte con OX :

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow x = \{0,38, 2,62\}$$

Punto de corte con OY :

$$x = 0 \Rightarrow y = 1$$

$$y = -x^2 + x + 5$$

Vértice

$$x_v = \frac{-1}{2 \cdot (-1)} = 0,5$$

$$y_v = -0,5^2 + 0,5 + 5 = 5,25$$

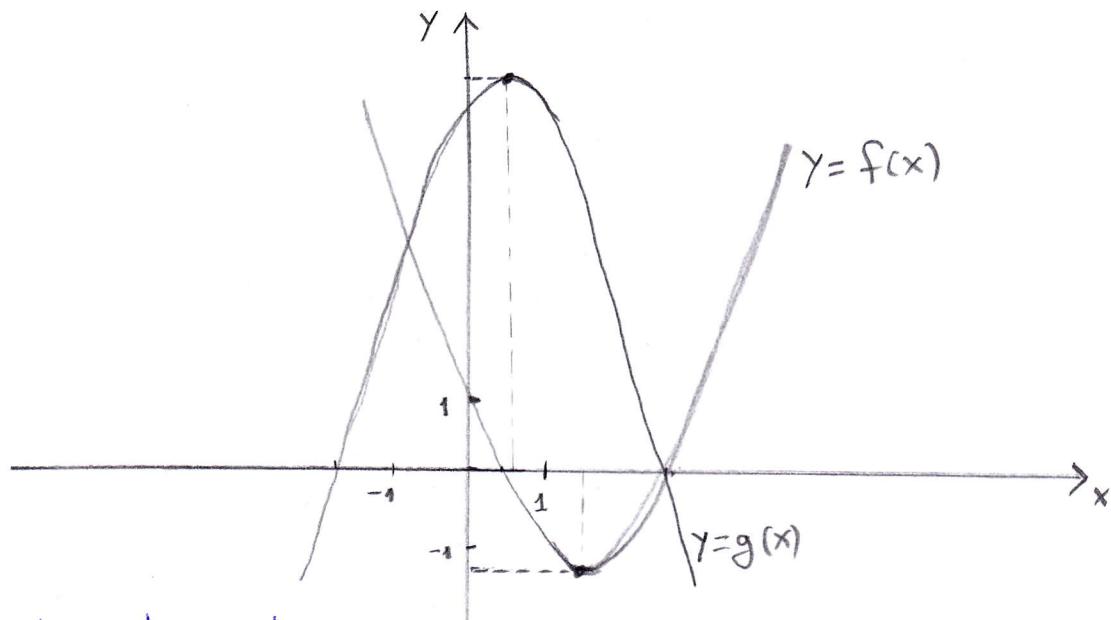
$$\left\{ \begin{array}{l} V_g(0,5, 5,25) \end{array} \right.$$

Puntos de corte con OX

$$-x^2 + x + 5 = 0 \Rightarrow x = \{-1,79, 2,79\}$$

Punto de corte con OY

$$x = 0 \Rightarrow y = 5$$



b) Límites de integración

$$f(x) = g(x) \Rightarrow f(x) - g(x) = 0 \Rightarrow (\text{como } g \text{ está por encima}) g(x) - f(x) = 0$$

$$\Rightarrow -x^2 + x + 5 - (x^2 - 3x - 1) = 0 \Rightarrow -2x^2 + 4x + 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$

Primitiva

$$\int (g(x) - f(x)) dx = \int (-2x^2 + 4x + 6) dx = -\frac{2x^3}{3} + 2x^2 + 6x + C = G(x)$$

Área

$$A = \int_{-1}^3 (-2x^2 + 4x + 6) dx = G(3) - G(-1) = 18 - \left(-\frac{10}{3}\right) = \boxed{\frac{64}{3} \text{ u}^2}$$

3A) a) $A = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}, \tilde{A} = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 & k \\ 1 & 1 & k & k \end{pmatrix}$

Rango de A

$$|A| = k^3 - 3k + 2 = 0 \Rightarrow k = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

Si $k \neq \{-2\}$ = rango $A = 3$

$$\text{Si } k = 1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-F_1+F_2]{-F_1+F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rango } A = 1$$

$$\text{Si } k = -2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rango } A = 2$$

Rango de \tilde{A}

$$\text{Si } k=3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} -F_1+F_2 \\ -F_1+F_3 \end{array}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rango } \tilde{A}=1$$

$$\begin{aligned} \text{Si } k=-2 \Rightarrow & \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} 2F_2+F_1 \\ 2F_3+F_1 \end{array}} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2+F_3} \\ & \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rango } \tilde{A}=3 \end{aligned}$$

Discusión:

Si $k \neq \{-2, 1\} \Rightarrow \text{rango } A = 3 = \text{rango } \tilde{A} = \text{nº de incógnitas} \Rightarrow \text{S.C.D.}$

Si $k=1 \Rightarrow \text{rango } A = 1 = \text{rango } \tilde{A} \Rightarrow \text{S.C.I.}$

Si $k=-2 \Rightarrow \text{rango } A = 2 \neq 3 = \text{rango } \tilde{A} \Rightarrow \text{S.I.}$

Donde hemos usado el teorema de Rouché-Fröbenius.

b) Resolución para $k=1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} -F_1+F_2 \\ -F_1+F_3 \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) [1]$$

Llamamos $z=\lambda \in \mathbb{R}$

$y=\mu \in \mathbb{R}$

Sustituyendo en [1]: $x=1-y-z=1-\lambda-\mu$

Soluciones: $(x, y, z) = (1-\mu-\lambda, \lambda, \lambda)$ con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

4A) a) $\Gamma \equiv \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 0 \\ z = 1 + \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} \vec{r}_\Gamma(0, 0, 1) \\ \vec{u}_\Gamma = (-1, 0, 1) \end{cases}$

$$\pi \equiv 2x - y + 3z = 6 \Rightarrow \vec{n}_\pi = (2, -1, 3)$$

$$\vec{u}_\Gamma \cdot \vec{n}_\pi = (-1, 0, 1) \cdot (2, -1, 3) = -2 + 3 \neq 0 \Rightarrow \vec{u}_\Gamma \not\perp \vec{n}_\pi \Rightarrow$$

Γ y π son secantes (se cortan en un punto)

b) $T^1 \equiv \{P_r, \vec{u}_r, \vec{n}_{T^1}\}$

$$T^1 \equiv \begin{vmatrix} x & -1 & z \\ y & 0 & -1 \\ z-1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2y + z - 1 + x + 3y = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow T^1 \equiv x + 5y + z - 1 = 0$$

Junio 2010

Materia: MATEMÁTICAS II

PROPUESTA B

1B. La velocidad de una partícula, medida en m/s , está determinada en función del tiempo $t \geq 0$, medido en segundos, por la expresión $v(t) = (t^2 + 2t)e^{-t}$. Se pide:

- ¿En qué instante de tiempo del intervalo $[0, 3]$ se alcanza la velocidad máxima? (1,25 puntos)
- Calcula $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t)$, e interpreta el resultado obtenido. (1,25 puntos)

2B. Calcula la integral indefinida: $\int \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx$.

(Nota: Puedes probar el cambio de variable $y = \sin x$) (2,5 puntos)

3B. Consideremos las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & a-3 \\ b+2 & c \end{pmatrix}$. Determina los valores $a, b, c \in \mathbb{R}$ de forma que se cumpla que el determinante de la matriz B sea igual a 8, y además se verifique que $A \cdot B = B \cdot A$. (2,5 puntos)

4B. Dado el plano $\pi \equiv x + z = 4$ y el punto $P(1, 1, 0)$, se pide:

- Encuentra la ecuación general del plano π' paralelo a π que pasa por P . (1,25 puntos)
 - Halla unas ecuaciones paramétricas de la recta r perpendicular a π que pasa por P . (1,25 puntos)
-

Junio de 2010

Propuesta B

1B a) $v(t) = (t^2 + 2t)e^{-t}$; ¿Velocidad máxima en $[0, 3]$?

$$v'(t) = (2t+2)e^{-t} - (t^2+2t)e^{-t} = (-t^2+2)e^{-t}$$

$$v'(t) = 0 \Rightarrow (-t^2+2)e^{-t} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -t^2+2=0 \Rightarrow t = \pm\sqrt{2} \Rightarrow t = \sqrt{2} \\ e^{-t} = 0 \text{ Nunca} \end{cases} \quad (\text{ya que } t \geq 0)$$

$$v''(t) = -2te^{-t} - (-t^2+2)e^{-t}$$

$$v''(\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}} - ((\sqrt{2})^2 + 2)e^{-\sqrt{2}} = \frac{-2\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}} < 0 \Rightarrow t = \sqrt{2} \text{ es un}$$

máximo relativo de $v(t)$

La velocidad es máxima a los $t = \sqrt{2}$ seg.

b) $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (t^2 + 2t)e^{-t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2 + 2t}{e^t} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] =$
 $= \lim_{\substack{\uparrow \\ t \rightarrow +\infty}} \frac{2t+2}{e^t} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^t} = 0$

regla de L'Hôpital

Interpretación: a medida que aumenta el tiempo, disminuye la velocidad

2B $\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} dx = \left[\begin{array}{l} y = \sin x \\ dy = \cos x dx \end{array} \right] = \int \frac{1}{1+y^2} dy =$
 $= \arctg y = \overline{\arctg(\sin x) + C}$

3B $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 2-3 \\ b+2 & c \end{pmatrix}$

• $\det B = 8 \Leftrightarrow 2c - (2-3)(b+2) = 8 \Leftrightarrow -2a + 3b + 2c - ab = 2$

• $AB = BA \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2-3 \\ b+2 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2-3 \\ b+2 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} b+6 & 2a+c-6 \\ b+2 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & a-1 \\ 2b+4 & b+c+2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} b+6=4 \Rightarrow b=-2 \\ 2a+c-6=a-1 \\ b+2=2b+4 \Rightarrow b=-2 \\ c=b+c+2 \Rightarrow b=-2 \end{array} \right\} \text{ Resolvemos el sistema} \quad \left\{ \begin{array}{l} 2a+c-6=a-1 \\ -2a-6+2c+2a=2 \Rightarrow c=4 \end{array} \right\} \Rightarrow a=-1+6-4=1$$

Solución: $(a, b, c) = (1, -2, 4)$ cumple lo que se pide

4B $\pi \equiv x+z=4$, $P(1,1,0)$

a) π' plano t.g. $\left\{ \begin{array}{l} \pi' \parallel \pi \\ P \in \pi' \\ P(1,1,0) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow \pi' \equiv x+z=D \Rightarrow D=1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\pi' \equiv x+z=1}$$

b) Γ recta t.g. $\left\{ \begin{array}{l} \Gamma \perp \pi \\ P \in \Gamma \end{array} \right\} \Rightarrow \Gamma \equiv \{P, \vec{n}_\pi\}, \vec{n}_\pi = (1, 0, 1)$

$$\boxed{\Gamma \equiv \left\{ \begin{array}{l} x=1+\lambda \\ y=1 \\ z=\lambda \end{array} \right. \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}}$$

Instrucciones: El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B.

Los ejercicios deben redactarse con claridad y lo más detalladamente posible.

Puedes utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.

PROPUESTA A

1A. a) Definición de derivada de una función en un punto. (0,5 puntos)

b) Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{ax + \sin x}{2x - x^2} & \text{si } x < 0 \\ bx + c & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{1+x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$, determina los parámetros $a, b, c \in \mathbb{R}$

para que $f(x)$ sea una función continua en $x = 0$, y además sea continua y derivable en $x = 1$. (2 puntos)

2A. a) Determina el dominio de la función $f(x) = \sqrt{2x+1}$. (1 punto)

b) Calcula la integral definida: $\int_{-\frac{1}{2}}^0 f(x) dx$. (1,5 puntos)

3A. Dadas las matrices $M = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & \lambda \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ y $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, se pide:

a) ¿Para qué valores $\lambda \in \mathbb{R}$ existe la matriz inversa de M ? (1 punto)

b) Para $\lambda = 0$ resuelve, si es posible, la ecuación $X \cdot M = 2F$, donde X es una matriz cuadrada de orden 3. (1,5 puntos)

4A. Dado el punto $P(0, 0, 1)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y = 0 \end{cases}$, se pide:

a) Calcula la distancia desde el punto P a la recta r . (1,25 puntos)

b) Halla unas ecuaciones paramétricas de una recta s que pase por el punto P y corte perpendicularmente a la recta r . (1,25 puntos)

Septiembre de 2020

Propuesta A

a) f derivable en $a \in A \cap A' \Leftrightarrow \exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R}$

1A)

b)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{ax + \sin x}{2x - x^2} & \text{si } x < 0 \\ bx + c & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{x+1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Continuidad en $x=0$: ¿ $\exists \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$?

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax + \sin x}{2x - x^2} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{a + \cos x}{2 - 2x} = \frac{a+1}{2} \quad \left. \begin{array}{l} \text{L'Hôpital} \\ \Rightarrow \end{array} \right\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (bx + c) = c = f(0)$$

$$\Rightarrow \frac{a+1}{2} = c \Rightarrow a - 2c = -1$$

Continuidad en $x=1$: ¿ $\exists \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$?

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (bx + c) = b + c \quad \left. \begin{array}{l} \Rightarrow b + c = \frac{1}{2} \Rightarrow 2b + 2c = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2} = f(1) \end{array} \right\}$$

Derivabilidad en $x=1$: ¿ $\exists f'(1)$?

$$f'_-(1) = b \leftarrow$$

$$\begin{aligned} y &= bx + c \\ y' &= b \end{aligned} \leftarrow$$

$$f'_+(1) = -\frac{1}{4} \leftarrow$$

$$y = \frac{1}{x+1}$$

$$y' = \frac{-1}{(x+1)^2}$$

$$b = -\frac{1}{4} \quad (\text{para que } f \text{ sea derivable en } x=1)$$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} a - 2c = -1 \\ 2b + 2c = 1 \\ b = -\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow (a, b, c) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$$

Solución: $(a, b, c) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$ hacen que f sea continua en $x=0$ y, continua y derivable en $x=3$

[2A] a) $f(x) = \sqrt{2x+1}$

$$\begin{aligned} \text{Dom}(f) &= \{x \in \mathbb{R} : 2x+1 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -\frac{1}{2}\} = \\ &= \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right] \end{aligned}$$

b) $\int_{-\frac{1}{2}}^0 f(x) dx$

Primitiva

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \sqrt{2x+1} dx = \int (2x+1)^{1/2} dx = \frac{1}{2} \int 2(2x+1)^{1/2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x+1)^{1/2+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{3} \sqrt{(2x+1)^3} + C = G(x) \end{aligned}$$

Integral definida

$$\int_{-\frac{1}{2}}^0 f(x) dx = G(0) - G\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

[3A] $M = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & \lambda \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) $\exists M^{-1} \Leftrightarrow |M| \neq 0$

$$|M| = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = \begin{cases} -1 \\ -2 \end{cases}$$

Solución: $\exists M^{-1} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} - \{-2, -1\}$

$$b) \sum M = 2F$$

$$\sum MM^{-1} = 2FM^{-1}$$

$$\boxed{\sum = 2FM^{-1}}$$

$$2F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\sum = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 6 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 12 & 2 & -4 \\ -9 & -1 & 3 \end{pmatrix}}$$

Cálculo de M^{-1} para $\lambda = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[-F_3]{2F_1 + F_2}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[-3F_3 + F_1]{-6F_3 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{-F_2 + F_1}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 : 2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\boxed{4A} P(0,0,1), \Gamma = \begin{cases} x+y+z=3 \\ x-y=0 \end{cases}$$

2) Primera forma

$$d(P, \Gamma) = \frac{|\vec{u}_r \times \vec{AP}|}{|\vec{u}_r|} \quad \text{donde } A \in \Gamma$$

$$\text{Si } x=y=z \Rightarrow z=1 \Rightarrow A(1,1,1)$$

$$\vec{u}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{k} + \vec{j} - \vec{k} + \vec{i} = (1, 1, -2)$$

$$\vec{AP} = (0, 0, 1) - (1, 1, 1) = (-1, -1, 0)$$

$$\vec{u}_r \times \vec{AP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{k} + 2\vec{j} + \vec{k} - 2\vec{i} = (-2, 2, 0)$$

$$d(P, r) = \frac{\sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 0^2}}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{12}}{3} u$$

Segunda forma

1) Determinamos un plano π perpendicular a r que contenga a P

$$\pi \equiv \{ P, \vec{n}_\pi = \vec{u}_r \}$$

$$\pi \equiv \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{u}_r = 0 \text{ donde } Q = (x, y, z) \in \pi$$

$$\overrightarrow{PQ} = (x, y, z) - (0, 0, 1) = (x, y, z-1)$$

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{u}_r = 0 \Leftrightarrow (x, y, z-1) \cdot (1, 1, -2) = \boxed{x+y-2z+2=0 \equiv \pi}$$

2) Calculamos el punto de corte, Q , de r y π

$$Q \begin{cases} x+y-2z = -2 \\ x+y+z = 3 \\ x-y = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} -F_1+F_2 \\ -F_1+F_3 \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \end{array} \right) \begin{matrix} [1] \\ [2] \\ [3] \end{matrix}$$

$$\text{De [2]: } z = \frac{5}{3}$$

$$\text{Sustituimos en [3]: } y = \frac{z-2 \cdot \frac{5}{3}}{-2} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Como } x-y=0 \Rightarrow x=y=\frac{2}{3}$$

$$\text{Luego } \boxed{Q\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)}$$

3) Calculamos $d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}|$

$$\overrightarrow{PQ} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right) - (0, 0, 1) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$4) d(P, r) = d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{12}{9}} = \boxed{\frac{\sqrt{12}}{3} u}$$

$$b) S \text{ recta t.g. } \begin{cases} P \in S \\ S \perp r \end{cases} \Rightarrow S \equiv \{P, \overrightarrow{PQ}\} \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{2}{3}\lambda \\ y = \frac{2}{3}\lambda \\ z = 1 + \frac{2}{3}\lambda \end{array} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Septiembre 2010

Materia: MATEMÁTICAS II

PROPUESTA B

1B. Dada la función definida por $f(x) = \begin{vmatrix} 3x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ -1 & 0 & x-6 \end{vmatrix}$, se pide:

a) Halla su expresión polinómica simplificada calculando el determinante. (0,5 puntos)

b) Calcula las coordenadas de su punto de inflexión y los intervalos en donde sea cóncava hacia arriba (\cup) y cóncava hacia abajo (\cap). (2 puntos)

2B. a) Enuncia la fórmula de integración por partes. (0,5 puntos)

b) Calcula la integral indefinida: $\int x \ln x dx$.

Nota: $\ln x$ representa el logaritmo neperiano de x . (2 puntos)

3B. a) Clasifica en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x + y + \lambda z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + 3y + z = 10 \end{cases}$$

(1,5 puntos)

b) Resuélvelo, si es posible, para $\lambda = -3$. (1 punto)

4B. Consideremos los planos $\pi \equiv ax + by + 3z = c$, $\pi' \equiv 2x - y + z = 3$ y la recta

$$r \equiv \begin{cases} 2x + 3z = 0 \\ y + 2z = -4 \end{cases}$$

a) Determina los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ para que los planos π y π' sean paralelos. (1 punto)

b) Para los valores a y b obtenidos, estudia la posición relativa del plano π y la recta r en función de $c \in \mathbb{R}$. (1,5 puntos)

Septiembre 2010

Propuesta B

1B $f(x) = \begin{vmatrix} 3x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ -2 & 0 & x-6 \end{vmatrix}$

a) $f(x) = 3x \cdot x \cdot (x-6) - 1 = 3x^3 - 18x^2 - 1$

b) $f'(x) = 9x^2 - 36x$

$f''(x) = 18x - 36$

$f''(x) = 0 \Rightarrow 18x - 36 = 0 \Rightarrow x = \frac{36}{18} = 2$

$\begin{array}{c} - \\ \textcircled{①} \end{array} \quad \begin{array}{c} + \\ \textcircled{②} \end{array} \quad \begin{array}{c} + \\ \textcircled{③} \end{array}$ Signo de f''

$f'''(x) = 18$

$f'''(2) \neq 0$

Conclusion:

f es $\begin{cases} \text{cóncava hacia arriba (U)} & \text{en } (2, +\infty) \\ \text{cóncava hacia abajo (N)} & \text{en } (-\infty, 2) \end{cases}$

f tiene en $x=2$ un punto de inflexión de coordenadas

$(2, f(2)) = (2, -49)$

2B a) Sea $D \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y, f y g dos funciones con derivada continua en D . Entonces

$$\int fg' = fg - \int f'g$$

b) $\int x \ln x dx = \left[u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} dx \atop dv = x dx \rightarrow v = \frac{x^2}{2} \right] = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx =$
 $= \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{x^2}{4} + C$

3B

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \lambda \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \lambda & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 10 \end{pmatrix}$

Rango de A

$$|A| = 5\lambda - 10 \Rightarrow 5\lambda - 10 = 0 \Rightarrow \lambda = 2$$

Si $\lambda \neq 2 \Rightarrow \text{rango } A = 3$

$$\lambda = 2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rango } A = 2$$

Rango de \tilde{A}

$$\begin{aligned} \text{Si } \lambda = 2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 10 \end{pmatrix} &\xrightarrow{-2F_2+F_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & -20 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2+F_3} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -20 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rango } \tilde{A} = 3 \end{aligned}$$

Discusión

Si $\lambda \neq 2 \Rightarrow \text{rango } A = 3 = \text{rango } \tilde{A} = \text{nº de incógnitas} \Rightarrow \text{S.C.D.}$

$\lambda = 2 \Rightarrow \text{rango } A = 2 \neq 3 = \text{rango } \tilde{A} \Rightarrow \text{S.I.}$

Donde hemos usado el teorema de Rouché-Fröbenius

b) Resolución para $\lambda = 3$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2F_2+F_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & -20 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2+F_3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -20 \end{pmatrix} \begin{matrix} [1] \\ [2] \\ [3] \end{matrix}$$

$$\text{De [3]: } z = \frac{-20}{2} = -10$$

$$\text{Sustituimos en [2]: } y = \frac{-(-10)}{5} = 2$$

$$\text{Sustituimos en [1]: } x = \frac{-3 \cdot (-10) - 2}{2} = 14$$

$$\boxed{\text{Solución: } (x, y, z) = (14, 2, -10)}$$

$$\boxed{4B} \quad \text{a) } \pi \equiv ax + by + cz = c \\ \pi' \equiv 2x - y + z = 3$$

$$\pi \parallel \pi' \text{ si: } \begin{cases} \vec{n}_\pi \parallel \vec{n}_{\pi'} \\ P \in \pi \Rightarrow P \notin \pi' \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \vec{n}_{\pi} &= (a, b, c) \\ \vec{n}_{\pi'} &= (2, -1, 1) \end{aligned} \quad \left\{ \vec{n}_{\pi} \parallel \vec{n}_{\pi'} \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{b}{-1} = \frac{c}{1} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{2} = 3 \Rightarrow a = 6 \\ \frac{b}{-1} = 3 \Rightarrow b = -3 \end{cases} \right. \stackrel{\text{Cipri}}{=}$$

$$\text{Si } x=y=0 \Rightarrow P(0,0,\frac{c}{3}) \in \pi \Rightarrow 2 \cdot 0 - 0 + \frac{c}{3} = 3 \Rightarrow c \neq 9$$

Conclusion : $\pi \parallel \pi'$ si $a=6, b=-3$ y $c \neq 9$

$$b) \pi: 6x - 3y + 3z = c \Rightarrow \vec{n}_{\pi} = (6, -3, 3)$$

$$\Gamma: \begin{cases} 2x + 3z = 0 \\ y + 2z = -4 \end{cases} \Rightarrow \vec{u}_{\Gamma} = \begin{pmatrix} \vec{x} & \vec{y} & \vec{z} \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2\vec{k} - 3\vec{x} - 4\vec{j} = (-3, -4, 2)$$

$$\vec{u}_{\Gamma} \cdot \vec{n}_{\pi} = (-3, -4, 2) \cdot (6, -3, 3) = -18 + 12 + 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{u}_{\Gamma} \perp \vec{n}_{\pi} \Rightarrow \begin{cases} \Gamma \subset \pi & \text{si } [P \in \Gamma \Rightarrow P \in \pi] \\ \Gamma \parallel \pi & \text{si } [P \in \Gamma \Rightarrow P \notin \pi] \end{cases}$$

$$\text{Si } z=0 \Rightarrow y=-4 \text{ y } x=0 \Rightarrow P(0, -4, 0) \in \Gamma$$

$$\text{d} P \in \pi? 6 \cdot 0 - 3 \cdot (-4) + 3 \cdot 0 = c \Rightarrow c = 12$$

$\begin{cases} \text{Si } c = 12 \Rightarrow \Gamma \subset \pi \\ c \neq 12 \Rightarrow \Gamma \parallel \pi \end{cases}$

Instrucciones: El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad y lo más detalladamente posible. Puedes utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntuá 2,5 puntos.

PROPUESTA A

1A. Dada la función $f(x) = 3x^3 - 36x + 2$, se pide:

- Determina las coordenadas de sus máximos y mínimos relativos. (1 punto)
- Enuncia el teorema del valor medio de Lagrange. Analiza si es posible aplicarlo a la función $f(x)$ en el intervalo $[-2, 2]$ y, en caso afirmativo, calcula en qué puntos se verifica la tesis del teorema en dicho intervalo. (1,5 puntos)

2A. a) Dado un número real $a > 0$, calcula el área del recinto encerrado entre la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x^2}$, el eje de abscisas y las rectas $x = a$ y $x = a + 1$. (1,5 puntos)

- Explica razonadamente que cuando a tiende a ∞ , dicho área tiende a cero. (1 punto)

3A. a) Clasifica en función del parámetro $k \in \mathbb{R}$ el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + 100y - z = 100 \\ x - 100y + 2z = 0 \\ x + 300y + kz = 200 \end{cases}$$

(1,5 puntos)

- Resuélvelo en el caso en que sea compatible indeterminado. (1 punto)

4A. a) Comprueba que las direcciones de las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y + z = 1 \end{cases}$ y $r' \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, son perpendiculares. (1 punto)

- Halla la ecuación general de un plano π que contenga a la recta r y sea paralelo a r' . (1,5 puntos)

Reserva 1 de 2010

Propuesta A

$$\boxed{1A} \quad f(x) = 3x^3 - 36x + 2$$

a) Máximos y mínimos relativos

$$f'(x) = 9x^2 - 36$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 9x^2 - 36 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$f''(x) = 18x$$

$$f''(2) > 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \text{ es un min. relativo de coordenadas} \\ (2, f(2)) = (2, -34) \end{cases}$$

$$f''(-2) < 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \text{ es un máx. relativo de coordenadas} \\ (-2, f(-2)) = (-2, 110) \end{cases}$$

b) Teorema del valor medio de Lagrange

Si $f(x)$ es una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) , entonces $\exists c \in (a,b)$ t.q.

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

Aplicación

$f(x) = 3x^3 - 36x + 2$ es continua y derivable en \mathbb{R} , por ser una función polinómica, luego es continua en $[-2,2]$ y derivable en $(-2,2)$ y, por tanto, por el teorema del valor medio de Lagrange, $\exists c \in (-2,2)$ t.q.

$$f(2) - f(-2) = f'(c)(2 - (-2))$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Como } f(2) = -34 \\ f(-2) = 110 \\ f'(x) = 9x^2 - 36 \end{array} \right\} \Rightarrow -34 - 110 = (9c^2 - 36) \cdot 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -36 = 9c^2 - 36 \Rightarrow 9c^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{c = 0 \in [-2,2]}$$

2A $f(x) = \frac{1}{x^2}$

a) $A = \int_a^{a+1} f(x) dx, a > 0$

Primitiva

$$\int f(x) dx = \int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} = \frac{-1}{x} + C = G(x)$$

Area

$$\boxed{A = \int_a^{a+1} f(x) dx = G(a+1) - G(a) = \frac{-1}{a+1} + \frac{1}{a} = \frac{-a + a+1}{a(a+1)} = \frac{1}{a(a+1)} u^2}$$

b) $\lim_{a \rightarrow \infty} A(a) = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{a(a+1)} = \left[\frac{1}{\infty} \right] = 0$

3A a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 100 & -1 \\ 1 & -100 & 2 \\ 1 & 300 & k \end{pmatrix}, \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 100 & -1 & 100 \\ 1 & -100 & 2 & 0 \\ 1 & 300 & k & 200 \end{pmatrix}$

Rango de A

$$|A| = -100k + 200 - 300 - 100 - 600 - 100k = -800 - 200k = 0 \Rightarrow k = -4$$

Si $k \neq -4 \Rightarrow \text{rango } A = 3$

$$k = -4 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 100 & -1 \\ 1 & -100 & 2 \\ 1 & 300 & -4 \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 100 \\ 1 & -100 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rango } A = 2$$

Rango de \tilde{A}

$$\text{Si } k = -4 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 100 & -1 & 100 \\ 1 & -100 & 2 & 0 \\ 1 & 300 & -4 & 200 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} F_1 + F_2 \\ -F_1 + F_3 \end{array}} \begin{pmatrix} 1 & 100 & -1 & 100 \\ 0 & -200 & 3 & -100 \\ 0 & 200 & -3 & 100 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{F_2 + F_3} \begin{pmatrix} 1 & 100 & -1 & 100 \\ 0 & -200 & 3 & -100 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rango } \tilde{A} = 2$$

Discusión

Si $k \neq -4 \Rightarrow \text{rango } A = 3 = \text{rango } \tilde{A} = n^{\circ}$ de incógnitas \Rightarrow S.C.D.

$k = -4 \Rightarrow \text{rango } A = 2 = \text{rango } \tilde{A} < 3 = n^{\circ}$ de incógnitas \Rightarrow S.C.I.

Donde hemos usado el teorema de Rouché-Frobenius

b) Resolución para $k = -4$

Por lo visto en el apartado a), tenemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 100 & -1 & 100 \\ 0 & -200 & 3 & -300 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{matrix} [1] \\ [2] \\ [3] \end{matrix}$$

Llamamos $z = \lambda \in \mathbb{R}$

$$\text{Sustituyendo en [2]: } y = \frac{-100 - 3\lambda}{-200} = \frac{100 + 3\lambda}{200}$$

$$\text{Sustituyendo en [1]: } x = 100 + \lambda - 100 \cdot \frac{100 + 3\lambda}{200} = \frac{100 - \lambda}{2}$$

Soluciones: $(x, y, z) = \left(\frac{100 - \lambda}{2}, \frac{100 + 3\lambda}{200}, \lambda \right)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

4A a) $\Gamma \equiv \begin{cases} x=0 \\ y+z=1 \end{cases}, \quad \Gamma' \equiv \begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$

$$\Gamma: y=1-z \Rightarrow \Gamma \equiv \begin{cases} x=0 \\ y=1-\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow \vec{u}_r = (0, -1, 1) \quad y \quad \vec{u}_{r'} = (2, 1, 1)$$

$$\vec{u}_r \perp \vec{u}_{r'} \Leftrightarrow \vec{u}_r \cdot \vec{u}_{r'} = 0 \Leftrightarrow (0, -1, 1) \cdot (2, 1, 1) = -2 + 1 = 0 \Rightarrow$$

⇒ las direcciones de r y r' son perpendiculares

b) $\Pi \equiv \{P_r, \vec{u}_r, \vec{u}_{r'}\}$ donde $P_r \in \Gamma$

$$\Pi \equiv \begin{vmatrix} x & 0 & 2 \\ y-1 & -1 & 1 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{\Pi \equiv x - y - z + 1 = 0}$$

Calculo $\rightarrow \Sigma$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4/\sqrt{13} & -2/\sqrt{13} & 1/\sqrt{13} \\ 2/\sqrt{13} & 6/\sqrt{13} & -3/\sqrt{13} \\ -2/\sqrt{13} & 1/\sqrt{13} & 6/\sqrt{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

4B

$$\pi \equiv ax + y + bz = c$$

$$\pi' \equiv x + 2y = 3$$

$$\Gamma \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$

- Pasa por el origen de coordenadas

$$O(0,0,0) \in \pi \Rightarrow a \cdot 0 + 0 + b \cdot 0 = c \Rightarrow c = 0$$

- $\pi \perp \pi'$

$$\pi \perp \pi' \Leftrightarrow \vec{n}_{\pi} \perp \vec{n}_{\pi'} \Leftrightarrow \vec{n}_{\pi} \cdot \vec{n}_{\pi'} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a, 1, b) \cdot (1, 2, 0) = 0 \Rightarrow a + 2 = 0 \Rightarrow a = -2$$

- $\Gamma \subset \pi$

$$\Gamma \subset \pi \Rightarrow \vec{u}_r \perp \vec{n}_{\pi} \Rightarrow \vec{u}_r \cdot \vec{n}_{\pi} = 0$$

$$(1, 1, 1) \cdot (-2, 1, b) = 0 \Rightarrow -2 + 1 + b = 0 \Rightarrow b = 1$$

Solución: el plano pedido es $-2x + y + z = 0$

Reserva 1 de 2010**Materia: MATEMÁTICAS II****PROPIUESTA B**

1B. El espacio recorrido por una partícula, medido en metros, está determinado en función del tiempo $t \geq 0$, medido en segundos, por la expresión $e(t) = A t^2 + B \ln(t+1) + C$. Se pide:

a) Determina los coeficientes $A, B, C \in \mathbb{R}$ sabiendo que en el instante $t = 0$ la partícula ha recorrido **6 m**, la velocidad inicial para $t = 0$ es de **8 m/s** y que la aceleración cuando $t = 1$ segundo es de **2 m/s²**. (1,5 puntos)

b) Para los valores obtenidos de A, B y C , calcula $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e(t)}{t^2}$. (1 punto)

(Nota: $\ln(t+1)$ representa el logaritmo neperiano de $t+1$. Recuerda además que la velocidad es la derivada primera del espacio respecto del tiempo y la aceleración la derivada segunda.)

2B. Calcula la integral indefinida: $\int \frac{1}{x^3 + x^2} dx$. (2,5 puntos)

3B. a) Despeja X en la ecuación matricial $X \cdot A = B - 2X$, donde A, B y X son matrices cuadradas de orden 3. (1,25 puntos)

b) Calcula la matriz X siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$. (1,25 puntos)

4B. Calcula los parámetros $a, b, c \in \mathbb{R}$ de la ecuación del plano $\pi \equiv ax + y + bz = c$, sabiendo que pasa por el origen de coordenadas, es perpendicular al plano de ecuación $\pi' \equiv x + 2y = 3$ y que contiene a la recta de ecuaciones

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

(2,5 puntos)

Reserva 1 de 2010

Propuesta B

1B $e(t) = At^2 + B \ln(t+1) + C$, $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \cdot e(0) = 6 & \quad e(0) = C = 6 \\ \cdot e'(0) = 8 & \quad v(0) = e'(0) = B = 8 \\ \cdot e''(1) = 2 & \quad e'(t) = 2At + \frac{B}{t+1} \\ & \quad e''(1) = e''(1) = 2A - \frac{8}{4} = 2A - 2 = 2 \Rightarrow A = 2 \\ & \quad e''(t) = 2A - \frac{B}{(t+1)^2} \end{aligned}$$

Solución: $(A, B, C) = (2, 8, 6)$ cumplen lo que se pide

b) $e(t) = 2t^2 + 8 \ln(t+1) + 6$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e(t)}{t^2} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2t^2 + 8 \ln(t+1) + 6}{t^2} = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} 2 + 8 \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(t+1)}{t^2} + \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{6}{t^2} = 2 + 8 \cdot 0 + 0 = 2 \end{aligned}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(t+1)}{t^2} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{t+1}}{2t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{(t+1)2t} = 0$$

2B $\int \frac{1}{x^3+x^2} dx$

Descomponemos en fracciones simples $\frac{1}{x^3+x^2}$

$$x^3+x^2 = x^2(x+1) = 0 \Rightarrow x=0 \text{ (doble)} \\ x=-1$$

$$\frac{1}{x^3+x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1} = \frac{Ax(x+1) + B(x+1) + C(x^2)}{x^2(x+1)}$$

$$1 = Ax(x+1) + B(x+1) + Cx^2 \quad \begin{cases} x=0 \Rightarrow B=1 \\ x=-1 \Rightarrow C=1 \end{cases}$$

Derivamos: $0 = 2Ax + A + B + 2xC$

$$x=0 \Rightarrow 0 = A + B \Rightarrow A = -1$$

Integral

$$\int \frac{1}{x^3+x^2} dx = \int \frac{-1}{x} dx + \int \frac{1}{x^2} dx + \int \frac{1}{x+1} dx =$$

$$= -\ln|x| + \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + \ln|x+1| = \boxed{-\ln|x| - \frac{1}{x} + \ln|x+1| + C}$$

3B a) $\Delta A = B - 2X$

$$\Delta A + 2X = B$$

$$X(A + 2I) = B$$

$$X(A + 2I)(A + 2I)^{-1} = B(A + 2I)^{-1}$$

$$\boxed{X = B(A + 2I)^{-1}}$$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

Cálculo de $A + 2I$

$$A + 2I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Cálculo de $(A + 2I)^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{F}_2 \cdot 2]{\text{F}_1 \leftrightarrow \text{F}_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{-3\text{F}_1 + \text{F}_3}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 1 & 0 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{-\text{F}_2 + \text{F}_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{13}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{F}_3 : (-\frac{13}{2})}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{13} & \frac{1}{13} & \frac{6}{13} \end{array} \right) \xrightarrow[-2\text{F}_3 + \text{F}_1]{-\frac{1}{2}\text{F}_3 + \text{F}_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{13} & -\frac{2}{13} & \frac{1}{13} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{13} & \frac{6}{13} & -\frac{3}{13} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{13} & \frac{1}{13} & \frac{6}{13} \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow (A + 2I)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{13} & -\frac{2}{13} & \frac{1}{13} \\ \frac{1}{13} & \frac{6}{13} & -\frac{3}{13} \\ -\frac{2}{13} & \frac{1}{13} & \frac{6}{13} \end{pmatrix}$$

Reserva 2 de 2010



Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado.

Bachillerato L. O. G. S. E.

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad y lo más detalladamente posible. Puedes utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntuá 2,5 puntos.

PROPUESTA A

1A. Dada la función $f(x) = \operatorname{arctg}(\sqrt{x-1})$ definida para $x \geq 1$, se pide:

a) Calcula y simplifica $f'(x)$. (1,5 puntos)

b) Explica razonadamente por qué en ningún punto de la gráfica de la función $f(x)$ la recta tangente es horizontal. (1 punto)

2A. Calcula $a \in \mathbb{R}$, siendo $a > 0$, para que el área de la región limitada por la gráfica de la función $f(x) = 6x^2$, el eje de abscisas y la recta $x = a$ sea igual a $2000 u^2$. (2,5 puntos)

3A. Dadas las matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Estudia para qué valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ el rango de la matriz $M - \lambda N$ es igual a 3. (1,25 puntos)

b) Resuelve el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 3X + Y = M \\ X + Y = N \end{cases}$, donde X e Y son matrices cuadradas de orden 3. (1,25 puntos)

4A. Dado el plano de ecuación general $\pi \equiv 2x + ay - z = 4$, se pide:

a) Determina, si es posible, un valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ de modo que el plano π sea paralelo al plano de ecuación $\pi' \equiv x + y + z = 2$. (1,25 puntos)

b) Determina, si es posible, un valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ de modo que el plano π sea paralelo a la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$. (1,25 puntos)

(sigue a la vuelta)

Reserva 2 de 2010

Propuesta A

1A $f(x) = \arctg(\sqrt{x-1})$, $x \geq 1$

a) $f'(x) = \frac{1}{1+(\sqrt{x-1})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x-1}} = \frac{1}{1+x-1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x-1}} = \frac{1}{2x\sqrt{x-1}}$

b) Para que la recta tangente sea horizontal, tiene que tener pendiente cero, luego $f'(x) = 0$, lo que implica que $0 = 1$ Falso.

Por tanto, no hay ningún punto en el que la recta tangente a $f(x)$ sea horizontal.

2A Límites de integración (puntos de corte con OX)

$$f(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

El otro límite de integración es $x = 2$

Primitiva

$$\int f(x) dx = \int 6x^2 dx = \frac{6x^3}{3} = 2x^3 + C = G(x)$$

Área

$$A = \int_0^2 f(x) dx = G(2) - G(0) = 2 \cdot 2^3 = 2000 \text{ u}^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [2 = \sqrt[3]{2000} = 10]$$

3A $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

⇒ Rango de $M - \lambda N$

$$M - \lambda N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \\ 2\lambda & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3-\lambda \\ -2\lambda & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$|M - \lambda N| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3-\lambda \\ -2\lambda & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 2(1-\lambda)(3-\lambda) - 4\lambda(3-\lambda) + 8\lambda = 6\lambda^2 - 12\lambda + 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = 1$$

Si $\lambda \neq 1 \Rightarrow \text{rango}(M - \lambda N) = 3$

Si $\lambda = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rango}(M - \lambda N) = 2$
(no se pide)

Solución: para $\lambda \neq 1$, $\text{rango}(M - \lambda N) = 3$

$$\begin{aligned} b) 3X + Y &= M & 3X + Y &= M \\ X + Y &= N & \xrightarrow{\cdot(-1)} -X - Y &= -N \\ && \text{Sumamos} & 2X = M - N \Rightarrow X = \frac{1}{2}(M - N) \end{aligned}$$

$$\text{Como } X + Y = N \Rightarrow Y = N - \frac{1}{2}(M - N)$$

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{2}[M - N] = \frac{1}{2} \left[\left(\begin{matrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{matrix} \right) - \left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{matrix} \right) \right] = \frac{1}{2} \left(\begin{matrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{matrix} \right) = \\ &= \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

$$\boxed{Y = N - \frac{1}{2}(M - N) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{4A} \quad a) \pi \equiv 2x + 2y - z = 4$$

$$\pi' \equiv x + y + z = 2$$

$$\pi \parallel \pi' \Rightarrow \vec{n}_\pi \parallel \vec{n}_{\pi'} \Rightarrow \frac{2}{1} = \frac{2}{1} = \frac{-1}{1} \text{ Imposible} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\nexists a \in \mathbb{R} \text{ t.q. } \pi \parallel \pi'}$$

$$b) \pi \parallel r \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_\pi \perp \vec{u}_r \Rightarrow \vec{n}_\pi \cdot \vec{u}_r = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2, 2, -1) \cdot (-1, 2, 1) = 0 \Rightarrow -2 + 4 - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{a = \frac{3}{2}}$$

Reserva 2 de 2010

Materia: MATEMÁTICAS II

PROPUESTA B

1B. Determina los valores de los parámetros $a, b, c \in \mathbb{R}$ de forma que la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ cumpla que pasa por el punto de coordenadas $(3, 10)$ y tiene un extremo relativo en el punto de coordenadas $(1, -2)$. (2,5 puntos)

2B. Calcula la integral indefinida: $\int \frac{x+2}{\sqrt{x+1}} dx$.

(Nota: Puedes probar el cambio de variable $y = x + 1$) (2,5 puntos)

3B. Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 10$, obtén el valor de los siguientes determinantes:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{b)} \begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ y & x & z \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} \quad \text{c)} \begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z+1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}.$$

(0,75 puntos el apartado a), 0,75 puntos el apartado b) y 1 punto el apartado c))

4B. Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}$ y $r' \equiv \begin{cases} x = 2 + \mu \\ y = -2\mu \\ z = 4 + \mu \end{cases} \mu \in \mathbb{R}$, se pide:

a) Comprueba que las dos rectas se cortan en un punto calculando dicho punto de corte. (1,5 puntos)

b) Determina el ángulo de corte entre ambas rectas. (1 punto)

Reserva 2 de 2010

Propuesta B

1B $f(x) = ax^2 + bx + c$

- f pasa por $(3, 10) \Rightarrow f(3) = 10$
- f tiene un extremo relativo en $(1, -2) \Rightarrow \begin{cases} f'(1) = 0 \\ f(1) = -2 \end{cases}$

$$\begin{cases} f(3) = 10 \Rightarrow 9a + 3b + c = 10 \\ f(1) = -2 \Rightarrow a + b + c = -2 \\ f'(x) = 2ax + b \\ f'(1) = 0 \Rightarrow 2a + b = 0 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 9 & 3 & 1 & 10 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[-2F_1+F_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -6 & -8 & 28 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow[-6F_3+F_2]{} \\ \xrightarrow{\quad} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -6 & -8 & 28 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array} \right) \begin{matrix} [1] \\ [2] \\ [3] \end{matrix} \end{array}$$

De [3]: $z = 1$

Sustituimos en [2]: $y = \frac{28 + 8 \cdot 1}{-6} = -6$

Sustituimos en [1]: $x = -2 - (-6) - 1 = 3$

Solución: la función pedida es $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$

2B $\int \frac{x+2}{\sqrt{x+1}} dx = \left[\begin{array}{l} y = x+1 \\ dy = dx \end{array} \right] = \int \frac{y+1}{\sqrt{y}} dy = \int \frac{y}{\sqrt{y}} dy + \int \frac{1}{\sqrt{y}} dy =$

$$= \int y^{1/2} dy + \int y^{-1/2} dy = \frac{y^{1/2+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{y^{-1/2+1}}{-\frac{1}{2}+1} = \frac{2\sqrt{y^3}}{3} + 2\sqrt{y} =$$

$$= \frac{2y\sqrt{y}}{3} + \frac{6\sqrt{y}}{3} = \frac{(2y+2)\sqrt{y}}{3} = \frac{[2(x+1)+6]\sqrt{x+1}}{3} = \frac{(2x+8)\sqrt{x+1}}{3} + C$$

De otra forma (con otro cambio de variable)

$$\int \frac{x+2}{\sqrt{x+1}} dx = \left[\begin{array}{l} t^2 = x+1 \\ 2t dt = dx \end{array} \right] = \int \frac{t^2+1}{t} 2t dt = 2 \int (t^2+1) dt =$$

$$= 2 \left(\frac{t^3}{3} + t \right) = 2 \left(\frac{\sqrt{(x+1)^3}}{3} + \sqrt{x+1} \right) = 2 \left[\frac{(x+1)\sqrt{x+1} + 3\sqrt{x+1}}{3} \right] =$$

$$= \boxed{\frac{(2x+8)\sqrt{x+1}}{3} + C}$$

3B

$$\left| \begin{array}{ccc} x & y & z \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right| = 10$$

a) $\left| \begin{array}{ccc} 3x & 3y & 3z \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right| = 3 \left| \begin{array}{ccc} x & y & z \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right| = 3 \cdot \frac{1}{2} \left| \begin{array}{ccc} x & y & z \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right| = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 = 15$

b) $\left| \begin{array}{ccc} 0 & 4 & 2 \\ y & x & z \\ 5 & 5 & 5 \end{array} \right| = - \left| \begin{array}{ccc} 4 & 0 & 2 \\ x & y & z \\ 5 & 5 & 5 \end{array} \right| = - \left(- \left| \begin{array}{ccc} x & y & z \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{array} \right| \right) = 5 \left| \begin{array}{ccc} x & y & z \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right| =$

$$= 5 \cdot 10 = \boxed{50}$$

c) $\left| \begin{array}{ccc} x+1 & y+1 & z+1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} x & y & z \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{array} \right| =$

$$= 5 \left| \begin{array}{ccc} x & y & z \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right| + 5 \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right| = 5 \cdot 10 = 50$$

4B $\exists \{P\} = r \cap \Gamma'$

$$\left. \begin{array}{l} 2-\lambda = 2+\mu \\ 2\lambda = -2\mu \\ 2+\lambda = 4+\mu \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \lambda + \mu = 0 \\ 2\lambda + 2\mu = 0 \Rightarrow \lambda + \mu = 0 \\ \lambda - \mu = 2 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda - \mu = 2 \\ \hline 2\lambda = 2 \Rightarrow \lambda = 1 \\ \Rightarrow \mu = -1 \end{array} \right\}$$

Sustituyendo $\lambda=1$ en las ecuaciones de r ($\circ \mu=-1$
en las ecuaciones de r'), obtenemos P :

$$P \left\{ \begin{array}{l} x = 2-1 \\ y = 2-1 \\ z = 2+1 \end{array} \right. \Rightarrow P(1, 2, 3)$$

b) $\boxed{\alpha = \alpha(\{r, r'\}) = \arccos \left| \frac{\vec{u}_r \cdot \vec{u}_{r'}}{|\vec{u}_r| |\vec{u}_{r'}|} \right| = \arccos \frac{4}{6} = 48^\circ 11' 22,87''}$

$$\vec{u}_r \cdot \vec{u}_{r'} = (-1, 2, 1) \cdot (1, -2, 1) = -1 - 4 + 1 = -4$$

$$|\vec{u}_r \cdot \vec{u}_{r'}| = |-4| = 4$$

$$|\vec{u}_r| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

$$|\vec{u}_{r'}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$