

Instrucciones: El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Puedes utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.

PROPUESTA A

1A. Dada la función $f(x) = x^3 + 3x^2 + ax - 6$, $a \in \mathbb{R}$, se pide:

- a) Determinar el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en su punto de inflexión sea -3 . **(1,25 puntos)**
- b) Para el valor del parámetro encontrado, calcular los extremos relativos e intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$. **(1,25 puntos)**

2A. Calcula la integral definida

$$\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{\cos \sqrt{x}}{2} dx \quad (2,5 \text{ puntos})$$

Nota: Puede ayudarte hacer el cambio de variable $t = \sqrt{x}$ y a continuación aplicar integración por partes.

3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x - y + mz = 0 \\ 4x - 3y + 2z = m \\ -mx + y - z = 1 - m \end{cases} \quad (1,5 \text{ puntos})$$

b) Calcula la solución cuando el sistema sea compatible indeterminado. **(1 punto)**

4A. Sea r la recta determinada por el punto $P(1, 0, 1)$ y el vector $\vec{v} = (1, -1, 0)$.

- a) Calcula el punto de r más cercano al punto $Q(0, 0, 1)$. **(1,5 puntos)**
- b) Calcula el punto simétrico de Q respecto a r . **(1 punto)**

(sigue a la vuelta)

Junio 2016

Propuesta A

1A) $f(x) = x^3 + 3x^2 + ax - 6$, $a \in \mathbb{R}$

a) $f'(x) = 3x^2 + 6x + a$

$f''(x) = 6x + 6$

$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1$

$f'''(x) = 6 \neq 0$

La pendiente de la recta tangente en el punto de inflexión es $f'(-1)$,

luego $f'(-1) = -3 \Rightarrow 3 \cdot (-1)^2 + 6 \cdot (-1) + a = -3 \Rightarrow \boxed{a = 0}$

b) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 6$

$f'(x) = 3x^2 + 6x$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow 3x(x+2) = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ -2 \end{cases}$

$f''(x) = 6x + 6$

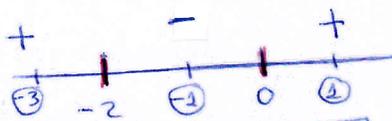
$f''(0) = 6 > 0 \Rightarrow x = 0$ es un mínimo relativo de $f \rightarrow (0, f(0)) = (0, -6)$

$f''(-2) = -6 < 0 \Rightarrow x = -2$ es un máximo relativo de $f \rightarrow (-2, f(-2)) = (-2, -2)$

Estudiamos la monotonía (signo de f')

$f'(x) = 3x^2 + 6x$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ -2 \end{cases}$



f es $\begin{cases} \text{creciente en } (-\infty, -2) \cup (0, +\infty) \\ \text{decreciente en } (-2, 0) \end{cases}$

Se puede poner directamente, teniendo en cuenta que f es continua en \mathbb{R} , tiene un mín. rel. en $x = 0$ y un máx. rel. en $x = -2$

2A) $\int_0^{\pi/4} \frac{\cos \sqrt{x}}{2} dx = \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{x} \\ dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \Rightarrow dx = 2\sqrt{x} dt = 2t dt \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} x = \frac{\pi^2}{4} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{\pi^2}{4}} = \frac{\pi}{2} \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \end{array} \right] =$

$= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{2} 2t dt = \int_0^{\pi/2} t \cos t dt = \left[\begin{array}{l} u = t \rightarrow du = dt \\ dv = \cos t dt \rightarrow v = \sin t \end{array} \right] =$

$= t \sin t \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin t dt = \left[\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} - 0 \cdot \sin 0 \right] - \left[-\cos t \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1$

$$\textcircled{3A} \begin{cases} x - y + mz = 0 \\ 4x - 3y + 2z = m \\ -mx + y - z = 1 - m \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m \\ 4 & -3 & 2 \\ -m & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$a) \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & m \\ 4 & -3 & 2 \\ -m & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 + 4m + 2m - (3m^2 + 2 + 4) = -3m^2 + 6m - 3 = 0 \Rightarrow m = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4(-3)(-3)}}{2 \cdot (-3)} =$$

Discusión:

$$= \begin{cases} 1 \\ 1 \end{cases}$$

Si $m = 1 \Rightarrow |A| = 0$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2 - (-1) = 0; \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 - (-1) = 0$$

$\Rightarrow \text{rango}(A|b) = 2$ ya que $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} \neq 0$

Discusión:

Si $m \neq 1 \Rightarrow \text{rango}(A) = \text{rango}(A|b) = n^{\circ}$ de incógnitas \Rightarrow S.C.D.

Si $m = 1 \Rightarrow \text{rango}(A) = \text{rango}(A|b) = 2 < 3 = n^{\circ}$ de incógnitas \Rightarrow S.C.I

$$b) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{-4F_1 + F_2 \\ F_1 + F_3}]{\quad} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{matrix} [1] \\ [2] \\ \end{matrix}$$

Si $z = \lambda \in \mathbb{R}$, entonces: sustituyendo en [2]: $y = 1 + 2\lambda$

" en [1]: $x = 1 + \lambda$

Soluciones: $(x, y, z) = (1 + \lambda, 1 + 2\lambda, \lambda), \lambda \in \mathbb{R}$

$\textcircled{4A} \vec{QX}$, donde $X \in r$ es un punto genérico de r , es perpendicular al vector $\vec{v} = \vec{u}_r$ (vector director de r), y por tanto, su producto escalar es cero.

Además, si llamamos R al punto que nos piden, se tiene que R es el punto medio del segmento $\overline{QQ'}$, donde Q' es el simétrico de Q respecto de R .

$$a) \left. \begin{matrix} \Gamma \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \\ \vec{QX} = (1 + \lambda, -\lambda, 1) - (0, 0, 1) = (1 + \lambda, -\lambda, 0) \\ \vec{v} = (1, -1, 0) \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{QX} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{QX} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow (1+\lambda, -\lambda, 0) \cdot (1, -1, 0) = 0 \Rightarrow 1+\lambda+\lambda = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$$

Como consecuencia $\boxed{R\left(1+\left(-\frac{1}{2}\right), -\left(-\frac{1}{2}\right), 1\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)}$

$$b) \frac{1}{2} = \frac{0 + x_{Q'}}{2} \Rightarrow x_{Q'} = 1$$

$$\frac{1}{2} = \frac{0 + y_{Q'}}{2} \Rightarrow y_{Q'} = 1$$

$$1 = \frac{1 + z_{Q'}}{2} \Rightarrow 1 + z_{Q'} = 2 \Rightarrow z_{Q'} = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{2} = \frac{0 + x_{Q'}}{2} \Rightarrow x_{Q'} = 1 \\ \frac{1}{2} = \frac{0 + y_{Q'}}{2} \Rightarrow y_{Q'} = 1 \\ 1 = \frac{1 + z_{Q'}}{2} \Rightarrow 1 + z_{Q'} = 2 \Rightarrow z_{Q'} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{Q'(1, 1, 1)}$$



PROPUESTA B

- 1B.** a) Enuncia los Teoremas de Bolzano y de Rolle. (1 punto)
b) Razona que la ecuación $2e^x + x^5 = 0$ tiene al menos una solución real. (0,75 puntos)
c) Razona que, de hecho, dicha solución es única. (0,75 puntos)

- 2B.** a) Calcula el área de la región acotada por las gráficas de las parábolas $f(x) = x^2 - 4x + 3$ y $g(x) = -x^2 + 2x + 11$. (1,5 puntos)
b) Calcula $c \in \mathbb{R}$ para que las rectas tangentes a las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ en el punto de abscisa $x = c$ tengan la misma pendiente. (1 punto)

3B. Sabiendo que

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ a & 2b & 3c \end{vmatrix} = 10$$

donde $x, y, z, a, b, c \in \mathbb{R}$, calcula los determinantes

$$\begin{vmatrix} 14 & 14 & 21 \\ x+4 & y+4 & z+6 \\ \frac{a}{5} & \frac{2b}{5} & \frac{3c}{5} \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 0 & 3x & y & z \\ 0 & 3a & 2b & 3c \\ 0 & 6 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

indicando las propiedades que usas en cada caso para justificar tu respuesta. (1,25 puntos por determinante)

4B. Dados los planos

$$\pi_1 \equiv ax + y + 2z = 2, \quad \pi_2 \equiv x + y + z = 0 \quad \text{y} \quad \pi_3 \equiv x + ay + z = a,$$

donde $a \in \mathbb{R}$, se pide:

- a) Estudiar la posición relativa de los planos anteriores en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$. (1,5 puntos)
b) Para el valor $a = 1$, calcular la distancia entre π_2 y π_3 . (1 punto)

Junio 2016

Propuesta B

1B) Teorema de Bolzano

Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$, y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo $[\text{signo } f(a) \neq \text{signo } f(b)]$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Teorema de Rolle

Si f es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $f(a) = f(b)$, entonces $\exists c \in (a, b)$ t.q. $f'(c) = 0$.

b) $f(x) = 2e^x + x^5$

f es continua en \mathbb{R} , y por lo tanto, continua en $[-1, 0]$

$$\left. \begin{array}{l} f(-1) = 2e^{-1} + (-1)^5 = \frac{2}{e} - 1 < 0 \\ f(0) = 2e^0 + 0^5 = 2 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{signo } f(-1) \neq \text{signo } f(0)$$

Aplicando, el teorema de Bolzano $\exists c \in (-1, 0)$ tal que $f(c) = 0$, esto es, c es una solución de la ecuación $2e^x + x^5 = 0$.

c) Como $f'(x) = 2e^x + 5x^4 \neq 0$ en $(-1, 0)$, entonces $f(x) = 2e^x + x^5$ tiene una única solución en $[-1, 0]$.

Teorema (que se obtiene combinando los teoremas de Bolzano y de Rolle)

Si $f'(x) \neq 0$ en (a, b) , la ecuación $f(x) = 0$ tiene, como mucho, una única solución en $[a, b]$.

(2B) a) Representamos las funciones

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

Puntos de corte con OX

$$y=0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases} \Rightarrow (3,0) \text{ y } (1,0)$$

Vértice

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow V_f(2, f(2)) = (2, -1)$$

$$g(x) = -x^2 + 2x + 11$$

Puntos de corte con OX

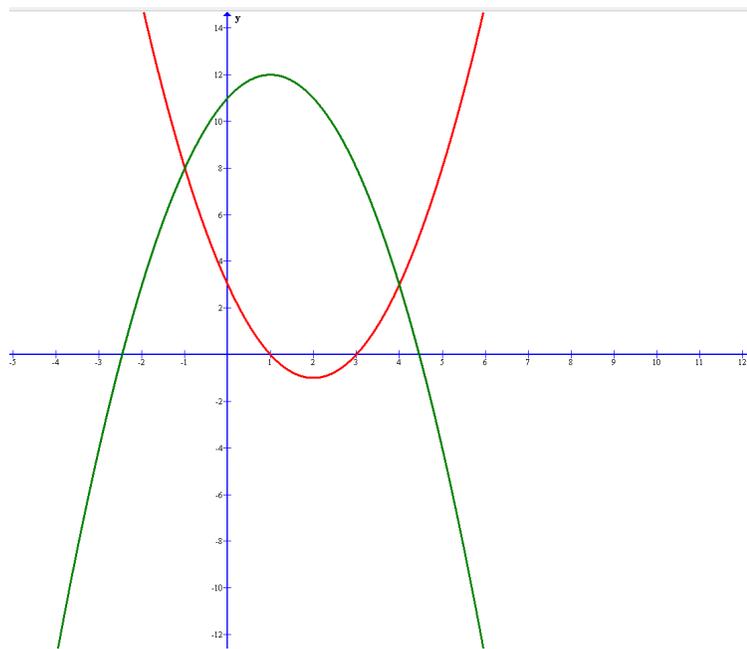
$$y=0 \Rightarrow -x^2 + 2x + 11 = 0 \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{12} \Rightarrow (1 + \sqrt{12}, 0) \text{ y } (1 - \sqrt{12}, 0)$$

Vértice

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2 \cdot (-1)} = 1 \Rightarrow V_g(1, g(1)) = (1, 12)$$

Puntos de corte entre las funciones

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = -x^2 + 2x + 11 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$$



Área

$$A = \int_{-1}^4 [g(x) - f(x)] dx = \int_{-1}^4 [-x^2 + 2x + 11 - (x^2 - 4x + 3)] dx =$$

$$= \int_{-1}^4 (-2x^2 + 6x + 8) dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + \frac{6}{2}x^2 + 8x \right]_{-1}^4 =$$

$$= \left(-\frac{2}{3}4^3 + \frac{6}{2}4^2 + 8 \cdot 4 \right) - \left(-\frac{2}{3}(-1)^3 + \frac{6}{2}(-1)^2 + 8(-1) \right) = \frac{112}{3} - \left(-\frac{13}{3} \right) = \frac{125}{3} \text{ u}^2$$

$$b) \left. \begin{array}{l} f'(x) = 2x - 4 \\ g'(x) = -2x + 2 \end{array} \right\} \Rightarrow 2c - 4 = -2c + 2 \Rightarrow 4c = 6 \Rightarrow \boxed{c = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}}$$

$$\textcircled{3B} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ a & 2b & 3c \end{vmatrix} = 10$$

$$2) \begin{vmatrix} 14 & 14 & 21 \\ x+4 & y+4 & z+6 \\ \frac{a}{5} & \frac{2b}{5} & \frac{3c}{5} \end{vmatrix} \stackrel{[1]}{=} \begin{vmatrix} 14 & 14 & 21 \\ x & y & z \\ \frac{a}{5} & \frac{2b}{5} & \frac{3c}{5} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 14 & 14 & 21 \\ 4 & 4 & 6 \\ \frac{a}{5} & \frac{2b}{5} & \frac{3c}{5} \end{vmatrix} =$$

$$\stackrel{[2]}{=} 7 \cdot \frac{1}{5} \left[\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ a & 2b & 3c \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ a & 2b & 3c \end{vmatrix} \right] \stackrel{[3]}{=} \frac{7}{5} [10 + 2 \cdot 0] = \frac{70}{5} = \boxed{14}$$

[1] Un determinante, con una fila o columna formada por la suma de dos números puede descomponerse en suma de otros dos determinantes que tienen las mismas filas o columnas restantes y, en lugar de aquella, otra formada por los primeros y segundos sumandos, respectivamente.

[2] Si multiplicamos una fila o columna por un número real, el valor del determinante queda multiplicado por dicho número.

[3] El determinante de una matriz con dos filas o columnas iguales, es cero.

$$b) \begin{vmatrix} 0 & 3x & y & z \\ 0 & 3a & 2b & 3c \\ 0 & 6 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \stackrel{[4]}{=} (-5) \begin{vmatrix} 3x & y & z \\ 3a & 2b & 3c \\ 6 & 2 & 3 \end{vmatrix} \stackrel{[2]}{=} (-5) \cdot 3 \begin{vmatrix} x & y & z \\ a & 2b & 3c \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$\stackrel{[5]}{=} (-15) \cdot (-2) \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ a & 2b & 3c \\ x & y & z \end{vmatrix} \stackrel{[5]}{=} 15 \cdot (-1) \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ a & 2b & 3c \end{vmatrix} = -15 \cdot 10 = \boxed{-150}$$

[4] Desarrollamos el determinante por la 1ª columna.

[2]

[5] Si se intercambian dos filas o columnas, cambia el signo del determinante.

$$(4B) \begin{cases} ax+y+2z=2 \\ x+y+z=0 \\ x+ay+z=a \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}, \quad (A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 & a \end{array} \right)$$

$$|A| = a + 2a + 1 - 2 - a^2 - 1 = -a^2 + 3a - 2 = 0 \Rightarrow a = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$$

Si $a = 1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{-F_2+F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{-F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{rango } A = 2 < 3 = \text{rango } (A|b)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Si $a = 2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Rightarrow \text{rango } A = 2 < 3 = \text{rango } (A|b)$$

Submatrices de orden 2×3 para $a = 1$:

$$\text{rg} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow \text{Hay una submatriz de orden } 2 \times 3 \text{ con rango } 1$$

Submatrices de orden 2×3 para $a = 2$:

$$\left(\begin{array}{c|cc} 2 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c|cc} 2 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c|cc} 2 & 2 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 2 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \text{ Quitando } 3^{\text{a}} \text{ fila}$$

$$\left(\begin{array}{c|cc} 2 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c|cc} 2 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 2 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c|cc} 2 & 2 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 2 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 2 & 2 \\ \hline 2 & 1 & 2 \end{array} \right) \text{ Quitando } 2^{\text{a}} \text{ fila}$$

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 2 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 2 \end{array} \right) \text{ Quitando } 1^{\text{a}} \text{ fila}$$

Todas las submatrices de orden 2×3 tienen rango 2.

Discusión: $a \neq 1, 2 \Rightarrow$ los tres planos se cortan en un punto
 $a = 1 \Rightarrow$ dos planos son paralelos y el tercero los corta según dos rectas paralelas
 $a = 2 \Rightarrow$ los planos se cortan dos a dos según tres rectas

$$b) a=1 \Rightarrow \begin{cases} \pi_2 \equiv x+y+z=0 \\ \pi_3 \equiv x+y+z=1 \end{cases}$$

$$\boxed{d(\pi_2, \pi_3) = d(P_{\pi_2}, \pi_3) = \frac{|1+1+(-2)-1|}{\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6} u}$$

$P_{\pi_2}(1, 1, -2)$ es un pto de π_2



Instrucciones: El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Puedes utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.

PROPUESTA A

1A. Se quiere construir un depósito de chapa abierto superiormente con forma de prisma recto de base cuadrada, de $1000m^3$ de capacidad, lo más económico posible. Sabiendo que:

- El coste de la chapa usada para los laterales es de 100 euros el metro cuadrado
- El coste de la chapa usada para la base es de 200 euros el metro cuadrado

¿Qué dimensiones debe tener el depósito?

¿Cuál es el precio de dicho depósito? **(2,5 puntos)**

2A. Dada la función

$$g(x) = (x + b) \cos x, \quad b \in \mathbb{R}.$$

a) Calcula la primitiva $G(x)$ de $g(x)$ que verifica que $G(0) = 1$. **(1,25 puntos)**

b) Calcula el valor de $b \in \mathbb{R}$ sabiendo que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{G(x) - g'(x)}{x} = -2. \quad \text{(1,25 puntos)}$$

3A. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) ¿Qué dimensión debe tener una matriz X para poder efectuar el producto matricial $A \cdot X \cdot B$?

(0,5 puntos)

b) Despeja X en la ecuación matricial $A \cdot X \cdot B + C = D$. **(1 punto)**

c) Calcula la matriz X . **(1 punto)**

4A. Dadas las rectas

$$r \equiv 2 - x = y - 2 = \frac{z}{3} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = c - 3\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

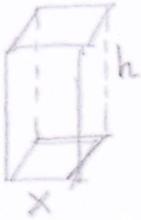
donde $c \in \mathbb{R}$, se pide:

a) Estudiar la posición relativa de r y s en función del parámetro $c \in \mathbb{R}$. **(1,5 puntos)**

b) Hallar el punto de intersección de r y s cuando dichas rectas sean secantes. **(1 punto)**

Propuesta A

1A

 $x =$ lado de la base del depósito $h =$ altura del depósito

$$1000 = x^2 h \Rightarrow h = \frac{1000}{x^2}$$

$$P \equiv \text{precio} = 200x^2 + 100 \cdot 4 \cdot xh$$

$$P = 200x^2 + 400x \frac{1000}{x^2}$$

$$P(x) = 200x^2 + \frac{400000}{x}$$

Hay que minimizar $p(x)$:

$$P'(x) = 400x - \frac{400000}{x} = \frac{400x^2 - 400000}{x}$$

$$P'(x) = 0 \Rightarrow 400x^2 - 400000 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{400000}{400}} = 10$$

$$P''(x) = 400 + \frac{400000}{x^2}$$

$$P''(10) = 400 + \frac{400000}{10^2} > 0 \Rightarrow x = 10 \text{ es un m\u00edn. (relativo)}$$

Solución: las dimensiones del depósito son $10 \times 10 \times 10$ m

y el precio del mismo es $p(10) = 200 \cdot 10^2 + \frac{400000}{10} = \underline{\underline{60000 \text{ €}}}$

$$\textcircled{2A} \textcircled{a} g(x) = (x+b) \cos x \text{ con } b \in \mathbb{R}$$

$$G(x) = \int (x+b) \cos x dx = \int x \cos x dx + b \int \cos x dx \stackrel{\textcircled{1}}{=}$$

$$\int x \cos x dx = \left[\begin{array}{l} u = x \rightarrow du = dx \\ dv = \cos x dx \rightarrow v = \sin x \end{array} \right] = x \sin x - \int \sin x dx =$$

$$= x \sin x + \cos x$$

$$\stackrel{\textcircled{1}}{=} x \sin x + \cos x + b \sin x + C$$

$$G(0) = 1 \Rightarrow 0 \sin 0 + \cos 0 + b \sin 0 + C = 1 \Rightarrow C = 0$$

$$\boxed{G(x) = x \sin x + \cos x + b \sin x = (x+b) \sin x + \cos x}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{G(x) - g'(x)}{x} = -2$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+b)\operatorname{sen} x + \cos x - [\cos x - (x+b)\operatorname{sen} x]}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+b)\operatorname{sen} x + \cos x - \cos x + (x+b)\operatorname{sen} x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(x+b)\operatorname{sen} x}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2[\operatorname{sen} x + (x+b)\cos x]}{1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 2[\operatorname{sen} x + (x+b)\cos x] = 2b = -2 \Rightarrow \boxed{b = -1} \end{aligned}$$

3A) a) $A_{2 \times 2} X_{\boxed{2 \times 3}} B_{3 \times 3}$ tiene que tener dimensión 2×3

$$\begin{aligned} b) AXB = D - C &\Rightarrow A^{-1}AXB = A^{-1}(D - C) \Rightarrow XB = A^{-1}(D - C) \Rightarrow \\ &\Rightarrow XBB^{-1} = A^{-1}(D - C)B^{-1} \Rightarrow \boxed{X = A^{-1}(D - C)B^{-1}} \end{aligned}$$

$$c) |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 + F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \exists B^{-1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 + F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \boxed{\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

4A a) Puestas las rectas en ecs. paramétricas, e igualando los valores de los puntos genéricos, tendremos un sistema de 3 ecuaciones con 2 incógnitas.

Si el sistema es compatible determinado, las rectas son secantes y se cortan en un punto.

Si el sistema es compatible indeterminado, las rectas son coincidentes.

Si el sistema es incompatible, las rectas son paralelas o se cruzan.

$$r \equiv \frac{x-2}{-1} = y-2 = \frac{z}{3} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 2-\mu \\ y = 2+\mu \\ z = 3\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2-\mu = -1+2\lambda \\ 2+\mu = -1+\lambda \\ 3\mu = c-3\lambda \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\lambda + \mu = 3 \\ \lambda - \mu = 3 \\ 3\lambda + 3\mu = c \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad (A|b) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & c \end{pmatrix}$$

$$|(A|b)| = -2c + 9 + 9 + 9 - 18 - c = 0 \Rightarrow c = 3$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

Discusión: Si $c \neq 3 \Rightarrow \text{rango } A = 2 < 3 = \text{rango}(A|b) \Rightarrow$ las rectas son paralelas o se cruzan, pero como $\frac{-1}{2} \neq \frac{1}{1}$ (no son proporcionales) \Rightarrow las rectas se cruzan.

Si $c = 3 \Rightarrow \text{rango } A = \text{rango}(A|b) = n^\circ$ de incógnitas \Rightarrow las rectas son secantes

b) Si $c = 3$, se tiene:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} -2F_1 + F_2 \\ -3F_1 + F_3 \end{array}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -6 \end{array} \right) \begin{array}{l} [1] \\ [2] \\ [3] \end{array}$$

$$\text{De } [2]: 3\mu = -3 \Rightarrow \mu = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P \begin{cases} x = 2 - (-1) \\ y = 2 + (-1) \\ z = 3 \cdot (-1) \end{cases} = \boxed{(3, 1, -3)} \quad (\text{punto de intersección})$$



PROPUESTA B

1B. Dada la función

$$f(x) = 2xe^{1-x}$$

se pide:

- a) Estudiar si tiene asíntotas horizontales **(1,25 puntos)**
- b) Calcular sus puntos de inflexión. **(1,25 puntos)**

2B. Dadas las funciones $f(x) = \frac{2}{x}$ y $g(x) = 3 - x$, se pide:

- a) Esbozar la región encerrada entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$. **(0,5 puntos)**
- b) Calcular el área de la región anterior. **(2 puntos)**

3B. a) Enuncia el Teorema de Rouché-Fröbenius. **(0,5 puntos)**

- b) Razona que un sistema de tres ecuaciones lineales con cuatro incógnitas no puede ser compatible determinado. **(0,5 puntos)**
- c) Determina para qué valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ el sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y - z + 2t = 2 \\ 5x + y + 2z = 1 \\ x + 8y - 5z + 6t = a \end{cases}$$

es incompatible. **(1,5 puntos)**

4B. Dados los planos

$$\pi \equiv 2x - 3y + z = 0 \quad \text{y} \quad \pi' \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = \lambda - \mu \\ z = 2 + 2\lambda + \mu \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

y el punto $P(2, -3, 0)$, se pide:

- a) Hallar la ecuación continua de la recta r que pasa por P y es paralela a la recta s determinada por la intersección de π y π' . **(1,5 puntos)**
 - b) Calcular el ángulo entre los planos π y π' . **(1 punto)**
-

Septiembre 2016

Cipri

Propuesta B

1B) a) $f(x) = 2xe^{1-x}$

$y = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2xe^{1-x} = [\infty \cdot 0] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^{x-1}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^{x-1}} = 0$

$\Rightarrow y=0$ es una A.H.

$y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{e^{x-1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{e^{-x-1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -2xe^{x+1} = -\infty$

\Rightarrow ~~A.H.~~ cuando $x \rightarrow -\infty$

b) $f'(x) = 2e^{1-x} + 2xe^{1-x}(-1) = e^{1-x}(2-2x)$

$f''(x) = -e^{1-x}(2-2x) + e^{1-x}(-2) = e^{1-x}[(-2+2x)-2] = e^{1-x}[2x-4]$

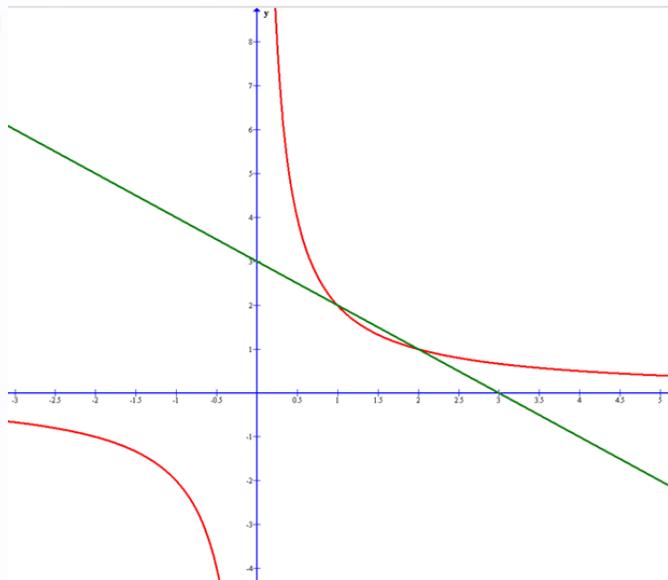
$f''(x) = 0 \Rightarrow e^{1-x}(2x-4) = 0 \Rightarrow 2x-4 = 0 \Rightarrow x = 2$

$f'''(x) = -e^{1-x}(2x-4) + e^{1-x} \cdot 2$

$f'''(2) = -e^{1-2}(2 \cdot 2 - 4) + e^{1-2} \cdot 2 \neq 0 \Rightarrow x = 2$ es un punto de inflexión

Punto de inflexión $(2, f(2)) = (2, \frac{4}{e})$

2B)



$y = \frac{2}{x}$

$y = 3-x$

x	y
1	2
10	0,2
-1	-2
-10	-0,2

x	y
0	3
3	0

A.H. $y = 0$

A.V. $x = 0$

b) Puntos de corte de las funciones: $f(x) = g(x)$

$$\frac{2}{x} = 3 - x \Rightarrow 2 = 3x - x^2 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$$

$$A = \int_1^2 \left[(3-x) - \frac{2}{x} \right] dx = \left[3x - \frac{x^2}{2} - 2 \log x \right]_1^2 =$$

$$= 3 \cdot 2 - \frac{2^2}{2} - 2 \log 2 - \left(3 - \frac{1}{2} - 2 \log 1 \right) = \boxed{\frac{3}{2} - 2 \log 2 \text{ u}^2}$$

donde \log es el logaritmo natural o neperiano.

3B a) Teorema de Rouché-Fröbenius

Un sistema de ecuaciones lineales $AX = B$ es compatible si, y solo si, $\text{rango } A = \text{rango } (A|B)$.

b) Para que un sistema de ecuaciones lineales 3×4 , $AX = B$, sea compatible determinado se tendrían que cumplir:

$$\text{rango } A = \text{rango } (A|B) = \text{n}^\circ \text{ incógnitas}$$

pero la última igualdad es falsa, porque el $\text{rango } (A|B) \leq 3$.

$$c) \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 & | & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 0 & | & 1 \\ 1 & 8 & -5 & 6 & | & a \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -5 & 6 & a \end{vmatrix} = 24 - 10 + 6 - 4a = 0 \Rightarrow a = 5$$

Discusión:

Si $a \neq 5 \Rightarrow \text{rango } A = 2 < 3 = \text{rango } (A|B) \Rightarrow$ Sistema incompatible

Si $a = 5 \Rightarrow \text{rango } A = 2 = \text{rango } (A|B) < \text{n}^\circ \text{ de incógnitas} \Rightarrow$ S.C. Indeterminado

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 8 & -5 \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 8 & -5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

4B) a) $\pi \equiv 2x - 3y + z = 0$, $\pi' \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = \lambda - \mu \\ z = 2 + 2\lambda + \mu \end{cases}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
 $P(2, -3, 0)$

$\Gamma \equiv \begin{cases} P \\ \vec{u}_r = \vec{u}_\pi \times \vec{u}_{\pi'} \end{cases}$ (vector director de la recta intersección de los planos)

$\vec{u}_\pi = (2, -3, 1)$, $\vec{u}_{\pi'} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k} - \vec{k} + 2\vec{i} - \vec{j} =$
 $= 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k} = (3, 1, -2)$

$\vec{u}_r = \vec{u}_\pi \wedge \vec{u}_{\pi'} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 6\vec{i} + 2\vec{k} + 3\vec{j} + 9\vec{k} - \vec{i} + 4\vec{j} =$
 $= 5\vec{i} + 7\vec{j} + 11\vec{k} = (5, 7, 11)$

$$\Gamma \equiv \frac{x-2}{5} = \frac{y+3}{7} = \frac{z}{11}$$

b) $\cos \alpha = \frac{|\vec{u}_\pi \cdot \vec{u}_{\pi'}|}{|\vec{u}_\pi| |\vec{u}_{\pi'}|} = \frac{|(2, -3, 1) \cdot (3, 1, -2)|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2} \sqrt{3^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{14}\sqrt{14}} = \frac{1}{14}$

$\Rightarrow \alpha = \arccos \frac{1}{14} = 85^\circ 54' 14,24''$