Junio 2011

UCLM UNIVERSIDAD DE CASTILLA-LA MANCHA

Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado.

Bachillerato L. O. E.

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Puedes utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.

PROPUESTA A

1A. Dada la función $f(x) = \dfrac{4x^2+3x+4}{2x}$, se pide:

a) Calcula las asíntotas verticales y oblícuas de $f(x)$. (1,25 puntos)

b) Coordenadas de los máximos y mínimos relativos de $f(x)$. (1,25 puntos)

2A. Calcula las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int (\cos(2x) + \operatorname{sen} x \cos x)\, dx$. (1,25 puntos)

b) $\displaystyle\int \frac{x^3-1}{x+2}\, dx$. (1,25 puntos)

3A. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Resuelve el sistema matricial $\left\{ \begin{array}{rcrcl} 2X & + & 3Y & = & A \\ X & + & Y & = & B \end{array} \right.$. (1,25 puntos)

b) Encuentra una fórmula general para B^n, donde $n \in \mathbb{N}$. (Indicación: Calcula las primeras potencias de la matriz B) (1,25 puntos)

4A. Consideremos el plano $\pi \equiv x - z = 0$ y la recta $r \equiv \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & = & 1 & + & at \\ y & = & 1 & - & t \\ z & = & & & 2t \end{array} \right.$, $t \in \mathbb{R}$.

a) Determina el parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que la recta r y el plano π sean paralelos. (1,25 puntos)

b) Para el valor de a determinado, obtén las ecuaciones paramétricas de una recta r' paralela al plano π y que corte perpendicularmente a r en el punto $P(1,1,0)$. (1,25 puntos)

(sigue a la vuelta)

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE) UNIVERSIDAD DE CASTILLA LA MANCHA JUNIO – 2011 (GENERAL)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elija una de las dos opciones, A o B, y conteste a las cuatro preguntas que componen la opción elegida. Si mezcla preguntas de las dos opciones, el tribunal podrá anular su examen.

En el desarrollo de cada respuesta, detalle y explique los procedimientos empleados en la misma. Se califica todo.

PROPUESTA A

Ejercicio 1º) Dada la función $f(x)=\dfrac{4x^2+3x+4}{2x}$, se pide:

a) Calcula las asíntotas verticales y oblicuas de f(x).

b) Coordenadas de los máximos y mínimos relativos de f(x).

Solución

a)

Las asíntotas son las siguientes:

Verticales: son los valores de x que anulan el denominador.

$2x=0$;; $\underline{\underline{x=0}}$ (El eje de ordenadas es asíntota vertical)

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{4x^2+3x+4}{2x}=\frac{4}{0^-}=\underline{-\infty \Rightarrow \downarrow}.$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{4x^2+3x+4}{2x}=\frac{4}{0^+}=\underline{+\infty \Rightarrow \uparrow}.$$

Oblicuas: son de la forma $y=mx+n$, siendo:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x^2+3x+4}{2x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+3x+4}{2x^2}=\underline{2=m}.$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^2+3x+4}{2x}-2x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+3x+4-4x^2}{2x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3x+4}{2x}=\underline{\frac{3}{2}=n}.$$

$$\underline{\underline{Asíntota\ \ oblicua:\ y=2x+\frac{3}{2}}}$$

b)

Una función tiene un extremo relativo cuando se anula su primera derivada.

$$f'(x)=\frac{(8x+3)\cdot 2x-(4x^2+3x+4)\cdot 2}{(2x)^2}=\frac{16x^2+6x-8x^2-6x-8}{4x^2}=\frac{8x^2-8}{4x^2}=\underline{\frac{8(x^2-1)}{4x^2}=f(x)}$$

.

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{8(x^2-1)}{4x^2}=0 \;;;\; 8(x^2-1)=0 \;;;\; x^2-1=0 \Rightarrow \underline{x_1=-1} \;;;\; \underline{x_2=1}.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos relativos se recurre a la segunda derivada; si es negativa para los valores que anulan la primera derivada, se trata de un máximo relativo y si es positiva, de un mínimo relativo.

$$f''(x)=\frac{16x\cdot 4x^2-8(x^2-1)\cdot 8x}{(4x^2)^2}=\frac{64x^3-64x^3+64x}{4x^4}=\frac{64x}{4x^4}=\underline{\frac{16}{x^3}=f''(x)}.$$

$$f''(-1)=\frac{16}{(-1)^3}=\frac{16}{-1}=-16<0 \Rightarrow$$ <u>Máximo relativo para x = -1.</u>

$$f(-1)=\frac{4\cdot(-1)^2+3\cdot(-1)+4}{2\cdot(-1)}=\frac{4-3+4}{-2}=\frac{5}{-2}=-\frac{5}{2} \Rightarrow \underline{\underline{Máximo:\ A\left(-1,\ -\frac{5}{2}\right)}}.$$

$$f''(1)=\frac{16}{1^3}=\frac{16}{1}=16>0 \Rightarrow$$ <u>Mínimo relativo para x = 1.</u>

$$f(1)=\frac{4\cdot 1^2+3\cdot 1+4}{2\cdot 1}=\frac{4+3+4}{2}=\frac{11}{2} \Rightarrow \underline{\underline{Mínimo:\ B\left(1,\ \frac{11}{2}\right)}}.$$

****

Ejercicio 2º) Calcula las siguientes integrales:

a) $I=\int\left[\cos\left(2x\right)+sen\ x\cdot\cos\ x\right]\cdot dx$. b) $I=\int\frac{x^3-1}{x+2}\cdot dx$

Solución

a)

$$I=\int\left[\cos\left(2x\right)+sen\ x\cdot\cos\ x\right]\cdot dx=\int\cos\left(2x\right)\cdot dx+\int sen\ x\cdot\cos\ x\cdot dx=\underline{I_1+I_2=I}\qquad(*)$$

$$I_1=\int\cos\left(2x\right)\cdot dx\Rightarrow\left\{\begin{matrix}2x=t\\dx=\frac{1}{2}dt\end{matrix}\right\}\Rightarrow\int\cos t\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\int\cos t\cdot dt=\frac{1}{2}sen\ t=\underline{\frac{1}{2}sen\left(2x\right)=I_1}\ .$$

$$I_2=\int sen\ x\cdot\cos\ x\cdot dx\Rightarrow\left\{\begin{matrix}sen\ x=t\\\cos\ x\cdot dx=dt\end{matrix}\right\}\Rightarrow\int t\cdot dt=\frac{t^2}{2}+C=\underline{\frac{1}{2}sen^2\ x=I_2}\ .$$

Sustituyendo en (*) los valores obtenidos de I_1 e I_2:

$$I=I_1+I_2=\frac{1}{2}sen\left(2x\right)+\frac{1}{2}sen^2\ x+C=\underline{\underline{\frac{1}{2}\left[sen\left(2x\right)+sen^2\ x\right]+C=I}}$$

b)

$I=\int\frac{x^3-1}{x+2}\cdot dx\Rightarrow$ Efectuando la división:

$$\begin{array}{rrrr|l}
+x^3 & & & +1 & x+2\\
\cline{5-5}
-x^3 & -2x^2 & & & x^2-2x+4\\
\cline{1-4}
0 & -2x^2 & & +1 & \\
 & +2x^2 & +4x & & \\
\cline{1-4}
 & 0 & +4x & +1 & \\
 & & -4x & -8 & \\
\cline{1-4}
 & & 0 & -7 &
\end{array}$$

$$I=\int\frac{x^3-1}{x+2}\cdot dx=\int\left(x^2-2x+4-\frac{7}{x+2}\right)\cdot dx=\frac{x^3}{3}-\frac{2x^2}{2}+4x-7\int\frac{1}{x+2}\cdot dx=$$

$$=\underline{\frac{x^3}{3}-x^2+4x-7I_1=I}\ .\qquad(*)$$

$$I_1=\int\frac{1}{x+2}\cdot dx\Rightarrow\left\{\begin{matrix}x+2=t\\dx=dt\end{matrix}\right\}\Rightarrow I_1=\int\frac{1}{t}\cdot dt=L\left|t\right|+C=\underline{L\left|x+2\right|+C=I_1}\ .$$

Sustituyendo en (*) el valor obtenido de I_1: $\underline{\underline{I=\frac{x^3}{3}-x^2+4x-7L\left|x+2\right|+C}}$.

****

Ejercicio 3º) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Resuelve la ecuación matricial: $\begin{cases} 2X+3Y=A \\ X+Y=B \end{cases}$.

b) Encuentra una fórmula general para B^n, donde $n \in N$. (Indicación: calcula las primeras potencias de la matriz B).

Solución

a)

$$\begin{cases} 2X+3Y=A \\ X+Y=B \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2X+3Y=A \\ -2X-2Y=-2B \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underline{Y=A-2B} \;;;\; X=B-Y=B-A+2B=\underline{-A+3B=X}$$

.

$$X=-A+3B=-\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}=X}}\,.$$

$$Y=A-2B=\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}=Y}}\,.$$

b)

$$B^2=B\cdot B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0+1 & 0+0 \\ 0+0 & 1+0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\underline{I=B^2}\,.$$

$$B^3=B^2\cdot B=I\cdot B=\underline{B=B^3}\,.$$

$$B^4=B^3\cdot B=B\cdot B=\underline{I=B^4}\,.$$

. . . . . .

$$\underline{\underline{B^n=I \;\; si \;\; n \;\; es \;\; par \;;;\; B^n=B \;\; si \;\; n \;\; es \;\; impar}}$$

****

Ejercicio 4º) Consideramos el plano $\pi \equiv x - z = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x=1+at \\ y=1-t \\ z=2t \end{cases}$, $t \in R$.

a) Determina el parámetro $a \in R$ para que la recta r y el plano π sean paralelos.
b) Para el valor de α determinado, obtén las ecuaciones paramétricas de la recta r' paralela al plano π y que corte perpendicularmente a r en el punto P(1, 1, 0).

Solución

a)

Para que la recta r y el plano π sean paralelos es condición suficiente que el vector normal del plano sea perpendicular al vector director de la recta.

El vector normal de π es $\vec{n} = (1,\ 0,\ -1)$ y el vector director de r es $\vec{v} = (a,\ -1,\ 2)$.

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero:

$$\vec{n} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow (1,\ 0,\ -1)\cdot(a,\ -1,\ 2) = 0 \ ;;\ a - 0 - 2 = 0 \ ;;\ a - 2 = 0 \Rightarrow \underline{a = 2}.$$

<u>La recta r y el plano π son paralelos cuando α = 2.</u>

b)

Un vector director de r es $\vec{v} = (2,\ -1,\ 2)$ y el haz de planos perpendiculares a la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases}$ tiene por expresión general $\alpha \equiv 2x - y + 2z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz anterior, el plano β que contiene al punto $P(1,\ 1,\ 0)$ es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \equiv 2x - y + 2z + D = 0 \\ P(1,\ 1,\ 0) \end{array}\right\} \Rightarrow 2\cdot 1 - 1 + 2\cdot 0 + D = 0 \ ;;\ 2 - 1 + D = 0 \ ;;\ 1 + D = 0 \ ;;\ \underline{D = -1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\beta \equiv 2x - y + 2z - 1 = 0}.$$

El haz de planos paralelos a $\pi \equiv x - z = 0$ tiene por expresión $\gamma \equiv x - z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz anterior, el plano μ que contiene al punto $P(1,\ 1,\ 0)$ es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \gamma \equiv x - z + D = 0 \\ P(1,\ 1,\ 0) \end{array}\right\} \Rightarrow 1 - 0 + D = 0 \ ;;\ 1 + D = 0 \ ;;\ \underline{D = -1} \Rightarrow \underline{\mu \equiv x - z - 1 = 0}.$$

La recta r' es la intersección de los planos β y μ: $\underline{r' \equiv \begin{cases} 2x - y + 2z - 1 = 0 \\ x - z - 1 = 0 \end{cases}}$.

Para expresar r' por unas ecuaciones paramétricas hacemos lo siguiente:

$$r' \equiv \begin{cases} 2x - y + 2z - 1 = 0 \\ x - z - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z = \lambda} \ ;;\ x = 1 + z = \underline{1 + \lambda = x} \ ;;\ y = 2x + 2z - 1 = 2 + 2\lambda + 2\lambda - 1 =$$

$$= \underline{1 + 4\lambda = y} \Rightarrow \underline{\underline{r' \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + 4\lambda \\ z = \lambda \end{cases}}}.$$

****

PROPUESTA B

1B. En cierto experimento la cantidad de agua en estado líquido $C(t)$, medida en litros, está determinada en función del tiempo t, medido en horas, por la expresión:

$$C(t) = \frac{2}{3} + 10t + \frac{10}{t} + \frac{240}{t^3}, \qquad t \in [1, 10]$$

Halla cuál es la cantidad mínima de agua en estado líquido y en qué instante de tiempo se obtiene, en el intervalo comprendido entre $t = 1$ hora y $t = 10$ horas. (2,5 puntos)

2B. a) Representa gráficamente la región del primer cuadrante limitada por las gráficas de las funciones $f(x) = \frac{1}{x}$ y $g(x) = \frac{1}{x^2}$, y la recta $x = 2$. (0,5 puntos)

b) Calcula el área de dicha región. (2 puntos)

3B. a) Clasifica, en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$, el sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda x & + & 2y & - & z & = & \lambda \\ 3x & - & y & - & z & = & 1 \\ 5x & + & y & - & 2z & = & 3 \end{array} \right.$$

(1,5 puntos)

b) Resuélvelo, si es posible, para $\lambda = 2$. (1 punto)

4B. Dados los puntos de coordenadas $A(0, 1, 0)$, $B(1, 2, 3)$, $C(0, 2, 1)$ y $D(k, 1, 1)$, donde $k \in \mathbb{R}$:

a) Determina el área del triángulo de vértices A, B y C. (1 punto)

b) ¿Para qué valores del parámetro k el tetraedro cuyos vértices son A, B, C y D tiene un volumen de $5\,u^3$? (1,5 puntos)

PROPUESTA B

Ejercicio 1º) En cierto experimento la cantidad de agua en estado líquido $C(t)$, medida en litros, está determinada en función del tiempo t, medido en horas, por la siguiente expresión: $C(t)=\frac{2}{3}+10t+\frac{10}{t}+\frac{240}{t^3}$, $t\in[1,\ 10]$. Halla cuál es la cantidad mínima de agua en estado líquido y en qué instante de tiempo se obtiene, en el intervalo comprendido entre t = 1 hora y t = 10 horas.

Solución

La cantidad mínima será el mínimo de la función $C(t)=\frac{2}{3}+10t+\frac{10}{t}+\frac{240}{t^3}$:

$$C'(t)=10+\frac{0-10}{t^2}+\frac{0-240\cdot 3t^2}{t^6}=10-\frac{10}{t^2}-\frac{720}{t^4}=\frac{10t^4-10t^2-720}{t^4}=10\cdot\frac{t^4-t^2-72}{t^4}.$$

$$C'(t)=0\ \Rightarrow\ 10\cdot\frac{t^4-t^2-72}{t^4}=0\ ;;\ t^4-t^2-72=0.$$

Resolviendo la ecuación bicuadrada:

$$t^4-t^2-72=0\ \Rightarrow\ t^2=y\ \Rightarrow\ y^2-y-72=0\ ;;\ y=\frac{1\pm\sqrt{1+288}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{289}}{2}=\frac{1\pm 17}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \underline{y_1=9}\ ;;\ \underline{y_2=-8}.$$

Deshaciendo el cambio de variable: $\begin{cases} t^2=9\ \Rightarrow\ \underline{t_1=3}\ ;;\ \underline{t_2=-3} \\ t^2=-8\ \Rightarrow\ t\notin R \end{cases}$.

La solución del problema es <u>t = 3</u>; la solución t = -3 carece de sentido lógico.

La cantidad de agua en estado líquido a las 3 horas es la siguiente:

$$C(3)=\frac{2}{3}+10\cdot 3+\frac{10}{3}+\frac{240}{3^3}=\frac{2}{3}+30+\frac{10}{3}+\frac{80}{9}=\frac{6+270+30+80}{9}=\frac{386}{9}\cong\underline{42'89\ \ litros}.$$

<u>La mínima cantidad en estado liquido son 42’89 litros a las tres horas.</u>

****

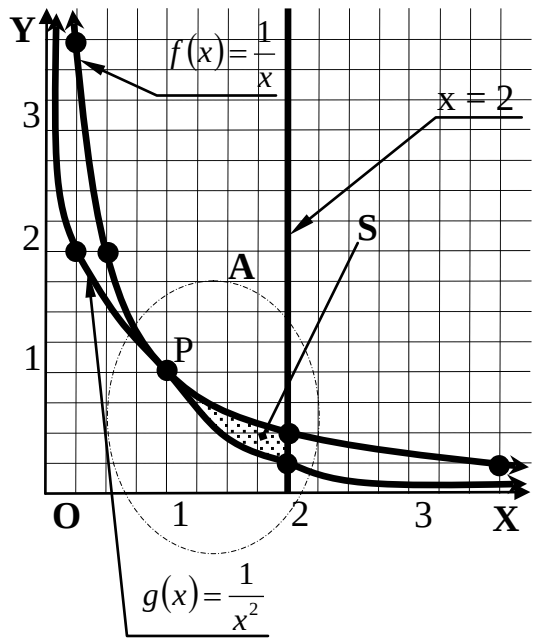
Ejercicio 2º) a) Representa gráficamente la región del primer cuadrante limitada por las gráficas de las funciones $f(x)=\frac{1}{x}$ y $g(x)=\frac{1}{x^2}$, y la recta x = 2.

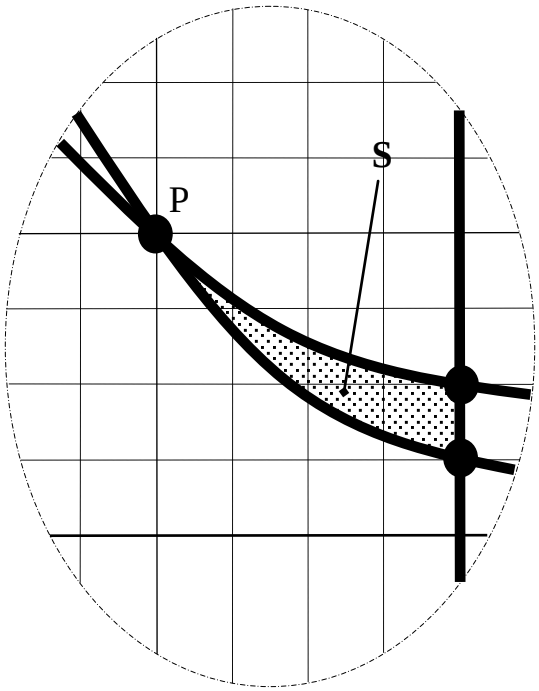
b) Calcula el área de dicha región.

Solución

a)

El punto de corte de las funciones se obtiene de la igualación de sus expresiones:





Detalle A

$$f(x)=g(x) \Rightarrow \frac{1}{x}=\frac{1}{x^2} \;;;\; x^2=x \;;;\; x^2-x=0 \;;;\; x(x-1)=0 \Rightarrow \underline{x_1=0} \;;;\; \underline{x_2=1}.$$

Nótese que la solución x = 0 tiene como valor de las funciones infinito, por lo cual el único punto real de corte es P(1, 1).

b)

Todas las ordenadas de la función f(x) son iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de la función g(x) por lo que la superficie pedida es:

$$S=\int_1^2 [f(x)-g(x)]\cdot dx=\int_1^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)\cdot dx=\left[L\,x-\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^2=\left[L\,x+\frac{1}{x}\right]_1^2=\left(L\,2+\frac{1}{2}\right)-\left(L1+\frac{1}{1}\right)=$$

$$=L\,2+\frac{1}{2}-L1-1=\underline{\underline{\left(L\,2-\frac{1}{2}\right)u^2=S}}\,.$$

****

Ejercicio 3º) a)Clasifica, en función del parámetro $\lambda \in R$, el sistema $\begin{cases} \lambda x+2y-z=\lambda \\ 3x-y-z=1 \\ 5x+y-2z=3 \end{cases}$.

b) Resuélvelo, si es posible, para λ = 2.

Solución

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} \lambda & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} \lambda & 2 & -1 & \lambda \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

El rango de M en función del parámetro λ es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} \lambda & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 5 & 1 & -2 \end{vmatrix}=2\lambda-3-10-5+12+\lambda=3\lambda-6=0 \;;;\; \lambda-2=0 \;;;\; \underline{\lambda=2}.$$

$$\underline{\underline{Para\ \ \lambda\neq 2 \Rightarrow Rango\ \ M=Rango\ \ M'=3=n^{o}\ \ incóg. \Rightarrow Compatible\ \ Determinado}}$$

Para λ = 2 es $M'=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1+F_2=F_3\} \Rightarrow \underline{Rango\ \ M'=2}.$

$$\underline{\underline{Para\ \ \lambda=2 \Rightarrow Rango\ \ M=Rango\ \ M'=2<n^{o}\ \ incóg. \Rightarrow Compatible\ \ Indeterminado}}$$

b)

Para λ = 2 el sistema es $\begin{cases} 2x+2y-z=2 \\ 3x-y-z=1 \\ 5x+y-2z=3 \end{cases}$, que es compatible indeterminado.

Para resolver el sistema despreciamos una de las ecuaciones (tercera) y parametrizamos una de las incógnitas $(z=\lambda)$:

$$\begin{cases} 2x+2y-z=2 \\ 3x-y-z=1 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2x+2y=2+\lambda \\ 3x-y=1+\lambda \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} 2x+2y=2+\lambda \\ 6x-2y=2+2\lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow 8x=4+3\lambda \;;;$$

$$\underline{x=\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\lambda} \;;;\; y=3x-z-1=\frac{3}{2}+\frac{9}{8}\lambda-\lambda-1=\underline{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\lambda=y}.$$

$$\underline{\underline{Solución: \begin{cases} x=\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\lambda \\ y=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\lambda \;,\; \forall\lambda\in R \\ z=\lambda \end{cases}}}$$

****

Ejercicio 4º) Dados los puntos de coordenadas A(0, 1, 0), B(1, 2, 3), C(0, 2, 1) y D(k, 1, 1), donde $\lambda \in R$:

a) Determina el área del triángulo de vértices A, B y C.

b) ¿Para qué valores del parámetro k el tetraedro cuyos vértices son A, B, C y D tienen volumen de 5 u^3?

Solución

a)

Los puntos A(0, 1, 0), B(1, 2, 3) y C(0, 2, 1) determinan los vectores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ y $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, que son los siguientes:

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (1,\ 2,\ 3) - (0,\ 1,\ 0) = (1,\ 1,\ 3).$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{AC} = C - A = (0,\ 2,\ 1) - (0,\ 1,\ 0) = (0,\ 1,\ 1).$$

Sabiendo que el área del triángulo es la mitad del módulo del producto vectorial de los dos vectores que lo determinan:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \left| \vec{u} \wedge \vec{v} \right| = \frac{1}{2} \left\| \begin{matrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2} \left| i + k - 3i - j \right| = \frac{1}{2} \left| -2i - j + k \right| = \frac{1}{2} \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 1^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{4+1+1} = \frac{1}{2} \sqrt{6} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{6}}{2}\, u^2 = S}}.$$

b)

Los puntos A(0, 1, 0) y D(k, 1, 1) determinan el vector :

$$\vec{w} = \overrightarrow{AD} = D - A = (k,\ 1,\ 1) - (0,\ 1,\ 0) = (k,\ 0,\ 1).$$

Sabiendo que el volumen del tetraedro es un sexto del producto mixto de los vectores que lo determinan, en valor absoluto, será:

$$V = \frac{1}{6} \cdot \left| \left[\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w} \right] \right| = 5\, u^3 \Rightarrow \frac{1}{6} \cdot \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ k & 0 & 1 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{6} \cdot \left| 1 + k - 3k \right| = \frac{1}{6} \cdot \left| 1 - 2k \right| = 5 \ ;;\ \left| 1 - 2k \right| = 30 \ ;;$$

$$\left. \begin{matrix} 1 - 2k = 30 \\ -1 + 2k = 30 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{k_1 = -\frac{29}{2}}} \ ;;\ \underline{\underline{k_2 = \frac{31}{2}}}.$$

****

Septiembre 2011

Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado.

Bachillerato L. O. E.

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Puedes utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.

PROPUESTA A

1A. a) Determina el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$, para que la función $f(x) = (x-a)e^x$ tenga un mínimo relativo en $x = 0$. Razona que, de hecho, es un mínimo absoluto. (1,25 puntos)

b) Para el valor de a obtenido, calcula los puntos de inflexión de la función $f(x)$. (1,25 puntos)

2A. Calcula la integral $\displaystyle\int \frac{x^2 - 3x + 1}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}\, dx$. (2,5 puntos)

3A. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & k \\ 1 & 4 & k \\ 0 & 5k & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ se pide:

a) Calcula en función del parámetro $k \in \mathbb{R}$ el rango de la matriz A. (1 punto)

b) ¿Existe algún valor de $k \in \mathbb{R}$ para el cual el sistema $A \cdot X = O$ sea incompatible? (0,75 puntos)

c) ¿Para qué valores de $k \in \mathbb{R}$ el sistema $A \cdot X = O$ es compatible indeterminado? (0,75 puntos)

4A. Dadas las rectas $r \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x - y & = & 1 \\ y + z & = & 1 \end{array} \right.$ y $s \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & t \\ y & = & 1 - t \\ z & = & t \end{array} \right.$, $t \in \mathbb{R}$, se pide:

a) Determina su posición relativa. (1,25 puntos)

b) Halla el ángulo que forman sus vectores de dirección. (1,25 puntos)

(sigue a la vuelta)

Septiembre 2011

Propuesta A

1A.- a) Determinar el valor del parámetro $a \in \Re$ **para que** la función $f(x) = (x-a)e^x$ tenga un mínimo relativo en **x = 0**. Razona que, de hecho, es un mínimo absoluto **(1'25 puntos)**
b) Para el valor de **a** obtenido, calcula los puntos de inflexión de la función **f(x) (1'25 puntos)**

$a)$

$$f'(x) = e^x + (x-a)e^x = (x-a+1)e^x \Rightarrow f'(0) = 0 \Rightarrow (0-a+1)e^0 = 0 \Rightarrow (-a+1)\cdot 1 = 0 \Rightarrow 1-a = 0 \Rightarrow a = 1$$

$$f''(x) = e^x + e^x + (x-1)e^x = (x-1+2)e^x = (x+1)e^x \Rightarrow f''(0) = (0+1)e^0 = 1\cdot 1 = 1 > 0 \Rightarrow Mínimo$$

$$Mínimo\ relativo\ en\ x = 0 \Rightarrow f(0) = (0-1)e^0 = -1$$

Veamos que valores tiene la función en los extremos de ella, al no limitarse el intervalo de búsqueda, en mas y menos infinito, si hay valores menores que **f(0)** entonces esos son los valores mínimos absolutos.

$$y = \lim_{x\to\infty} (x-1)e^x = \infty \cdot e^\infty > f(0)$$

$$y = \lim_{x\to-\infty} (x-1)e^x = \lim_{x\to\infty} (-x-1)e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x-1}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} = \xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital} = \lim_{x\to\infty} \frac{-1}{e^x} = -\frac{1}{\infty} = 0 > -1$$

$$Por\ lo\ tanto\ en\ x = 0\ hay\ un\ mínimo\ absoluto$$

$b)$

$$f''(x) = (x+1)e^x \Rightarrow f''(0) = 0 \Rightarrow (x+1)e^x = 0 \Rightarrow x+1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$f'''(x) = e^x + (x+1)e^x = (x+1+1)e^x = (x+2)e^x \Rightarrow f'''(-1) = (-1+2)e^1 = e \neq 0 \Rightarrow$$

$$Punto\ de\ inflexión\ en\ x = -1 \Rightarrow f(-1) = (-1-1)e^{-1} = -\frac{2}{e}$$

2A.- Calcula la integral $\int \frac{x^2-3x+1}{x^3-5x^2+8x-4}\,dx$ **(2'5 puntos)**

$$x^3-5x^2+8x-4 = 0 \Rightarrow Por\ Ruffini \Rightarrow \begin{array}{c|cccc} & 1 & -5 & 8 & -4 \\ 2 & & 2 & -6 & 4 \\ \hline & 1 & -3 & 2 & \underline{|0} \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} & 1 & -3 & 2 \\ 2 & & 2 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & \underline{|0} \end{array} \Rightarrow (x-1)(x-2)^2 = 0$$

$$\frac{x^2-3x+1}{x^3-5x^2+8x-4} = \frac{x^2-3x+1}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} = \frac{A(x-2)^2 + B(x-1)(x-2) + C(x-1)}{(x-2)^2}$$

$$A(x-2)^2 + B(x-1)(x-2) + C(x-1) = x^2-3x+1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow A(1-2)^2 = 1^2 - 3\cdot 1 + 1 \Rightarrow A = -1 \\ x = 2 \Rightarrow C(2-1) = 2^2 - 3\cdot 2 + 1 \Rightarrow C = -1 \\ x = 0 \Rightarrow 4A + 2B - C = 0^2 - 3\cdot 0 + 1 \Rightarrow 4A + 2B - C = 1 \end{cases}$$

$$4\cdot(-1) + 2B - (-1) = 1 \Rightarrow -4 + 2B + 1 = 1 \Rightarrow 2B = 4 \Rightarrow B = 2$$

$$\frac{x^2-3x+1}{x^3-5x^2+8x-4} = \frac{-1}{x-1} + \frac{2}{x-2} + \frac{-1}{(x-2)^2} \Rightarrow I = \int \frac{x^2-3x+1}{x^3-5x^2+8x-4}\,dx = -\int \frac{dx}{x-1} + 2\int \frac{dx}{x-2} - \int \frac{dx}{(x-2)^2} =$$

$$\begin{cases} x-1 = t \Rightarrow dx = dt \\ x-2 = u \Rightarrow dx = du \end{cases}$$

$$I = -\int \frac{dt}{t} + 2\int \frac{du}{u} - \int \frac{du}{u^2} = -\ln t + 2\ln u - \int u^{-2}du = \ln\frac{u^2}{t} - \frac{1}{(-1)}\cdot u^{-1} = \ln\frac{(x-2)^2}{(x-1)} + \frac{1}{x-2} + K$$

3A.- Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 3 & k\\ 1 & 4 & k\\ 0 & 5k & 1\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ y $O=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$, se pide:

a) Calcula en función del parámetro $k\in\Re$ el rango de la matriz **A (1 punto)**

b) ¿Existe algún valor de $k\in\Re$ para el cual el sistema **AX = O** sea incompatible? **(0'75 puntos)**

c) Para que valores de $k\in\Re$ el sistema **AX = O** es compatible indeterminado **(0'75 puntos)**

$a)$

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 3 & k\\ 1 & 4 & k\\ 0 & 5k & 1\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 5 & k\\ 0 & 5 & k\\ 0 & 5k & 1\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 5 & k\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 5k-5 & 1-k\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}5k-5=0\Rightarrow 5k=5\Rightarrow k=1\\ 1-k=0\Rightarrow k=1\end{cases}$$

$\forall k\in\Re-\{1\}\Rightarrow rang(A)=3$

$Cuando\ k=1\Rightarrow rang(A)=2$

$b)$

El sistema queda reducido a tres ecuaciones ya que la tercera es combinación lineal de las otras

No hay ningún valor de k que haga el sistema incompatible ya que una ecuación homogenea solo tiene soluciones compatibles determinadas o indeterminadas

$c)$

Cuando $k=1$, *el sistema es compatible indeterminado ya que*

$rang(A)=rang(A/B)=2<$ *Número de incognitas*

Solución

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\Rightarrow 5y+z=0\Rightarrow z=-5y\Rightarrow x-y=0\Rightarrow x=y\Rightarrow Solución\Rightarrow(x\ ,y\ ,z)=(\lambda\ ,\lambda\ ,5\lambda)$$

4A.- Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x - y = 1 \\ y + z = 1 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t, t \in \Re \\ z = t \end{cases}$

a) Determinar su posición relativa. **(1'25 puntos)**
b) Hallar el ángulo que forman sus vectores directores **(1'25 puntos)**

a) Analizaremos si las rectas tienen un punto común, de tenerlo estudiaremos si los vectores directores son iguales o proporcionales, si este caso se da, las rectas son coincidentes, de no darse este último supuesto las rectas se cortan en un punto, son secantes.
Si no tienen punto común, y hay igualdad o proporcionalidad entre los vectores directores las rectas son paralelas, de no haberlo las rectas se cruzan en el espacio

$$\begin{cases} \begin{cases} x = 1 + y \\ z = 1 - y \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \\ s \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + \lambda = t \\ \lambda = 1 - t \\ 1 - \lambda = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda - t = -1 \\ \lambda + t = 1 \\ \lambda + t = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow Dos\ \ filas\ iguales$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2 \neq 0 \Rightarrow rang\ \ A = 2 = Número\ de\ incognitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Determinado$$

$$Pueden\ ser\ rectas\ coincidentes\ o\ cortarse$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (1\ ,1\ ,-1) \\ \overrightarrow{v_s} = (1\ ,-1\ ,1) \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{1} \neq \frac{1}{-1} \Rightarrow No\ son\ \ prorcionales \Rightarrow Las\ rectas\ se\ cortan\ en\ un\ \ punto$$

$$b)$$

$$\cos\alpha =$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (1\ ,1\ ,-1) \\ \overrightarrow{v_s} = (1\ ,-1\ ,1) \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{1} \neq \frac{1}{-1} \Rightarrow No\ son\ \ prorcionales \Rightarrow Las\ rectas\ se\ cortan\ en\ un\ \ punto$$

$$b)$$

$$\cos\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v_s}\right|} = \frac{\left|(1\ ,1\ ,-1) \cdot (1\ ,-1\ ,1)\right|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{|1 - 1 - 1|}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{|-1|}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = arc\ cos\left(\frac{1}{3}\right) = 70^{o}31'44''$$

PROPUESTA B

1B. a) Enuncia el teorema de Bolzano y el teorema de Rolle. (1 punto)

b) Demuestra que la ecuación $e^x + x^7 = 0$ tiene al menos una solución real. (0,75 puntos)

c) Demuestra que, de hecho, dicha solución es única. (0,75 puntos)

2B. Sean las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = a$, con $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Calcula el valor del parámetro a para que el área encerrada entre las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ sea $\frac{32}{3}$. (2,5 puntos)

3B. a) Clasifica, en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$, el sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 1 \\ 2x & - & 3y & & & = & -1 \\ x & + & 2y & + & mz & = & m+3 \end{array} \right.$$

(1,5 puntos)

b) Resuélvelo, si es posible, para $m = 7$. (1 punto)

4B. Consideremos el plano $\pi \equiv x - ky = 0$, y la recta $r \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x + y - z & = & 3 \\ x - y & = & 1 \end{array} \right.$

a) Halla el valor del parámetro $k \in \mathbb{R}$ para que el plano π y la recta r sean paralelos. (1,5 puntos)

b) Para el valor de k obtenido, calcula la distancia desde la recta r al plano π. (1 punto)

Propuesta B

1B.- a) Enuncia el teorema de Bolzano y el de Rolle **(1 punto)**
b) Demuestra que la ecuación $\mathbf{e^x + x^7 = 0}$ tiene al menos una solución real **(0'75 puntos)**
c) Demuestra, que de hecho, esa solución es única **(0'75 puntos)**

a)
<u>Teorema de Bolzano</u>
Si **f(x)** es continua en el intervalo **[a , b],** y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo **[sign f(a)** $\neq$ **sign f(b)]**, entonces existe, al menos, un punto $c \in (a\ ,b)$ tal que **f(c) = 0**

<u>Teorema de Rolle</u>
Si **f(x)** es continua en **[a , b]**, derivable en **(a , b)** y que verifica que **f(a) = f(b);** entonces existe, al menos, un punto $c \in (a\ ,b)$ tal que **f'(c) = 0**

b)
Sea $\mathbf{f(x) = e^x + x^7}$,sabemos que esta función es continua en todo su dominio que es la recta real y el intervalo, entre otros, **[-1 , 1]** toma valores, en los extremos de dicho intervalo:

$$f(-1) = e^{-1} + (-1)^7 = \frac{1}{e} - 1 = \frac{1-e}{e} < 0 \text{ y } f(1) = e^1 + 1^7 = 1 + e > 0$$

con signo diferentes, **[sign f(-1)** $\neq$ **sign f(1)],** por lo tanto existe, según el teorema de Bolzano, al menos, un punto $c \in (-1\ ,1)$ tal que **f(c) = 0** que es una solución real de la función o lo que es lo mismo que $\mathbf{e^c + c^7 = 0}$

c)
Comprobemos que la función $\mathbf{f(x) = e^x + x^7}$ únicamente puede tener una raíz real

La función $\mathbf{f(x) = e^x + x^7}$ es continua en toda la recta real, y los valores en sus extremos son:

$$y = \lim_{x\to-\infty}\left(e^x + x^7\right) = \lim_{x\to\infty}\left[e^{-x} + (-x)^7\right] = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{e^x} - x^7\right) = \frac{1}{e^\infty} - \infty^7 = 0 - \infty = -\infty < 0 \text{ y}$$

$y = \lim_{x\to\infty}\left(e^x + x^7\right) = e^\infty + \infty^7 = \infty + \infty = \infty > 0$ con signo diferentes, **[sign f(-**∞**)** $\neq$ **sign f(**∞**)],** por lo tanto existe, según el teorema de Bolzano, al menos, un punto $c \in (-\infty\ ,\infty)$ tal que **f(c) = 0** que es una solución real de la función o lo que es lo mismo que $\mathbf{e^c + c^7 = 0.}$

Veamos ahora mediante el teorema de Rolle y trabajando por reducción al absurdo que esta raíz es única.

Supongamos que **f(x)** tiene dos raíces ***c*** y ***d***, tales que f(c) = f(d) = 0

Como **f(x)** es una función exponencial y polinómica, es continua y derivable en toda la recta real , o sea en el intervalo **[c , d]** y además toma el mismo valor en los extremos de dicho intervalo por lo que aplicando el teorema de Rolle, tenemos que existe, al menos, un punto $x_0 \in (c\ ,d)$ tal que $\mathbf{f'(x_0) = 0}$

La derivada de esta función es $\mathbf{f'(x) = e^x + 7x^6}$; así, para determinar el punto $\mathbf{x_0}$ tendremos que igualar su derivada a cero, y ademas teniendo en cuenta que $\mathbf{e^x > 0}$ para todo valor de la recta real tenemos:

$$e^x + 7x^6 = 0 \Rightarrow 7x^6 = -e^x \Rightarrow x^6 = -\frac{e^x}{7} \Rightarrow x = \sqrt[6]{-\frac{e^x}{7}} \Rightarrow Sin\ solución.$$

Esta ecuación no tiene solución en el campo de los números reales, por lo tanto hemos obtenido una contradicción y así, no es posible que la función tenga dos raíces en todo el campo de los números reales quedando demostrado que solo tiene una raíz real en el intervalo $(-\infty\ ,\infty)$ tal como queríamos demostrar

2.B.- Sean las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = a$ con $a \in \Re$, **a > 0**. Calcular el valor del parámetro **a** para que el área encerrada entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ sea $\frac{32}{3}$ **(2'5 puntos)**

$$Punto\ de\ corte\ entre\ funciones \Rightarrow x^2 = a \Rightarrow x = \pm\sqrt{a} \Rightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{a} \\ x = \sqrt{a} \end{cases}$$

$$\int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} a\ dx - \int_{-\sqrt{a}}^{-\sqrt{a}} x^2\ dx = \frac{32}{3} \Rightarrow a \cdot [x]_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} - \frac{1}{3}\left[x^3\right]_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} = \frac{32}{3} \Rightarrow a \cdot \left[\sqrt{a} - \left(-\sqrt{a}\right)\right] - \frac{1}{3}\left[\left(\sqrt{a}\right)^3 - \left(-\sqrt{a}\right)^3\right] = \frac{32}{3}$$

$$2a\sqrt{a} - \frac{1}{3}2a\sqrt{a} = \frac{32}{3} \Rightarrow \frac{6a\sqrt{a} - 2a\sqrt{a}}{3} = \frac{32}{3} \Rightarrow 4a\sqrt{a} = 32 \Rightarrow a\sqrt{a} = 8 \Rightarrow \left(a\sqrt{a}\right)^2 = 8^2 \Rightarrow a^2 a = 64 \Rightarrow$$

$$a^3 = 64 \Rightarrow a = \sqrt[3]{64} = 4$$

3B.- a) Clasifica, en función del parámetro $m \in \Re$, el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - 3y = -1 \\ x + 2y + mz = m + 3 \end{cases}$

(1'5 puntos)

b) Resuélvelo, si es posible, para $m = 7$ **(1 punto)**

$a)$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & m \end{vmatrix} = -3m + 4 + 3 + 2m = -m + 7 \Rightarrow Si\ |A| = 0 \Rightarrow -m + 7 = 0 \Rightarrow m = 7$$

$$\forall m \in \Re - \{7\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 3 = Número\ de\ incognitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$$

$Si\ m = 7$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 7 & 10 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow La\ tercera\ ecuación\ es\ combinación\ lineal\ de$$

$$las\ otras\ dos \Rightarrow Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado$$

$b)$

$Si\ m = 7 \Rightarrow Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow y + 2z = 3 \Rightarrow y = 3 - 2z \Rightarrow x - (3 - 2z) + z = 1 \Rightarrow x - 3 + 3z = 1 \Rightarrow x = 4 - 3z$$

$$Solución \Rightarrow (x\ ,y\ ,z) = (4 - 3\lambda\ ,3 - 2\lambda\ ,\lambda)$$

4.B.- Consideremos el plano $\pi \equiv x - ky = 0$, y la recta $r \equiv \begin{cases} x + y - z = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$

a) Halla el valor del parámetro $k \in \Re$ para que el plano π y la recta **r** sean paralelos **(1'5 puntos)**
b) Para el valor de **k** obtenido, calcula la distancia desde la recta r al plano π **(1 punto)**

a) El producto escalar de los vectores directores de la recta y el plano es nulo ya que son perpendiculares

$$x = 1 + y \Rightarrow 1 + y + y - z = 3 \Rightarrow 2y - z = 2 \Rightarrow z = 2y - 2 \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (1, 1, 2) \\ \overrightarrow{v_\pi} = (1, -k, 0) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \perp \overrightarrow{v_\pi} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_\pi} = 0 \Rightarrow (1, 1, 2) \cdot (1, -k, 0) = 0 \Rightarrow 1 - k = 0 \Rightarrow k = 1$$

b) La distancia de la recta al plano es la de cualquiera de uno de sus puntos **R** al plano (tomaremos el indicado en la ecuación)

$$x = 1 + y \Rightarrow 1 + y + y - z = 3 \Rightarrow 2y - z = 2 \Rightarrow z = 2y - 2 \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (1, 1, 2) \\ \overrightarrow{v_\pi} = (1, -k, 0) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \perp \overrightarrow{v_\pi} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_\pi} = 0 \Rightarrow (1, 1, 2) \cdot (1, -k, 0) = 0 \Rightarrow 1 - k = 0 \Rightarrow k = 1$$

$$\begin{cases} R(1, 0, -2) \\ \pi \equiv x - y = 0 \end{cases}$$

$$d(r, \pi) = d(R, \pi) = \frac{|1 - 0|}{\sqrt{1 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\, u$$

Reserva 1 de 2011

Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado.

Bachillerato L. O. E.

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Puedes utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.

PROPUESTA A

1A. a) Definición de función continua en un punto. (0,5 puntos)

b) Determina el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que la función

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 & \text{si } x \leq 3 \\ \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

sea continua en $x = 3$. (2 puntos)

2A. Calcula las siguientes integrales indefinidas:

a) $\displaystyle\int \frac{1+8x}{1+x^2}\,dx$. (1,25 puntos)

b) $\displaystyle\int (x^2+x)\cos x\,dx$. (1,25 puntos)

3A. He pensado en tres números, de manera que la suma de los dos primeros es igual al tercero. Si al triple del primer número le resto el doble del segundo vuelvo a obtener el tercero. Si al doble del primero le resto la mitad del segundo también obtengo el tercero. Por último, si al doble del primero le resto el segundo y sumo uno, de nuevo vuelvo a obtener el tercer número.

a) Plantea un sistema de ecuaciones que recoja la información anterior y clasifícalo. (1,5 puntos)

b) Determina, si el problema tiene solución, los tres números que he pensado. (1 punto)

4A. Consideremos las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 1 - at \\ y = b + t \\ z = 2t \end{cases}$, con $t \in \mathbb{R}$, y $s \equiv x - 2 = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z+6}{2}$.

a) Determina los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ para que las dos rectas se corten perpendicularmente en un punto. (1,5 puntos)

b) Calcula, para los valores de los parámetros obtenidos en el apartado anterior, las coordenadas del punto de corte. (1 punto)

(sigue a la vuelta)

Reserva 1 - 2011

Propuesta A

1A) a) Una función $y=f(x)$ es continua en $x=a \in Dom(f)$ sii $\exists \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

b) Continuidad en $x=3$: ¿ $\lim_{x\to 3} f(x) = f(3)$?

$$\lim_{x\to 3} f(x) \begin{cases} \lim_{x\to 3-} ax^2 = 9a \ (=f(3)) \\ \lim_{x\to 3+} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 3+} \dfrac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}+2)(x-3)} = \end{cases}$$

$$= \lim_{x\to 3+} \frac{x+1-4}{(\sqrt{x+1}+2)(x-3)} = \lim_{x\to 3+} \frac{\cancel{x-3}}{(\sqrt{x+1}+2)\cancel{(x-3)}} = \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{4}$$

(también se puede calcular aplicando la regla de L'Hôpital)

$$\Rightarrow 9a = \frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{36}}$$

Derivabilidad en $x=3$ (para $a=\frac{1}{36}$) ¿ $\exists f'(3)$?

$$f'(3) \begin{cases} \left(\frac{1}{36}x^2\right)' = 2\frac{1}{36}x = \frac{1}{18}x \longrightarrow f'(3-) = \frac{1}{18}\cdot 3 = \frac{1}{6} \\ \left(\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}\right)' = \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\cdot(x-3) - (\sqrt{x+1}-2)}{(x-3)^2} \longrightarrow f'(3+) = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \dfrac{-1}{64} \end{cases}$$

aplicando 2 veces L'Hôpital

$\Rightarrow$ f no es derivable en $x=3$ para $a=\frac{1}{36}$

1B) a) $$\int \frac{1+8x}{1+x^2}\,dx = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx + 8\int \frac{x}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \operatorname{arctg} x + 8\cdot\frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \boxed{\operatorname{arctg} x + 4\ln|1+x^2| + C}$$

b) $$\int (x^2+x)\cos x\,dx = \begin{bmatrix} u = x^2+x \longrightarrow du = (2x+1)\,dx \\ dv = \cos x\,dx \longrightarrow v = \operatorname{sen} x \end{bmatrix} =$$

$$= (x^2+x)\operatorname{sen} x - \int (2x+1)\operatorname{sen} x\,dx = (x^2+x)\operatorname{sen} x - \left[-(2x+1)\cos x + 2\operatorname{sen} x\right] =$$

$$= (x^2+x)\operatorname{sen} x + (2x+1)\cos x - 2\operatorname{sen} x = \boxed{(x^2+x-2)\operatorname{sen} x + (2x+1)\cos x + C}$$

$$\int (2x+1)\operatorname{sen} x\,dx = \begin{bmatrix} u = 2x+1 \longrightarrow du = 2\,dx \\ dv = \operatorname{sen} x\,dx \longrightarrow v = -\cos x \end{bmatrix} = -(2x+1)\cos x - \int (-\cos x)\,2\,dx =$$

$$= -(2x+1)\cos x + 2\operatorname{sen} x$$

3A) Sean x, y, z los tres números por orden (primero, segundo y tercero resp.)

a) $\left.\begin{array}{l} x+y=z \\ 3x-2y=z \\ 2x-\frac{1}{2}y=z \\ 2x-y+1=z \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x+y-z=0 \\ 3x-2y-z=0 \\ 4x-y-2z=0 \\ 2x-y-z=-1 \end{array}\right\}$ Sistema de ecuaciones 4x3

Clasificación (método de Gauss)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{-4F_1+F_3 \\ -2F_1+F_4}]{-3F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_2+F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_2:(-5)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{3F_2+F_4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/5 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} [1] \\ [2] \\ \\ [4] \end{array}$$

$\Rightarrow$ rango M = rango $\widetilde{M} = 3 =$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado.

b) De [4]: $-\frac{1}{5}z=-1 \Rightarrow z=5$

Sustituimos en [2]: $y-\frac{2}{5}z=0 \Rightarrow y=\frac{2}{5}\cdot 5=2$

Sustituimos en [1]: $x+y-z=0 \Rightarrow x=-y+z=-2+5=3$

Solución: $\boxed{(x,y,z)=(3,2,5)}$

4A) a) $\left.\begin{array}{l} \vec{u}_r=(-a,1,2) \\ \vec{u}_s=(1,-1,2) \end{array}\right\}$ $r \perp s \Leftrightarrow \vec{u}_r \perp \vec{u}_s \Leftrightarrow \vec{u}_r \cdot \vec{u}_s = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (-a,1,2)\cdot(1,-1,2)=0 \Leftrightarrow -a-1+4=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boxed{a=3}$

Para calcular b imponemos que las rectas se cortan en un punto:

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x=1-3t \\ y=b+t \\ z=2t \end{cases} \\ s \equiv \begin{cases} x=2+\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=-6+2\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 1-3t=2+\lambda \\ b+t=2-\lambda \\ 2t=-6+2\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lambda+3t=-1 \\ \lambda+t+b=2 \\ 2\lambda-2t=6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lambda+3t=-1 \\ -\lambda+t=-3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 4t=-4 \Rightarrow t=-1 \Rightarrow \lambda=2$ y por tanto $\boxed{b=1}$

b) El punto de corte es $P \begin{cases} x=1-3\cdot(-1) \\ y=1-1 \\ z=2\cdot(-1) \end{cases} \Rightarrow \boxed{P(4,0,-2)}$

PROPUESTA B

1B. Calcula los siguientes límites

a) $\lim\limits_{x\to 1^+} \left(\dfrac{2x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x-1}}$ (1,25 puntos)

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen\, x - x\cos x}{2x^3}$ (1,25 puntos)

2B. a) Representa gráficamente la región limitada por las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$, el eje de abscisas y la recta $x = e$. (0,5 puntos)

b) Calcula el área de dicha región. (2 puntos)

3B. Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$. Demuestra que el rango de la matriz $A \cdot A^t$ es siempre igual al rango de la matriz $A^t \cdot A$, cualquiera que sea el valor de k. (Recuerda que A^t representa la matriz transpuesta de la matriz A) (2,5 puntos)

4B. a) Dada la recta $r \equiv \left\{ \begin{array}{rcr} x+y+z & = & 0 \\ 2y-z & = & -1 \end{array} \right.$ y el punto $P(0,1,0)$, obtén las ecuaciones paramétricas de una recta r' que pase por el punto P y corte perpendicularmente a r. (1,25 puntos)

b) Encuentra las coordenadas del punto P' simétrico de P respecto de la recta r. (1,25 puntos)

Propuesta B

1A) a) $\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x-1}} = [1^\infty] = \boxed{e^{1/3}}$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}\left(\frac{2x+1}{x+2}-1\right) = \lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}\left(\frac{2x+1-x-2}{x+2}\right) = \lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}\cdot\frac{x-1}{x+2} =$$

$$= \lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x+2} = \frac{1}{3}$$

También se puede calcular aplicando L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x-1}} = [1^\infty] = e^{\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}\ln\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)} = e^{1/3}$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}\ln\left(\frac{2x+1}{x+2}\right) = \lim_{x\to 1^+}\frac{\ln\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)}{x-1} = \left[\frac{0}{0}\right] \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{2(x+2)-(2x+1)}{(x+2)^2}}{1} =$$

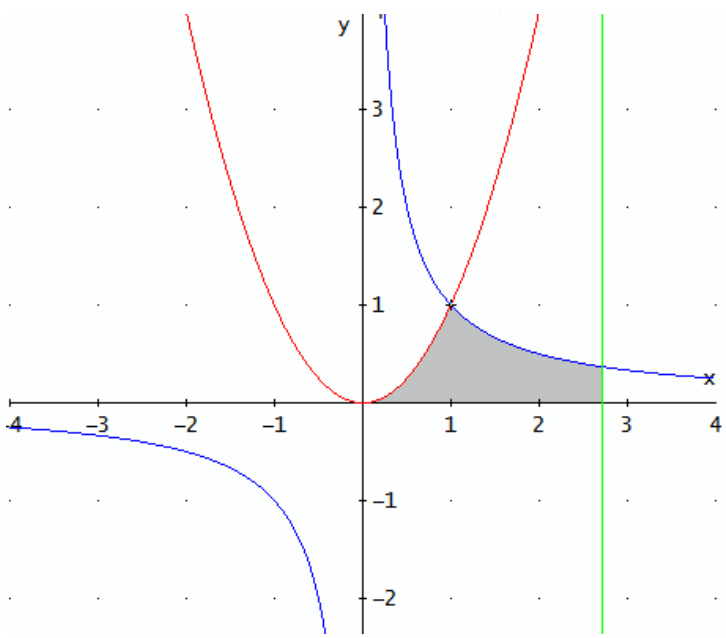
$$= \lim_{x\to 1^+}\frac{2(x+2)-(2x+1)}{(x+2)^2} = \lim_{x\to 1^+}\frac{2x+4-2x-1}{(x+2)^2} = \lim_{x\to 1^+}\frac{3}{(x+2)^2} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

b) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}x - x\cos x}{x^3}\right) = \left[\frac{0}{0}\right] \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - (\cos x - x\operatorname{sen}x)}{3x^2} =$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - \cos x + x\operatorname{sen}x}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x\operatorname{sen}x}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{3x} = \left[\frac{0}{0}\right] \underset{\text{L'Hôpital}}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{3} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

1B) a)



$f(x) = x^2$

Vértice: $V(0,0)$

Tabla:

x	1	-1	-2	2
y	1	+1	4	4

$g(x) = \frac{1}{x}$

Tabla:

x	1	10	0,1	-10	-0,1
y	1	0,1	10	-0,1	-10

Punto de corte de $f(x)$ y $g(x)$:

$$x^2 = \frac{1}{x} \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{1} = 1$$

Área

$$A = \int_0^1 x^2\,dx + \int_1^e \frac{1}{x}\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + \ln|x|\Big|_1^e = \left(\frac{1}{3} - 0\right) + \left(\ln e - \ln 1\right) =$$

$$= \frac{1}{3} + 1 = \boxed{\frac{4}{3}u^2}$$

3B) $AA^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \\ k & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+k^2 & k \\ k & k^2+1 \end{pmatrix}$

$$|AA^t| = (1+k^2)(k^2+1) - k^2 = k^4 + k^2 + 1$$

$$A^tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \\ k & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & k^2 & k \\ k & k & k^2+1 \end{pmatrix}$$

$$|A^tA| = k^2(k^2+1) - k^4 - k^2 = 0$$

$$k^4 + k^2 + 1 = 0$$

$$t = k^2$$

$$t^2 + t + 1 = 0$$

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} \notin \mathbb{R}$$

Si $\boxed{k = 0} \Rightarrow \begin{cases} \text{rango } AA^t = 2 \\ \text{rango } A^tA = 2 \end{cases}$

Si $\boxed{k \neq 0} \Rightarrow \begin{cases} \text{rango } AA^t = 2 \\ \text{rango } A^tA = 2 \end{cases}$

Por tanto, rango (AA^t) = rango (A^tA) $\forall k \in \mathbb{R}$

4B) a) El vector $\overrightarrow{PR}$ es perpendicular a $\vec{u}_r$, donde $R \in r$. Por tanto, la recta que nos piden está determinada por P y $\overrightarrow{PR}$.

$$z = 1 + 2y \Rightarrow x + y + 1 + 2y = 0 \Rightarrow x = -1 - 3y \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -1 - 3\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R(-1-3\lambda, \lambda, 1+2\lambda)$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PR} = (-1-3\lambda, \lambda-1, 1+2\lambda) \\ \overrightarrow{PR} \perp \vec{u}_r \end{array}\right\} \overrightarrow{PR} \cdot \vec{u}_r = 0 \Leftrightarrow 4 + 14\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{2}{7}$$

$$\overrightarrow{PR} = \left(-1-3\cdot\left(-\frac{2}{7}\right), -\frac{2}{7}-1, 1+2\cdot\left(-\frac{2}{7}\right)\right) = \left(+\frac{1}{7}, -\frac{9}{7}, \frac{3}{7}\right)$$

$$\boxed{r' \equiv \begin{cases} x = +\frac{1}{7}\mu \\ y = 1 - \frac{9}{7}\mu \\ z = \frac{3}{7}\mu \end{cases}}$$

b) $\vec{u}_r = (-3, 1, 2)$

Calculamos un plano π t.q. $\begin{cases} P \in \pi \\ \pi \perp r \end{cases}$

$$\pi \equiv (x+0, y-1, z+0)\cdot(-3, 1, 2) = 0$$

$$-3x + y + 2z - 1 = 0 \equiv \pi$$

Obtenemos el punto de intersección de r y π:

$$r \cap \pi = \{M\} \quad \left.\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2y - z = -1 \\ -3x + y + 2z = 1 \end{cases}\right\} \Rightarrow (x, y, z) = \left(-\frac{1}{7}, \frac{-2}{7}, \frac{3}{7}\right) \equiv M$$

Hallamos por último P', simétrico de P respecto de r:

$$\left(-\frac{1}{7}, \frac{-2}{7}, \frac{3}{7}\right) = \left(\frac{0+P_1'}{2}, \frac{1+P_2'}{2}, \frac{0+P_3'}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} -\frac{1}{7} = \frac{P_1'}{2} \Rightarrow P_1' = -\frac{2}{7} \\ -\frac{2}{7} = \frac{1+P_2'}{2} \Rightarrow P_2' = \frac{-11}{7} \\ \frac{3}{7} = \frac{P_3'}{2} \Rightarrow P_3' = \frac{6}{7} \end{cases}\right\} \Rightarrow \boxed{P'\left(-\frac{2}{7}, \frac{-11}{7}, \frac{6}{7}\right)}$$

Reserva 2 de 2011

Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado.

Bachillerato L. O. E.

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Puedes utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.

PROPUESTA A

1A. Determina el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$, de forma que el área del triángulo de vértices $A(0,0)$, $B(0,a)$ y $C(\frac{a}{a-1},0)$ sea mínima. (2,5 puntos)

2A. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int x \ln(x)\, dx$. (Indicación: $\ln(x)$ representa el logaritmo neperiano de x). (1,25 puntos)

b) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\, dx$. (1,25 puntos)

3A. a) Despeja X de la ecuación matricial $X \cdot B - I = X \cdot A + A$, donde X, B, A e I son matrices de tipo 3×3. (1,25 puntos)

b) Calcula la matriz X de tamaño 3×3, solución de la ecuación, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. (1,25 puntos)

4A. a) Analiza, en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$, la posición relativa de los planos $\pi_1 \equiv 2x - y + z = 0$, $\pi_2 \equiv y + z = m$ y $\pi_3 \equiv mx + y - z = 8$. (1,25 puntos)

b) Razona que, independientemente del valor del parámetro m, los planos π_2 y π_3 son perpendiculares. (1,25 puntos)

(sigue a la vuelta)

Reserva 2 - 2011

Propuesta A

1A) $A_{\text{triángulo}} = \frac{1}{2}\left|\vec{AB}\times\vec{AC}\right|$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{AB} = (0,a)-(0,0) = (0,a)\\ \vec{AC} = \left(\frac{a}{a-1},0\right)-(0,0) = \left(\frac{a}{a-1},0\right)\end{array}\right\}\ \vec{AB}\times\vec{AC} = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & a & 0\\ \frac{a}{a-1} & 0 & 0\end{vmatrix} = -\frac{a^2}{a-1}\vec{k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\vec{AB}\times\vec{AC}\right| = \sqrt{\left(-\frac{a^2}{a-1}\right)^2} = \frac{a^2}{a-1}$$

$$S = A_{\text{triángulo}} = \frac{1}{2}\,\frac{a^2}{a-1} = S(a)$$

$$S'(a) = \frac{1}{2}\,\frac{2a(a-1)-a^2}{(a-1)^2} = \frac{1}{2}\,\frac{a^2-2a}{(a-1)^2}$$

$$S''(a) = \frac{1}{2}\,\frac{(2a-2)(a-1)^2-2(a^2-2a)(a-1)}{(a-1)^4}$$

$$S'(a) = 0 \iff a^2-2a = 0 \iff a = \begin{cases}0 & \text{No es solución}\\ 2\end{cases}$$

$S''(2) = 1 > 0 \Rightarrow \boxed{a=2}$ en un mínimo relativo

1B) a) $\int x\ln x\,dx = \left[\begin{array}{ll} u = \ln x \longrightarrow & du = \frac{1}{x}dx\\ dv = x\,dx \longrightarrow & v = \frac{x^2}{2}\end{array}\right] = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\,\frac{1}{x}\,dx =$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\,\frac{x^2}{2} = \boxed{\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C}$$

b) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx = \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{x} \longrightarrow t^2 = x\\ \qquad\qquad\quad dx = 2t\,dt\end{array}\right] = \int \frac{t}{1+t}\,2t\,dt = 2\int \frac{t^2}{1+t}\,dt =$

$$= 2\left(\int (t-1)\,dt + \int \frac{1}{t+1}\,dt\right) = 2\left(\frac{t^2}{2} - t + \ln|t+1|\right) =$$

$$= \boxed{2\left(\frac{x}{2} - \sqrt{x} + \ln\left|\sqrt{x}+1\right|\right) + C}$$

$$\begin{array}{r|l} t^2 & t+1\\ \hline -t^2-t & t-1\\ \hline -t & \\ t+1 & \\ \hline 1 & \end{array} \qquad \frac{t^2}{t+1} = t-1+\frac{1}{t+1}$$

3A) a) $XB - XA = A + I \Rightarrow X(B-A) = A + I \Rightarrow$

$\Rightarrow X(B-A)(B-A)^{-1} = (A+I)(B-A)^{-1} \Rightarrow \boxed{X = (A+I)(B-A)^{-1}}$

b) Cálculo de B-A

$$B - A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cálculo de $(B-A)^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_3+F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{F_3+F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow (B-A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cálculo de A+I

$$A + I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Cálculo de X

$$\boxed{X} = (A+I)(B-A)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

4A) a) $\begin{cases} \pi_1 \equiv 2x - y + z = 0 \\ \pi_2 \equiv \quad y + z = m \\ \pi_3 \equiv mx + y - z = 8 \end{cases}$ $\quad M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ m & 1 & -1 \end{pmatrix}, \ \tilde{M} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & m \\ m & 1 & -1 & 8 \end{pmatrix}$

$|M| = -2 - m - 2 = -m - 4 = 0 \Rightarrow m = -4$

Si $\boxed{m \neq -4} \Rightarrow$ rango $M = 3 =$ rango $\tilde{M} =$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ sistema compatible determinado $\Rightarrow$ los tres planos se cortan en un punto

Si $\boxed{m = -4}$ $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ -4 & 1 & -1 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{2F_1+F_4} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2+F_3}$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow 0z = 4 \Rightarrow z = \frac{4}{0} \Bigg\} \text{ Sistema incompatible}$$

π_1 y π_2 no son paralelos ya que $\frac{2}{0} \neq \frac{-1}{1}$

π_1 y π_3 " " " ya que $\frac{2}{4} \neq \frac{-1}{1}$

π_2 y π_3 " " " ya que $\frac{0}{4} \neq \frac{1}{1}$

Por tanto, <u>los tres planos se cortan dos a dos según tres rectas.</u>

PROPUESTA B

1B. Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2}{2-x}$, se pide:

a) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. (1,25 puntos)

b) Asíntotas verticales y oblícuas. (1,25 puntos)

2B. a) Representa gráficamente la región encerrada por las gráficas de las funciones $f(x) = x^2 - 2x - 2$ y $g(x) = -x^2 + 2x - 2$. (0,5 puntos)

b) Calcula el área de dicha región. (2 puntos)

3B. a) Enuncia el teorema de Rouché-Fröbenius. (0,5 puntos)

b) Considera el sistema $A \cdot X = B$, donde A es una matriz 3×4 , $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ y B es una matriz con una sola columna. ¿De qué dimensiones es la matriz B? (0,50 puntos)

c) ¿Puede el sistema ser compatible determinado? (0,75 puntos)

d) Si el sistema es incompatible y el rango de la matriz A es dos, ¿cuál es el rango de la matriz ampliada $(A|B)$? (0,75 puntos)

4B. Dados los puntos $P(1,1,2)$ y $Q(1,1,0)$, y la recta $r \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y & = & 1 \\ y + z & = & 0 \end{array} \right.$, se pide:

a) Ecuación general del plano π que contiene al punto P y a la recta r. (1,25 punto)

b) Halla la distancia desde el punto medio de los puntos P y Q al plano π calculado en el apartado anterior. (1,25 puntos)

Propuesta B

1A) $f(x) = \dfrac{x^2}{2-x}$ (Cuidado que el dominio es $\mathbb{R} - \{2\}$)

a) $f'(x) = \dfrac{2x(2-x) - x^2(-1)}{(2-x)^2} = \dfrac{4x - 2x^2 + x^2}{(2-x)^2} = \dfrac{4x - x^2}{(2-x)^2}$

$f'(x) > 0 \Rightarrow \dfrac{4x - x^2}{(2-x)^2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} 4x - x^2 \\ (2-x)^2 > 0 \end{cases}$ Siempre $(\forall x \in \mathbb{R})$

$4x - x^2 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ 4 \end{cases}$

$- \quad + \quad + \quad -$

$\searrow \; 0 \; \nearrow \; 2 \; \nearrow \; 4 \; \searrow$

$\boxed{f \text{ es } \begin{cases} \text{creciente en } (0,4) - \{2\} \\ \text{decreciente en } (-\infty, 0) \cup (4, +\infty) \end{cases}}$

b) Asíntotas verticales: ¿$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \pm\infty$?

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2}{2-x} = +\infty \Rightarrow \boxed{x = 2 \text{ es una asíntota vertical}}$

Asíntotas oblicuas

$m = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{\frac{x^2}{2-x}}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2}{2x - x^2} = -1$

$n = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - m_1 x \right) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\dfrac{x^2}{2-x} + x \right) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\dfrac{x^2 + 2x - x^2}{2-x} \right) =$

$= \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2x}{2-x} = -2$

La recta $\boxed{y = -x - 2 \text{ es una asíntota oblicua}}$

¡¡OJO!! El haber puesto $\pm\infty$ en los límites ha sido después de asegurarme de que los límites no dependían de que fuese $+\infty$ o $-\infty$. Si no estamos seguros, primero hay que hacerlo con $+\infty$ y luego con $-\infty$, porque hay funciones que tienen 2 asíntotas oblicuas.

1B) a) $f(x) = x^2 - 2x - 2$

Vértice: $\left.\begin{array}{l} x_V = \dfrac{2}{2} = 1 \\ y_V = 1^2 - 2 - 2 = -3 \end{array}\right\} V(1, -3)$

Puntos de corte con OX: $x^2 - 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} \dfrac{2 + \sqrt{12}}{2} \simeq 2{,}7 \\ \dfrac{2 - \sqrt{12}}{2} \simeq -0{,}7 \end{cases}$

$g(x) = -x^2 + 2x - 2$

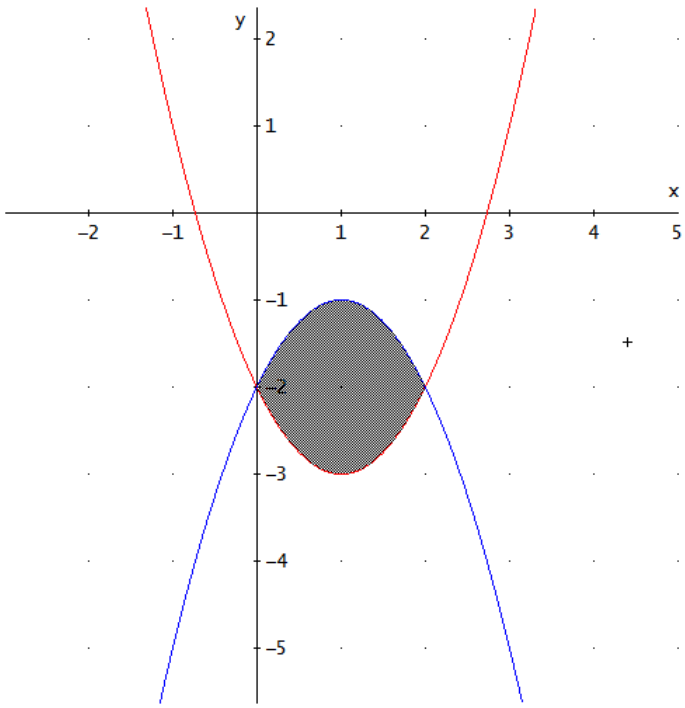
Vértice: $x_v = \frac{-2}{2\cdot(-1)} = 1$

$y_v = -1^2 + 2 - 2 = -1$ $\Big\}$ $V(1,-1)$

No corta al eje OX

Tabla

x	0	2
y	-2	-2



b) Puntos de corte de $f(x)$ y $g(x)$

$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 - 2x - 2 = -x^2 + 2x - 2 \Rightarrow 2x^2 - 4x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2(x-2) = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases}$

Área

$$\boxed{A} = \int_0^2 (g(x) - f(x))\,dx = \int_0^2 \left((-x^2+2x-2) - (x^2-2x-2)\right) dx = \int_0^2 (-2x^2+4x)\,dx =$$

$$= -\frac{2x^3}{3} + \frac{4x^2}{2}\Big|_0^2 = \frac{-2\cdot 8}{3} + \frac{4\cdot 4}{2} = \boxed{\frac{8}{3}u^2}$$

3A) a) Teorema de Rouché-Fröbenius

Un sistema de ecuaciones lineales $AX=B$ es compatible si, y solo si, el rango de la matriz de los coeficientes, A, es igual al rango de la matriz ampliada, $(A|B)$.

b) $A_{3\times4} X_{4\times1} = B$ $\boxed{\text{La dimensión de B es } 3\times1}$

c) No, ya que solo hay 3 ecuaciones y 4 incógnitas.

d) En principio tenemos dos posibilidades: 1 y 3

Sin embargo, como el rango de la matriz ampliada nunca puede ser menor que el rango de la matriz de coeficientes, el $\boxed{\text{rango de } (A|B) \text{ es tres.}}$

4A) a) π t.q. $\begin{cases} P \in \pi \\ r \subset \pi \end{cases}$

π está determinado por $\begin{cases} P(1,1,2) \\ \vec{u}_r = \text{vector director de } r \\ \overrightarrow{PR} \text{ donde } R \in r \end{cases}$ (tomaremos $R(1,0,0)$)

$$\vec{u}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + \vec{k} - \vec{j} = (2,-1,1)$$

$$\overrightarrow{PR} = (1,0,0) - (1,1,2) = (0,-1,-2)$$

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & 2 & 0 \\ y-1 & -1 & -1 \\ z-2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \iff \boxed{3x + 4y - 2z - 3 = 0 \equiv \pi}$$

b) Llamamos M al punto medio de P y Q.

$$\left.\begin{aligned} x_M &= \frac{1+1}{2} = 1 \\ y_M &= \frac{1+1}{2} = 1 \\ z_M &= \frac{2+0}{2} = 1 \end{aligned}\right\} M(1,1,1)$$

$$\boxed{d(M,\pi) = \frac{|3\cdot 1 + 4\cdot 1 - 2\cdot 1 - 3|}{\sqrt{3^2+4^2+(-2)^2}} = \frac{2}{\sqrt{29}} = \frac{2\sqrt{29}}{29}\ u}$$