Junio 2012

UCLM
UNIVERSIDAD DE CASTILLA-LA MANCHA

Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado.

Bachillerato L. O. E.

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Puedes utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.

PROPUESTA A

1A. Dada la función

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c,$$

calcula los parámetros $a, b, c \in \mathbb{R}$ sabiendo que:

- la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = -1$ tiene pendiente -3
- $f(x)$ tiene un punto de inflexión de coordenadas $(1, 2)$.

(2,5 puntos)

2A. a) Esboza la región encerrada entre la parábola $f(x) = x^2 - 1$ y la recta $g(x) = 5 - x$. **(0,5 puntos)**
b) Calcula el área de la región anterior. **(2 puntos)**

3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \\ mx & + & (m+1)y & + & (m-1)z & = & m-2 \\ 3x & + & (m+3)y & + & 4z & = & m-2 \end{array}\right. \qquad \textbf{(1,5 puntos)}$$

b) Calcula la solución cuando el sistema sea compatible determinado. **(1 punto)**

4A. a) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de intersección del plano $\pi \equiv x - y + 3z = -3$ con los ejes de coordenadas. **(1,25 puntos)**
b) Si llamamos A, B y C a los vértices del triángulo del apartado anterior, encuentra el valor del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ para que el tetraedro de vértices A, B, C y $D(-\lambda^2, 2 + \lambda, -3)$ tenga volumen mínimo. **(1,25 puntos)**

(sigue a la vuelta)

Junio 2012

Propuesta A

1A $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

- $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

  $f'(-1) = 3 - 2a + b = -3 \Rightarrow \boxed{-2a + b = -6}$

- $f''(x) = 6x + 2a$

  $f''(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{-2a}{6} = -\frac{1}{3}a = 1 \Rightarrow \boxed{a = -3}$

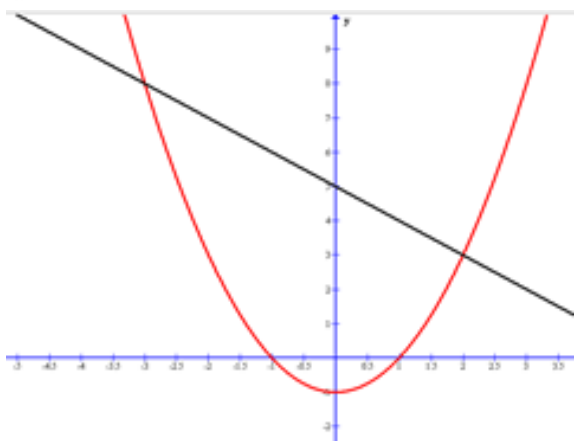
- $\left.\begin{cases} -2a + b = -6 \\ a = -3 \end{cases}\right\} \Rightarrow \boxed{b = -12}$

- Como $(1, 2)$ pertenece a la gráfica de f, $f(1) = 2 \Rightarrow$

  $\Rightarrow 1^3 - 3 \cdot 1^2 + (-12) \cdot 1 + c = 2 \Rightarrow \boxed{c = 16}$

- Así, $\boxed{f(x) = x^3 - 3x^2 - 12x + 16}$

2A a)



$f(x) = x^2 - 1$

- Vértice:

  $x_v = -\frac{b}{2a} = 0$

  $y_v = -1$

  $V(0, -1)$

- Puntos de corte con OX

  $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

  $\Rightarrow (-1, 0)$ y $(1, 0)$

$g(x) = 5 - x$

x	y
0	5
1	4

b) Puntos de corte entre las funciones

$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 - 1 = 5 - x \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}$

Área

$$\boxed{A} = \int_{-3}^{2} [g(x) - f(x)]\,dx = \int_{-3}^{2} (5 - x - x^2 + 1)\,dx = \int_{-3}^{2} (6 - x - x^2)\,dx =$$

$$= 6x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \Big]_{-3}^{2} = 6 \cdot 2 - \frac{2^2}{2} - \frac{2^3}{3} - \left(6 \cdot (-3) - \frac{(-3)^2}{2} - \frac{(-3)^3}{3}\right) =$$

$$= \frac{22}{3} - \left(-\frac{27}{2}\right) = \boxed{\frac{125}{6}\ u^2}$$

3A

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y+3z=0 \\ mx+(m+1)y+(m-1)z=m-2 \\ 3x+(m+3)y+4z=m-2 \end{cases}$$

a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ m & m+1 & m-1 & m-2 \\ 3 & m+3 & 4 & m-2 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{-mF_1+F_3 \\ -3F_1+F_4}]{-F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & m-2 \\ 0 & m & +1 & m-2 \end{array}\right) \xrightarrow[-mF_2+F_4]{-F_2+F_3}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & m-2 \\ 0 & 0 & 1-2m & m-2 \end{array}\right) \xrightarrow{(1-2m)F_3+3F_4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & m-2 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3}m^2+\frac{8}{3}m-\frac{8}{3} \end{array}\right) [4]$$

De [4]: $-2m^2+8m-8=0 \Rightarrow m=2$

Discusión:

Si $m \neq 2 \Rightarrow$ rango$(A)=3<4=$ rango$(A|B) \Rightarrow$ Sistema incompatible

Si $m=2 \Rightarrow$ rango$(A)=3=$ rango$(A|B)=$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ S.C.D.

b) $m=2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Sistema homogéneo $\Rightarrow$ $\boxed{(x,y,z)=(0,0,0) \text{ Solución trivial}}$

4A a) Puntos de corte con los ejes:

$$OX \equiv \begin{cases} x=\mu \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \mu-0+3\cdot 0=-3 \Rightarrow \mu=-3 \Rightarrow A \begin{cases} x=-3 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow A(-3,0,0)$$

$$OY \equiv \begin{cases} x=0 \\ y=\alpha \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow 0-\alpha+3\cdot 0=-3 \Rightarrow \alpha=3 \Rightarrow B \begin{cases} x=0 \\ y=3 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow B(0,3,0)$$

$$OZ \equiv \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow 0-0+3\lambda=-3 \Rightarrow \lambda=-1 \Rightarrow C \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=-1 \end{cases}$$

Área

$$A = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$$

$$\overrightarrow{AB} = (0,3,0)-(-3,0,0) = (3,3,0)$$

$$\overrightarrow{AC} = (0,0,-1)-(-3,0,0) = (-3,0,-1)$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -3\vec{i}+9\vec{k}+3\vec{j} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = (-3,9,3)$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-3)^2+9^2+3^2} = \sqrt{99} = 3\sqrt{11}$$

$$A = \frac{1}{2}3\sqrt{11} = \boxed{\frac{3\sqrt{11}}{2}\,u^2}$$

b) $V_{tetraedro} = \frac{1}{6}\left|\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})\right|$

$$\overrightarrow{AD} = (-\beta^2, 2+\beta, 3)-(-3,0,0) = (3-\beta^2, 2+\beta, 3)$$

$$V_{tetraedro} = \frac{1}{6}\left|\det\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \\ 3-\beta^2 & 2+\beta & 3 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{6}\left|-3(3-\beta^2)+3(2+\beta)+27\right| =$$

$$= \frac{1}{6}\left|-9+3\beta^2+6+3\beta+27\right| = \frac{1}{6}\left|3\beta^2+3\beta+24\right|$$

$3\beta^2+3\beta+24=0$ no tiene soluciones reales

y para $\beta=0 \Rightarrow 24>0$

$$\Rightarrow \frac{1}{6}(3\beta^2+3\beta+24)$$

Hay que minimizar $f(\beta) = \frac{1}{2}\beta^2+\frac{1}{2}\beta+4$

$$f'(\beta) = \frac{1}{2}2\beta+\frac{1}{2}$$

$$f'(\beta)=0 \Rightarrow \beta+\frac{1}{2}=0 \Rightarrow \beta=-\frac{1}{2}$$

$$f''(\beta)=1$$

$f''(-\frac{1}{2})>0 \Rightarrow \beta=-\frac{1}{2}$ es un mínimo (relativo)

$\boxed{\text{El volumen del tetraedro es mínimo para } \beta=-\frac{1}{2}}$

(donde $\beta=\lambda$)

PROPUESTA B

1B. La concentración (en %) de nitrógeno de un compuesto viene dada, en función del tiempo $t \in [0, +\infty)$ medido en segundos, por la función

$$N(t) = \frac{60}{1 + 2e^{-t}}$$

a) Comprueba que la concentración de nitrógeno crece con el tiempo. ¿Para qué $t \in [0, +\infty)$ la concentración de nitrógeno es mínima y cuál es esta concentración? **(1,25 puntos)**

b) ¿A qué valor tiende la concentración de nitrógeno cuando el tiempo tiende a infinito? **(1,25 puntos)**

2B. Calcula las siguientes integrales:

$$\int \frac{1}{4 + 9x^2}\, dx \qquad \int \left(\tan x + \frac{1}{\tan x}\right) dx$$

(1,25 puntos por integral)

3B. a) Sean A y B matrices cuadradas de orden $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, tales que B es la inversa de A:

- Si $|A| = 3$, razona cuánto vale $|B|$.
- ¿Cuál es el rango de B?

(0,75 puntos)

b) Calcula el determinante de la matriz cuadrada X de orden 3 que verifica

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 0 & 10 & -3 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

(1,75 puntos)

4B. Dados el plano $\pi \equiv 2x - z = 6$ y la recta

$$r \equiv \begin{cases} y + z = 0 \\ x - y + az = 4 \end{cases}$$

a) Encuentra el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que π y r sean paralelos. **(1,25 puntos)**

b) Para el valor de a del apartado anterior, da la ecuación general del plano π' que contiene a r y es perpendicular a π. **(1,25 puntos)**

Propuesta B

1B a) $N(t) = \dfrac{60}{1+2e^{-t}} \qquad t \in [0, +\infty)$

$$N'(t) = \frac{-60(-2e^{-t})}{(1+2e^{-t})^2} = \frac{120e^{-t}}{(1+2e^{-t})^2}$$

$N'(t) = 0 \Rightarrow 120e^{-t} = 0 \Rightarrow e^{-t} = 0$ y $\nexists t \in [0, +\infty)$ t.q. $e^{-t} = 0$

Así, la concentración es mínima para $t = 0$ (ya que $N'(t) > 0 \ \forall t \in [0, +\infty)$) y dicha concentración es del $N(0) = \dfrac{60}{1+2} = 20\,\%$

b) $\lim\limits_{t \to +\infty} N(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{60}{1+2e^{-t}} = 60$ ya que $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-t} = 0$

La concentración de nitrógeno tiende al 60%.

2B a) $\displaystyle\int \frac{1}{4+9x^2}\,dx = \int \frac{1}{4\left(1+\frac{9}{4}x^2\right)}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+\left(\frac{3}{2}x\right)^2}\,dx =$

$$= \frac{1}{4}\frac{2}{3}\int \frac{\frac{3}{2}}{1+\left(\frac{3}{2}x\right)^2}\,dx = \frac{1}{6}\operatorname{arctg}\left(\frac{3}{2}x\right) + C$$

b) $\displaystyle\int \left(\operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x}\right)dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx + \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\,dx = -\log(\cos x) + \log(\operatorname{sen} x) + C$

donde log es el logaritmo natural.

3B a) Como $B = A^{-1}$ se tiene que $AB = I \Rightarrow |AB| = |I| \Rightarrow$

$\Rightarrow |A|\,|B| = 1 \Rightarrow |B| = \dfrac{1}{|A|} = \dfrac{1}{3}$

Por otra parte, como $|A| = 3 \neq 0$ y $|B| \neq 0 \Rightarrow$ rango(A) = rango$(B) = n \in \mathbb{N}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 0 & 10 & -3 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 0 & 10 & -3 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

Calculamos la inversa

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2:10} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3/10 & 0 & 1/10 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-7F_2+F_3}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3/10 & 0 & -7/10 & 0 \\ 0 & 0 & 21/10 & 0 & -7/10 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{10}{21}F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3/10 & 0 & 1/10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/3 & 10/21 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{3}{10}F_3+F_2}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/3 & 10/21 \end{array}\right) \xrightarrow{-8F_3+F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 8/3 & -80/21 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/3 & 10/21 \end{array}\right) \xrightarrow{2F_2+F_1}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 8/3 & -74/21 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/3 & 10/21 \end{array}\right)$$

Cálculo de X

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 1 & 8/3 & -74/21 \\ 0 & 0 & 1/7 \\ 0 & -1/3 & 10/21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -74/3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 10/3 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{|X| = \det \begin{pmatrix} 1 & 8 & -74/3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 10/3 \end{pmatrix} = 1}$$

4B) a) Para que $\pi \parallel r$, el vector normal de π y el vector director de r tienen que ser perpendiculares: $\vec{n}_\pi \perp \vec{u}_r \Leftrightarrow \vec{n}_\pi \cdot \vec{u}_r = 0$

$$y = -z \Rightarrow x + z + az = 4 \Rightarrow x + z(1+a) = 4 \Rightarrow x = 4 - (1+a)z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 4 - (1+a)\lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \vec{u}_r = (-1-a, -1, 1)$$

$$\begin{cases} \vec{n}_\pi = (2, 0, -1) \\ \vec{u}_r = (-1-a, -1, 1) \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_\pi \cdot \vec{u}_r = -2 - 2a - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{a = -\frac{3}{2}}$$

b) $\pi' \begin{cases} \vec{u_r} \\ \vec{n_\pi} \\ \vec{RG} \end{cases}$ donde $R \in r$ cualquiera y G un punto de π'

$\vec{RG} = (x, y, z) - (4, 0, 0) = (x-4, y, z)$

$$\pi' \equiv \begin{vmatrix} x-4 & y & z \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -y - 4z - 2(x-4) - 4y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2(x-4) - 5y - 4z = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi' \equiv 2x + 5y + 4z - 8 = 0}$$

Septiembre 2012

Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado.

Bachillerato L. O. E.

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Puedes utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.

PROPUESTA A

1A. a) Enuncia el Teorema de Bolzano y el Teorema de Rolle. **(1 punto)**

b) Demuestra, usando el Teorema de Bolzano, que existen al menos tres raíces reales distintas de la ecuación

$$x^5 - 5x + 3 = 0 \qquad \textbf{(1 punto)}$$

c) Demuestra, usando el Teorema de Rolle, que la ecuación anterior no puede tener más de tres raíces reales distintas. **(0,5 puntos)**

2A. Calcula las siguientes integrales:

$$\int \operatorname{sen}^2 x \ \cos x \ dx \qquad \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \ dx \qquad \textbf{(1,25 puntos por integral)}$$

3A. Sabiendo que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5,$$

calcula el valor de los determinantes

$$\begin{vmatrix} b & b+a & 2c \\ e & e+d & 2f \\ h & h+g & 2i \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a+d+g & b+e+h & c+f+i \\ d+g & e+h & f+i \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

indicando las propiedades que usas en cada caso para justificar tu respuesta.
(1,25 puntos por determinante)

4A. Dado el plano $\pi \equiv x + y + 2z = 7$ y el punto $P(1, 0, 0)$:

a) Calcula el punto Q de π que hace mínima la distancia a P. **(1,25 puntos)**

b) Calcula el punto simétrico P' de P respecto del plano π. **(1,25 puntos)**

(sigue a la vuelta)

Septiembre 2012

Propuesta A

1A.- a) Enuncia el Teorema de Bolzano y el Teorema de Rolle **(1 punto)**
b) Demuestra, usando el teorema de Bolzano, que existen, al menos, tres raíces reales distintas de la ecuación $f(x) = x^5 - 5x + 3 = 0$ **(1 punto)**
c) Demuestra, usando el teorema de Rolle, que la ecuación anterior no puede tener mas de tres raíces reales distintas **(0'5 puntos)**

a)
<u>Teorema de Bolzano</u>
Si **f(x)** es continua en el intervalo **[a , b],** y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo **[sign f(a)** $\neq$ **sign f(b)],** entonces existe, al menos, un punto $c \in (a\ , b)$ tal que **f(c) = 0**

<u>Teorema de Rolle</u>
Sea **f(x)** una función continua en **[a , b],** derivable en **(a , b)** y que verifica que **f(a) = f(b)**; entonces existe, al menos, un punto $c \in (a\ , b)$ tal que **f'(c) = 0**

b)
Sea $f(x) = x^5 - 5x + 3 = 0$,sabemos que esta función es continua en todo su dominio que es la recta real y el intervalo, entre otros, **[0 , 1]** toma valores, en los extremos de dicho intervalo:

$$f(0) = 0^5 - 5 \cdot 0 + 3 = 3 > 0 \text{ y } f(1) = 1^5 - 5 \cdot 1 + 3 = -1 < 0$$

con signo diferentes, **[sign f(0)** $\neq$ **sign f(1)],** por lo tanto existe, según el teorema de Bolzano, al menos, un punto $c \in (0\ , 1)$ tal que **f(c) = 0** que es una solución real de la función o lo que es lo mismo que
$f(c) = c^5 - 5c + 3 = 0$

En el intervalo **[1 , 2]** toma valores, en los extremos de dicho intervalo:
$f(1) = 1^5 - 5 \cdot 1 + 3 = -1 < 0$ y $f(2) = 2^5 - 5 \cdot 2 + 3 = 32 - 10 + 3 = 25 > 0$
con signo diferentes, **[sign f(1)** $\neq$ **sign f(2)],** por lo tanto existe, según el teorema de Bolzano, al menos, un punto $h \in (1\ , 2)$ tal que **f(h) = 0** que es una solución real de la función o lo que es lo mismo que
$f(h) = h^5 - 5h + 3 = 0$

En el intervalo **[0 , -2]** toma valores, en los extremos de dicho intervalo:
$f(-2) = (-2)^5 - 5 \cdot (-2) + 3 = -32 + 10 + 3 = -19 < 0$ y $f(0) = 0^5 - 5 \cdot 0 + 3 = 3 > 0$
con signo diferentes, **[sign f(-2)** $\neq$ **sign f(0)],** por lo tanto existe, según el teorema de Bolzano, al menos, un punto $j \in (-2\ , 0)$ tal que **f(j) = 0** que es una solución real de la función o lo que es lo mismo que
$f(j) = j^5 - 5j + 3 = 0$

c)
Comprobemos que la función $f(x) = x^5 - 5x + 3 = 0$ únicamente puede tener las raíces reales detectadas

Veamos ahora mediante el teorema de Rolle y trabajando por reducción al absurdo que estas raices son única.

Supongamos que **f(x)** tiene una cuarta raíz ***k*** , tales que **f(c) = f(k) = 0,** no perteneciendo **k** al intervalo **[-2 , 1]** en donde hemos buscado soluciones

Como **f(x)** es una función exponencial y polinómica, es continua y derivable en toda la recta real , o sea en el intervalo **[c , k]** y además toma el mismo valor en los extremos de dicho intervalo por lo que aplicando el teorema de Rolle, tenemos que existe, al menos, un punto $x_0 \in (c\ , k)$ tal que **f'(x_0) = 0**

Continuación del Problema 1A

La derivada de esta función es $f'(x) = 5x^4 - 5$; así, para determinar el punto $\mathbf{x_0}$ tendremos que igualar su derivada a cero,

$$5x^4 - 5 = 0 \Rightarrow 5x^4 = 5 \Rightarrow x^4 = \frac{5}{5} \Rightarrow x = \pm\sqrt[4]{1} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \in [-2\,,1] \\ x = -1 \in [-2\,,1] \end{cases}$$

.

Esta ecuación no tiene una cuarta solución en el campo de los números reales, ya que, de haberla, debía de estar fuera del intervalo estudiado y los valores que anulan a la derivada (máximos o mínimos relativos) se encuentran en el intervalo en donde hemos detectado las tres raíces

2A.- Calcula las siguientes integrales $\int sen^2 x \cos x\, dx$ $\quad \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$ **(1'25 puntos por integral)**

$$\int sen^2 x \cos x\, dx = \int t^2\, dt = \frac{1}{3}t^3 = \frac{sen^3 x}{3} + K$$

$$sen\ x = t \Rightarrow \cos x\, dx = dt$$

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx = \int e^u \cdot 2\, du = 2e^u = 2e^{\sqrt{x}} + K$$

$$\sqrt{x} = u \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = du \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\, du$$

3A.- Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5$, calcular el valor de los determinantes

$$\begin{vmatrix} b & b+a & 2c \\ e & e+d & 2f \\ h & h+g & 2i \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a+d+g & b+e+h & c+f+i \\ d+g & e+h & f+i \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

indicando las propiedades que usas en cada caso para justificar tu respuesta **(1'25 puntos por determinante)**

$$\begin{vmatrix} b & b+a & 2c \\ e & e+d & 2f \\ h & h+g & 2i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & b & 2c \\ e & e & 2f \\ h & h & 2i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & a & 2c \\ e & d & 2f \\ h & g & 2i \end{vmatrix} (I) = 0 + 2 \cdot \begin{vmatrix} b & a & c \\ e & d & f \\ h & g & i \end{vmatrix} (II) = 2 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} (III) = (-2) \cdot 5 = -10$$

(I) *Si todos los elementos de una fila o columna de una matriz se descomponen en suma de dos sumandos, su* det*er* min*ante tambien se descompone en suma de los* det*er* min*antes*

(II)*Si una matriz tiene dos filas o columnas iguales su* det*er* min*ante es igual a cero*

(III)*Si permutamos dos filas o columnas de una matriz su* det*re* min*ante cambia de signo*

$$\begin{vmatrix} a+d+g & b+e+h & c+f+i \\ d+g & e+h & f+i \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} (IV) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d & e & f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} (I) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + 0(II) = 5$$

(IV)*Si una fila o una columna de una matriz se le suma o resta una combinación lineal de las otras filas o columnas, el* det*er* min*ante de la matriz resul* tan*te coincide con el del inicial*

4A.- Dado el plano $\pi \equiv x + y + 2z = 7$ y el punto **P(1 , 0 , 0)**
a) Calcula el punto **Q** de π que hace mínima la distancia a **P** **(1'25 puntos)**
b) Calcula el punto simétrico **P'** de **P** respecto del plano π **(1'25 puntos)**

a)Hallaremos una recta **r** perpendicular al plano que pase por el punto **P**, recta determinada por dicho punto y por el vector director del plano que es el de la recta. El punto de intersección de **r** con el plano π es el punto **Q** buscado

$$\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{v_\pi} = (1\,,1\,,2) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \Rightarrow Intersección\ de\ r\ con\ \pi \Rightarrow 1 + \lambda + \lambda + 2 \cdot 2\lambda = 7 \Rightarrow 6\lambda = 6 \Rightarrow$$

$$\lambda = 1 \Rightarrow Q \begin{cases} x = 1 + 1 \\ y = 1 \\ z = 2 \cdot 1 \end{cases} \Rightarrow Q(2\,,1\,,2)$$

b) El punto **Q** es el punto medio entre **P** y si simétrico **P'**

$$\begin{cases} 2 = \dfrac{1 + x_{P'}}{2} \Rightarrow 1 + x_{P'} = 4 \Rightarrow x_{P'} = 3 \\ 1 = \dfrac{0 + y_{P'}}{2} \Rightarrow y_{P'} = 2 \\ 2 = \dfrac{0 + z_{P'}}{2} \Rightarrow z_{P'} = 4 \end{cases} \Rightarrow P'(3\,,2\,,4)$$

PROPUESTA B

1B. Dada la función

$$f(x) = \frac{ax^2 + b}{2x + 6},$$

calcula los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ sabiendo que:

- $f(x)$ tiene una asíntota oblicua de pendiente 2
- $f(x)$ tiene un mínimo relativo en el punto de abscisa $x = 0$. **(2,5 puntos)**

2B. Calcula el área encerrada entre las gráficas de las funciones

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1 \qquad \text{y} \qquad g(x) = 1 \qquad\qquad \textbf{(2,5 puntos)}$$

3B. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ ax & & & - & 3z & = & a \\ 2x & + & ay & - & z & = & a \end{array} \right. \qquad\qquad \textbf{(1,5 puntos)}$$

b) Resuélvelo para el valor $a = 1$. **(1 punto)**

4B. Dado el punto $P(1, 0, 0)$ y la recta

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 2\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = -1 \end{array} \right. \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

a) Da unas ecuaciones paramétricas de la recta s que pasa por P y corta perpendicularmente a r. **(1,25 puntos)**

b) Calcula la distancia de P a r. **(1,25 puntos)**

Propuesta B

1B.- Dada la función $f(x)=\dfrac{ax^2+b}{2x+6}$ calcula los parámetros $a,b\in\Re$ sabiendo que:

- **f(x)** tiene una asíntota oblicua de pendiente **2**
- **f(x)** tiene un mínimo relativo en el punto de abcisa **x = 0 (2'5 puntos)**

$$2=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{ax^2+b}{2x+6}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+b}{2x^2+6x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{ax^2}{x^2}+\frac{b}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{6x}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{a+\frac{b}{x^2}}{2+\frac{6}{x}}=\frac{a+\frac{b}{\infty}}{2+\frac{6}{\infty}}=\frac{a+0}{2+0}=\frac{a}{2}\Rightarrow$$

$$\frac{a}{2}=2\Rightarrow a=4$$

$$f'(x)=\frac{2ax(2x+6)-2(ax^2+b)}{(2x+6)^2}=\frac{4ax^2+12ax-2ax^2-2b}{(2x+6)^2}=\frac{2ax^2+12ax-2b}{(2x+6)^2}=2\cdot\frac{ax^2+6ax-b}{(2x+6)^2}$$

$$f'(0)=0\Rightarrow 2\cdot\frac{a\cdot 0^2+6a\cdot 0-b}{(2\cdot 0+6)^2}=0\Rightarrow 2\cdot\frac{0+0-b}{(0+6)^2}=0\Rightarrow -\frac{2b}{36}=0\Rightarrow b=0$$

$$f(x)=\frac{4x^2}{2x+6}$$

2.B.- Calcula el área encerrada entre las gráficas de las funciones $f(x)=x^3-3x^2+2x+1$ y **g(x) = 1**
(2'5 puntos)

$$\textit{Punto de corte entre funciones}\Rightarrow x^3-3x^2+2x+1=1\Rightarrow x^3-3x^2+2x=0\Rightarrow x\left(x^2-3x+2\right)=0\Rightarrow$$

$$\begin{cases} x=0 \\ x^2-3x+2=0\Rightarrow\Delta=(-3)^2-4\cdot 1\cdot 2=9-8=1\geq 0\Rightarrow x=\dfrac{3\pm\sqrt{1}}{2\cdot 1}\Rightarrow\begin{cases} x=\dfrac{3+1}{2}=2 \\ x=\dfrac{3-1}{2}=1\end{cases}\end{cases}$$

$$x=\frac{1}{2}\in(0\,,1)\Rightarrow\begin{cases} f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^3-3\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\left(\frac{1}{2}\right)+1=\frac{1}{8}-\frac{3}{4}+1+1=\frac{1-6+16}{8}=\frac{11}{8} \\ g\left(\frac{1}{2}\right)=1\end{cases}\Rightarrow\frac{11}{8}>1$$

$$x=\frac{3}{2}\in(1\,,2)\Rightarrow\begin{cases} f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^3-3\left(\frac{3}{2}\right)^2+2\left(\frac{3}{2}\right)+1=\frac{27}{8}-\frac{27}{4}+3+1=\frac{27-54+32}{8}=\frac{5}{8} \\ g\left(\frac{3}{2}\right)=1\end{cases}\Rightarrow\frac{5}{8}<1$$

$$A=\int_0^1\left(x^3-3x^2+2x+1\right)dx-\int_0^1 dx+\int_1^2 dx-\int_1^2\left(x^3-3x^2+2x+1\right)dx=\int_0^1\left(x^3-3x^2+2x\right)dx-\int_1^2\left(x^3-3x^2+2x\right)dx$$

$$A=\frac{1}{4}\cdot\left[x^4\right]_0^1-3\cdot\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_0^1+2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_0^1-\frac{1}{4}\cdot\left[x^4\right]_1^2+3\cdot\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_1^2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_1^2$$

$$A=\frac{1}{4}\cdot\left(1^4-0^4\right)-\left(1^3-0^3\right)+\left(1^2-0^2\right)-\frac{1}{4}\cdot\left(2^4-1^4\right)+\left(2^3-1^3\right)-\left(2^2-1^2\right)=\frac{1}{4}-1+1-\frac{15}{4}+7-3=\frac{1}{2}u^2$$

3B.- a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \Re$

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ ax - 3z = a \\ 2x + ay - z = a \end{cases}$$ **(1'5 puntos)**

b) Resuélvelo para el valor $a = 1$ **(1 punto)**

$a)$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ a & 0 & -3 \\ 2 & a & -1 \end{vmatrix} = -6 + 2a^2 + 3a + a = 2a^2 + 4a - 6 \Rightarrow Si\ |A| = 0 \Rightarrow 2a^2 + 4a - 6 = 0 \Rightarrow 2\left(a^2 + 2a - 3\right) = 0 \Rightarrow$$

$$a^2 + 2a - 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16 \geq 0 \Rightarrow a = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{-2+4}{2} = 1 \\ a = \dfrac{-2-4}{2} = -3 \end{cases}$$

$$\forall m \in \Re - \{-3, 1\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 3 = Número\ de\ incognitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$$

$Si\ a = -3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & -3 & -3 \\ 2 & -3 & -1 & -3 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & -5 & -5 & -3 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow 0z = -2 \Rightarrow$$

$$z = -\frac{2}{0} \Rightarrow Sin\ solución \Rightarrow Sistema\ Incompatible$$

$Si\ a = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow rang(A) = rang(A/B) = 2 < Número\ de\ incognitas$$

$Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado$

$b)$

$Si\ a = 1 \Rightarrow Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado$

$-y - 5z = 1 \Rightarrow y = -1 - 5z \Rightarrow x + (-1 - 5z) + 2z = 0 \Rightarrow x - 1 - 5z + 2z = 0 \Rightarrow x = 1 + 3z$

$Solución \Rightarrow (x, y, z) = (1 + 3\lambda, -1 - 5\lambda, \lambda)$

4.B.- Dado el el punto **P(1 , 0 , 0)** y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 3 + \lambda \quad \lambda \in \Re \\ z = -1 \end{cases}$

a) Da unas ecuaciones paramétricas de la recta **s** que pase por **P** y corta perpendicularmente a **r** **(1'25 puntos)**
b) Calcula la distancia de P a r **(1'25 punto)**

a) El producto escalar del vector director de la recta **r** y el formado por el punto **P** y por el punto genérico **R** de la misma recta **r** es nulo ya que son rectas perpendiculares. Con el dato hallado tendremos el vector director de la recta **s** buscada

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (2\,,1\,,0) \\ \overrightarrow{PR} = (2\lambda\,,3+\lambda\,,0) - (1\,,0\,,0) = (2\lambda - 1\,,3+\lambda\,,0) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \perp \overrightarrow{PR} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{PR} = 0 \Rightarrow$$

$$(2\,,1\,,0)\cdot(2\lambda - 1\,,3+\lambda\,,0) = 0 \Rightarrow 4\lambda - 2 + 3 + \lambda = 0 \Rightarrow 1 + 5\lambda = 0 \Rightarrow 5\lambda = -1 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{5} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{v_s} = \left[2\cdot\left(-\frac{1}{5}\right) - 1\,,3 + \left(-\frac{1}{5}\right),0\right] = \left(-\frac{2}{5} - 1\,,3 - \frac{1}{5}\,,0\right) = \left(-\frac{7}{5}\,,\frac{14}{5}\,,0\right) \equiv (-7\,,14\,,0) \equiv (1\,,-2\,,0) \Rightarrow$$

$$s \equiv \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = -2\mu \quad \mu \in \Re \\ z = 0 \end{cases}$$

b) La distancia pedida es la de P al punto de corte S de las rectas r y s que se puede hallar con el valor del parámetro buscado

$$S\begin{cases} x = 2\left(-\frac{1}{5}\right) \\ y = 3 + \left(-\frac{1}{5}\right) \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow S\left(-\frac{2}{5}\,,\frac{14}{5}\,,-1\right) \Rightarrow d(P,S) = \sqrt{\left[1 - \left(-\frac{2}{5}\right)\right]^2 + \left(0 - \frac{14}{5}\right)^2 + [0 - (-1)]^2}$$

$$d(P,S) = \sqrt{\left(1 + \frac{2}{5}\right)^2 + \left(-\frac{14}{5}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\left(\frac{7}{5}\right)^2 + \frac{196}{25} + 1} = \sqrt{\frac{49 + 196 + 25}{25}} = \sqrt{\frac{270}{25}} = \frac{\sqrt{270}}{5} = \frac{3\sqrt{30}}{5}\,u$$

Reserva 1 de 2012

Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado.

Bachillerato L. O. E.

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Puedes utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.

PROPUESTA A

1A. a) Enuncia el Teorema del valor medio de Lagrange y da su interpretación geométrica. **(1 punto)**

b) Calcula un punto del intervalo $[0, 2]$ en el que la recta tangente a la gráfica de $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ sea paralela a la cuerda (o segmento) que une los puntos de la gráfica de $f(x)$ en $x = 0$ y $x = 2$. **(1,5 puntos)**

2A. Calcula la integral

$$\int \frac{x+2}{x^3+x^2}\, dx \qquad \textbf{(2,5 puntos)}$$

3A. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) Calcula A^n cuando $n \in \mathbb{N}$ es par. **(0,75 puntos)**

b) Resuelve la ecuación matricial $6A^{20}X = B - 3AX$, donde X es una matrix cuadrada de orden 3. (Indicación: Sustituye de inicio el valor de A^{20} para facilitar los cálculos) **(1,75 puntos)**

4A. Dadas las rectas

$$r \equiv \frac{x+1}{2} = y = \frac{z-1}{3}, \qquad s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = a + \lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

a) Calcula el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que r y s se corten en un punto. Da dicho punto de corte. **(1,25 puntos)**

b) Para el valor de a obtenido, calcula la ecuación general del plano π que contiene a r y s. **(1,25 puntos)**

(sigue a la vuelta)

Reserva 1 - 2012

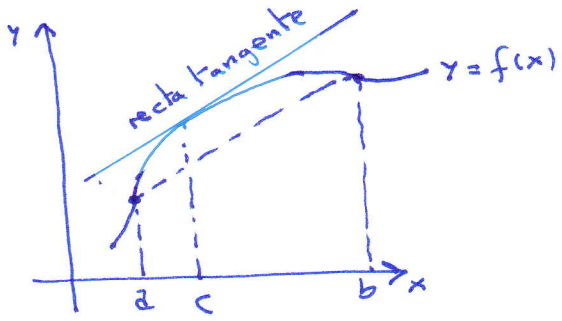
Propuesta A

1A) a) Teorema del valor medio de Lagrange

Si $f(x)$ es una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), entonces $\exists c \in (a,b)$ t.q. $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$

Interpretación geométrica

Si se cumplen las hipótesis del teorema, existe al menos un punto $c \in (a,b)$ en el que su recta tangente es paralela al segmento determinado por los puntos $A(a, f(a))$ y $B(b, f(b))$.



b) La función $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ es continua en $[0,2]$ y derivable en $(0,2)$, luego vamos a aplicar el TVM de Lagrange a f en dicho intervalo.

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 1 \\ f(2) = 17 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(c) = \frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{17-1}{2} = \frac{16}{2} = 8 \left.\begin{array}{l} \\ f'(c) = 6c+2 \end{array}\right\} \Rightarrow 6c+2 = 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6c = 6 \Rightarrow \boxed{c = 1}$$

2A) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^3+x^2}\,dx$

Factorizamos el denominador

$$x^3 + x^2 = x^2(x+1) = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} -1 \\ 0 \text{ (doble)} \end{cases}$$

Descomponemos en fracciones simples

$$\frac{x+2}{x^3+x^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2} = \frac{Ax^2 + Bx(x+1) + C(x+1)}{(x+1)x^2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ (igualando los numeradores y dándole valores a x):

$$Ax^2+Bx(x+1)+C(x+1)=x+2 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow C=2 \\ x=-1 \Rightarrow A=1 \\ x=2 \Rightarrow 4A+6B+3C=4 \Rightarrow B=-1 \end{cases}$$

$$\frac{x+2}{x^3+x^2}=\frac{1}{x+1}+\frac{-1}{x}+\frac{2}{x^2}$$

<u>Integral</u>

$$\int \frac{x+2}{x^3+x^2}dx=\int\frac{1}{x+1}dx-\int\frac{1}{x}dx+2\int\frac{1}{x^2}dx=$$

$$=\ln|x+1|-\ln|x|+2\int x^{-2}dx=\ln|x+1|-\ln|x|+2\frac{x^{-2+1}}{-2+1}=$$

$$=\boxed{\ln|x+1|-\ln|x|-\frac{2}{x}+C}$$

3A) a) $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$

$$A^2=AA=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I$$

$A^4=A^2\cdot A^2=I\cdot I=I$

Por tanto, $\boxed{A^n=I \text{ cuando } n \text{ es par}}$

b) $6A^{20}X=B-3AX$

Como $A^{20}=I$ se tiene: $6X=B-3AX \Rightarrow 6X+3AX=B \Rightarrow$

$\Rightarrow (6I+3A)X=B \Rightarrow (6I+3A)^{-1}(6I+3A)X=(6I+3A)^{-1}B \Rightarrow$

Cuidado

$\Rightarrow \boxed{X=(6I+3A)^{-1}B}$

<u>Calculamos $6I+3A$</u>

$$6I+3A=6\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&0&0\\0&6&0\\0&0&6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&3\\0&3&0\\3&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&0&3\\0&9&0\\3&0&6\end{pmatrix}$$

<u>Calculamos $(6I+3A)^{-1}$</u>

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}6&0&3&1&0&0\\0&9&0&0&1&0\\3&0&6&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{F_1\leftrightarrow F_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}3&0&6&0&0&1\\0&9&0&0&1&0\\6&0&3&1&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{F_1:3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&0&0&1/3\\0&9&0&0&1&0\\6&0&3&1&0&0\end{array}\right)\rightarrow$$

$$\xrightarrow{-6F_1+F_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&0&0&1/3\\0&9&0&0&1&0\\0&0&-9&1&0&-2\end{array}\right)\xrightarrow[F_3:(-9)]{F_2:9}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&0&0&1/3\\0&1&0&0&1/9&0\\0&0&1&-1/9&0&2/9\end{array}\right)\xrightarrow{-2F_3+F_1}$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&2/9&0&-1/9\\0&1&0&0&1/9&0\\0&0&1&-1/9&0&2/9\end{array}\right)\Rightarrow(6I+3A)^{-1}=\begin{pmatrix}2/9&0&-1/9\\0&1/9&0\\-1/9&0&2/9\end{pmatrix}$$

Calculamos X

$$\boxed{X=(6I+3A)^{-1}B=\begin{pmatrix}2/9&0&-1/9\\0&1/9&0\\-1/9&0&2/9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2/3&0&-1/3\\0&1/3&0\\-1/3&0&2/3\end{pmatrix}}$$

4A) $r\equiv\dfrac{x+1}{2}=y=\dfrac{z-1}{3}$, $s\equiv\begin{cases}x=\lambda\\y=a+\lambda\\z=-\lambda\end{cases}$ con $\lambda\in\mathbb{R}$

a) Para calcular a de forma que se corten en un punto lo que hay que hacer es resolver el sistema formado por las ecuaciones de r y s:

$$\left.\begin{array}{l}r\equiv\begin{cases}x=-1+2\mu\\y=\mu\\z=1+3\mu\end{cases}\\ s\equiv\begin{cases}x=\lambda\\y=a+\lambda\\z=-\lambda\end{cases}\end{array}\right\}\quad\left.\begin{array}{r}-1+2\mu=\lambda\\ \mu=a+\lambda\\ 1+3\mu=-\lambda\end{array}\right\}\quad\left.\begin{array}{l}\lambda-2\mu=-1\\ \lambda-\mu=-a\\ \lambda+3\mu=-1\end{array}\right\}\quad\left.\begin{array}{l}\lambda-2\mu=-1\\ -\lambda-3\mu=1\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5\mu=0\Rightarrow\underline{\underline{\mu=0}}\Rightarrow\lambda-2\cdot0=-1\Rightarrow\underline{\underline{\lambda=-1}}\Rightarrow-1+0=a\Rightarrow\boxed{a=1}$$

El punto de corte de r y s es:

$$r\equiv\left.\begin{cases}x=-1+2\cdot0\\y=0\\z=1+3\cdot0\end{cases}\right\}\Rightarrow\boxed{P(-1,0,1)}$$

b) El plano π que nos piden está determinado por $\vec{u}_r=(2,1,3)$, $\vec{u}_s=(1,1,-1)$ y $\overrightarrow{PG}$ donde P es el punto de intersección de r y s, y G es un punto genérico: $\overrightarrow{PG}=(x,y,z)-(-1,0,1)=(x+1,\ y,\ z-1)$.

$$\pi\equiv\begin{vmatrix}x+1&2&1\\y&1&1\\z-1&3&-1\end{vmatrix}=0\Rightarrow\boxed{4x-5y-z+5=0\equiv\pi}$$

PROPUESTA B

1B. Sabiendo que la función

$$f(x) = \frac{ax+b}{x^2+1}, \qquad a, b \in \mathbb{R},$$

tiene un punto crítico en $(1,1)$, calcula a y b y demuestra que el punto crítico es un máximo. **(2,5 puntos)**

2B. a) Esboza la región encerrada entre el eje de abscisas y las parábolas $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^2 - 4x + 4$. **(0,5 puntos)**

b) Calcula el área de la región anterior. **(2 puntos)**

3B. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} mx & & & + & z & = & 1 \\ & & my & + & z & = & m \\ -mx & - & my & + & (m+1)z & = & -m-1 \end{array} \right. \qquad \textbf{(1,5 puntos)}$$

b) Calcula la solución cuando el sistema sea compatible indeterminado. **(1 punto)**

4B. Dados el plano $\pi \equiv y - z = 3$ y la recta

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{array} \right. \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

a) Estudia la posición relativa de π y r. **(1,25 puntos)**

b) Da unas ecuaciones paramétricas de la recta s paralela a π que corta a r perpendicularmente en el punto $P(0,1,-1)$. **(1,25 puntos)**

Propuesta B

1B) $f(x) = \dfrac{ax+b}{x^2+1}$, $a, b \in \mathbb{R}$

f tiene un punto crítico (punto en el que $f'=0$) en $(1,1)$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'(1) = 0 \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{a(x^2+1) - (ax+b)2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-ax^2 - 2bx + a}{(x^2+1)^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(1) = \dfrac{-a-2b+a}{2^2} = 0 \Rightarrow \dfrac{-2b}{4} = 0 \Rightarrow b = 0 \\ f(1) = 1 \Rightarrow \dfrac{a+b}{2} = 1 \Rightarrow a+b = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \end{cases}}$$

Por tanto, $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$

Ahora hay que comprobar que $x=1$ es un máximo relativo:

$$f'(x) = \frac{2(x^2+1) - 2x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-4x(x^2+1)^2 - (-2x^2+2)2(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4} = \frac{4x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

$f''(1) = -1 < 0 \Rightarrow$ $\boxed{x = 1 \text{ es un máx. relativo de } f.}$

2B) a) $f(x) = x^2$

Vértice: $\left.\begin{array}{l} x_v = 0 \\ y_v = 0 \end{array}\right\} V(0,0)$

Tabla:

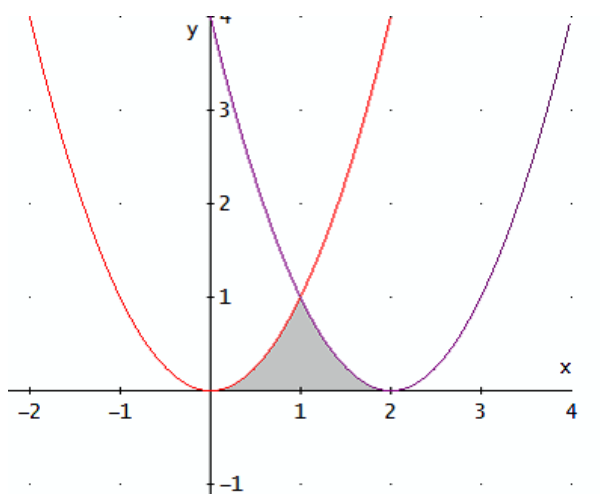
x	-1	-2	1	2
y	1	4	1	4

$g(x) = x^2 - 4x + 4$

Vértice: $\left.\begin{array}{l} x_v = \frac{4}{2} = 2 \\ y_v = 0 \end{array}\right\} V(2,0)$

Tabla:

x	0	4
y	4	4



Puntos de corte de $f(x)$ y $g(x)$

$f(x)=g(x) \Rightarrow x^2 = x^2-4x+4 \Rightarrow -4x+4=0 \Rightarrow x=1$

Área

$$\boxed{A} = \int_0^1 x^2\,dx + \int_1^2 (x^2-4x+4)\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + \frac{x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 4x\Big|_1^2 =$$

$$= \left(\frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right) + \left[\left(\frac{2^3}{3} - \frac{4\cdot 2^2}{2} + 4\cdot 2\right) - \left(\frac{1^3}{3} - \frac{4\cdot 1^2}{2} + 4\cdot 1\right)\right] =$$

$$= \boxed{\frac{2}{3}\,u^2}$$

3B) a) $\left.\begin{cases} mx+z=1 \\ my+z=m \\ -mx-my+(m+1)z=-m-1 \end{cases}\right\} M=\begin{pmatrix} m & 0 & 1 \\ 0 & m & 1 \\ -m & -m & m+1 \end{pmatrix},\ \tilde{M}=\begin{pmatrix} m & 0 & 1 & 1 \\ 0 & m & 1 & m \\ -m & -m & m+1 & -m-1 \end{pmatrix}$

$|M| = m^2(m+3) \Rightarrow |M|=0 \Leftrightarrow m=\begin{cases} 0 \\ -3 \end{cases}$

Si $\boxed{m \neq 0,-3} \Rightarrow$ rango M = rango $\tilde{M} = 3 =$ nº de incógnitas $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ sistema compatible determinado.

Si $\boxed{m=-3}$

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1+F_3} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2+F_3} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ rango M = rango $\tilde{M} = 2 < 3 =$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ sistema compatible indeterminado

Si $\boxed{m=0}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-F_1+F_3]{-F_1+F_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow 0z=-2 \Rightarrow \text{Sistema incompatible}$$

b) Si $m=-3$ hemos visto que el sistema es compatible indeterminado

$$\left.\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} [1] \\ [2] \\ \end{matrix}\right\}$$

De [2]: $-3y+z=-3 \Rightarrow y=\frac{1}{3}z+1$

Sustituimos en [1]: $-3x+z=1 \Rightarrow x=\frac{1}{3}z-\frac{1}{3}$

Hacemos $z=\lambda \in \mathbb{R}$. Las soluciones son $\boxed{(x,y,z)=\left(\frac{1}{3}\lambda-\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\lambda+1,\ \lambda\right)}$

4B) $\pi \equiv y - z = 3$, $r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

a) Posición relativa

$\left.\begin{array}{l} \vec{n}_\pi = (0, 1, -1) \\ \vec{u}_r = (2, 1, 1) \end{array}\right\}$ $\pi \equiv y - z - 3 = 0$

Sustituimos $\vec{u}_r = (2,1,1)$ en la ec. del plano:

$+1-1 = 0 \Rightarrow$ sustituimos $P(0,1,-1) \in r$ en la ec. completa del plano $1-1-3 \neq 0 \Rightarrow$ r y π son paralelos

De otra forma: mediante rangos

$$r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{1} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = y - 1 \Rightarrow x - 2y + 2 = 0 \\ \frac{x}{2} = z + 1 \Rightarrow x - 2z - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\tilde{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right), \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} |M| = 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rango } M = 2 \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Rightarrow \text{rango } \tilde{M} = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{r y } \pi \text{ son paralelos}$$

b) La recta s que nos piden está determinada por $P(0,1,-1)$ y el vector director $\vec{u}_s = \vec{n}_\pi \times \vec{u}_r$

$$\vec{u}_s = \vec{n}_\pi \times \vec{u}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k} = (2, -2, -2)$$

Unas ecuaciones paramétricas de s son:

$$\boxed{s \equiv \begin{cases} x = +2\mu \\ y = 1 - 2\mu \\ z = -1 - 2\mu \end{cases} \text{ con } \mu \in \mathbb{R}}$$

Reserva 2 de 2012

Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado.

Bachillerato L. O. E.

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Puedes utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.

PROPUESTA A

1A. a) Interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto. **(0,5 puntos)**

b) Encuentra el punto de la función $f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2 + 30x + 1$ en el que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ es mínima. Encuentra también el punto donde la pendiente es máxima. **(2 puntos)**

2A. Encuentra una primitiva $F(x)$ de la función

$$f(x) = (x^2 + 1)e^x$$

tal que $F(0) = 5$. **(2,5 puntos)**

3A. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & -b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & -b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \qquad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0, b \neq 0$$

a) Calcula $A \cdot A^T$, donde A^T es la matriz traspuesta de A. **(1 punto)**

b) Razona que siempre existe la matriz inversa de A, independientemente de los valores $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0, b \neq 0$. **(1,5 puntos)**

4A. Dados los planos $\pi_1 \equiv x - 2y - z = 0$ y $\pi_2 \equiv 2x - y + \lambda z = 4$:

a) Calcula el valor del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ para que los planos π_1 y π_2 sean perpendiculares. **(1 punto)**

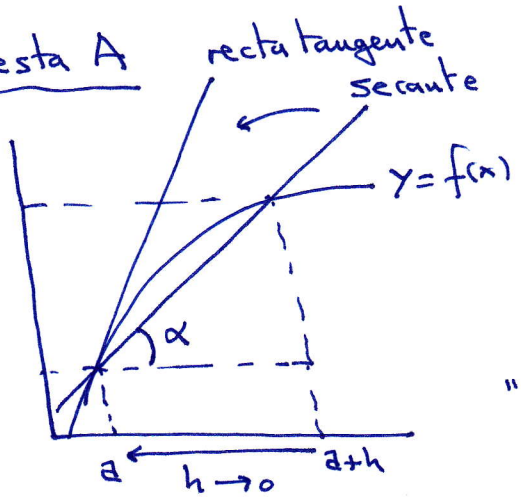
b) Para el valor de λ obtenido en el apartado anterior, obtén unas ecuaciones paramétricas de la recta r paralela a π_1 y a π_2 que pasa por el punto $P(1, 2, 3)$. **(1,5 puntos)**

(sigue a la vuelta)

Reserva 2 - 2012

Propuesta A

1A) a)



$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = tg\,\alpha = m_{secantes}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a) = m_{\substack{recta\\tangente}}$$

"La derivada de una función en un punto es igual a la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto"

b) $m_{\substack{recta\\tangente}} = f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 36x + 30 = g(x)$

Queremos optimizar $g(x)$:

$g'(x) = 12x^2 - 48x + 36$

$g''(x) = 24x - 48$

$g'(x) = 0 \iff 12x^2 - 48x + 36 = 0 \iff x = \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases}$

$g''(1) = -24 < 0 \Rightarrow x = 1$ es un máx. relativo

$g''(3) = 24 > 0 \Rightarrow x = 3$ " " mín. relativo

La pendiente es mínima en $x=3$ y máxima en $x=1$.

2A) ¿$F(x)$ primitiva de $f(x) = (x^2+1)e^x$ t.q. $F(0)=5$?

$$\int (x^2+1)e^x\,dx = \begin{bmatrix} u = x^2+1 \to du = 2x\,dx \\ dv = e^x\,dx \to v = e^x \end{bmatrix} = (x^2+1)e^x - \int 2xe^x\,dx =$$

$$= (x^2+1)e^x - 2xe^x + 2e^x + C = F(x)$$

$$\int 2xe^x\,dx = \begin{bmatrix} u = 2x \to du = 2\,dx \\ dv = e^x dx \to v = e^x \end{bmatrix} = 2xe^x - \int 2e^x\,dx =$$

$$= 2xe^x - 2e^x$$

$$F(0) = (0^2+1)e^0 - 2\cdot 0\cdot e^0 + 2\cdot e^0 + C = 3 + C = 5 \Rightarrow C = 2$$

$$\boxed{F(x) = \int (x^2+1)e^x\,dx = (x^2+1)e^x - 2xe^x + 2e^x + 2}$$

3A) $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & -b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & -b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ $\quad a, b \neq 0$

a) $AA^t = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & -b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & -b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & -b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ -b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix}$

b) $\exists A^{-1} \Leftrightarrow |A| \neq 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & -b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & -b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} 0 & 0 & -b \\ a & b & 0 \\ -b & a & 0 \end{vmatrix} =$$

$= a \cdot a^3 - b \cdot (-b^3) = a^4 + b^4 \neq 0$ ya que $a \neq 0$ y $b \neq 0$.

4A) $\pi_1 \equiv x - 2y - z = 0$

$\pi_2 \equiv 2x - y + \lambda z = 4$

a) ¿λ : $\pi_1 \perp \pi_2$?

$\left.\begin{array}{l} \vec{n}_{\pi_1} = (1, -2, -1) \\ \vec{n}_{\pi_2} = (2, -1, \lambda) \end{array}\right\}$ $\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_{\pi_1} \perp \vec{n}_{\pi_2} \Leftrightarrow \vec{n}_{\pi_1} \cdot \vec{n}_{\pi_2} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (1, -2, -1) \cdot (2, -1, \lambda) = 0 \Leftrightarrow 2 + 2 + \lambda = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = -4}$

b) La recta que nos piden está determinada por $P(1,2,3)$ y el vector director $\vec{u}_r = \vec{n}_{\pi_1} \times \vec{n}_{\pi_2}$.

$$\vec{u}_r = \vec{n}_{\pi_1} \times \vec{n}_{\pi_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 8\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k} + 4\vec{k} + \vec{i} + 4\vec{j} =$$

$$= 9\vec{i} + 6\vec{j} + 3\vec{k} = (9, 6, 3)$$

$$\boxed{r \equiv \begin{cases} x = 1 + 9\mu \\ y = 2 + 6\mu \\ z = 3 + 3\mu \end{cases} \quad \text{con } \mu \in \mathbb{R}}$$

¡¡No usar λ, ya que se ha usado en el apartado anterior para otra cosa !!

Propuesta B

1B) ¿ $a>0$: $\lim_{x\to 0} e^{\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}} = \lim_{x\to 0} (\cos 2x)^{\frac{a}{x^2}}$?

- $\lim_{x\to 0} e^{\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}} = e^{-1}$ (*)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x})(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})}{x(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-x-(1+x)}{x(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})} = \lim_{x\to 0}\frac{-2x}{x(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})} = \lim_{x\to 0}\frac{-2}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}} =$$

$$= \frac{-2}{1+1} = -1$$

- $\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{a}{x^2}} = [1^\infty] = \lim_{x\to 0} e^{\frac{a}{x^2}\ln(\cos 2x)} =$

$$= e^{\lim_{x\to 0}\frac{a}{x^2}\ln(\cos 2x)} = e^{-2a} \quad (**)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a}{x^2}\ln(\cos 2x) = \lim_{x\to 0}\frac{a\ln(\cos 2x)}{x^2} \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{a\,\frac{-2\,\text{sen}(2x)}{\cos(2x)}}{2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-2a\,\text{tg}(2x)}{2x} \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{4a}{\cos^2(2x)}}{2} = -2a$$

- De (*) y (*) : $e^{-1} = e^{-2a} \Rightarrow -1 = -2a \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{2}}$

2B) $f(x) = x^2 - 6x + 9$

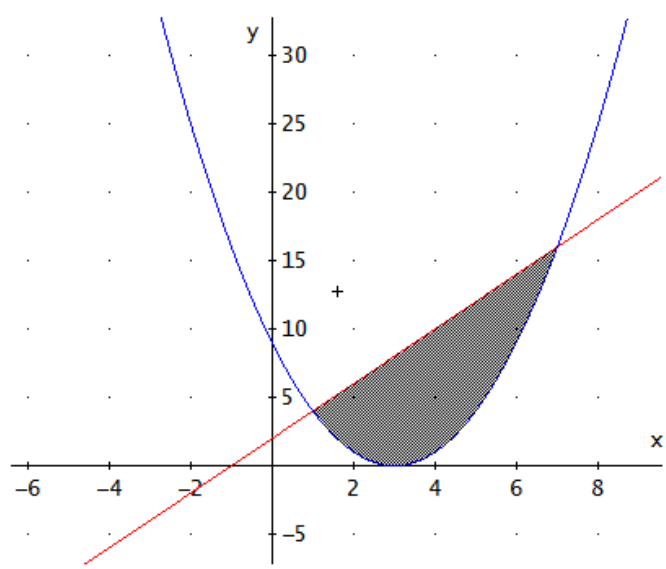
Vértice : $\left.\begin{array}{l} x_v = \frac{6}{2} = 3 \\ y_v = 0 \end{array}\right\} V(3,0)$

Tabla

x	1	5
y	4	4

$g(x) = 2x + 2$

x	y
0	2
2	6



PROPUESTA B

1B. Calcula el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, para que se verifique la igualdad

$$\lim_{x\to 0} e^{\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}} = \lim_{x\to 0} (\cos 2x)^{\frac{a}{x^2}} \qquad \textbf{(2,5 puntos)}$$

2B. a) Esboza la región encerrada entre la parábola $f(x) = x^2 - 6x + 9$ y la recta $g(x) = 2x + 2$. **(0,5 puntos)**

b) Calcula el área de la región anterior. **(2 puntos)**

3B. Un grupo de amigos se reúne cada sábado en la misma cafetería. Hace dos sábados tomaron 4 cafés, 6 refrescos y 2 infusiones, siendo el precio total 15,40 euros. El sábado pasado tomaron 5 cafés, 4 refrescos y 3 infusiones, siendo el precio total 14,40 euros. Hoy sábado han pedido 3 cafés, 8 refrescos y 1 infusión. Cuando piden la cuenta, el camarero les dice que el precio total es 18 euros.

Se pide:

a) Plantea un sistema de ecuaciones lineales con los datos del enunciado anterior. **(1 punto)**

b) Asumiendo que los dos sábados anteriores los precios totales estaban bien calculados y que los precios de los cafés, refrescos e infusiones no han cambiado, razona que hay un error en la cuenta de este sábado. **(1,5 puntos)**

4B. Dadas las rectas

$$r \equiv \frac{x}{2} = y + 1 = \frac{z-1}{3}, \qquad s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

a) Estudia su posición relativa. **(1,25 puntos)**

b) Calcula la distancia entre r y s. **(1,25 puntos)**

---

b) Puntos de corte de $f(x)$ y $g(x)$

$$f(x)=g(x) \Rightarrow x^2-6x+9=2x+2 \Rightarrow x^2-8x+7=0 \Rightarrow x=\begin{cases}7\\1\end{cases}$$

Área

$$\boxed{A}=\int_1^7\left[(2x+2)-(x^2-6x+9)\right]dx=\int_1^7(-x^2+8x-7)\,dx=$$

$$=\frac{-x^3}{3}+\frac{8x^2}{2}-7x\Big|_1^7=\left(\frac{-7^3}{3}+\frac{8\cdot 7^2}{2}-7\cdot 7\right)-\left(\frac{-1^3}{3}+\frac{8\cdot 1^2}{2}-7\cdot 1\right)=$$

$$=\boxed{36\,u^2}$$

3B) a) x = precio de un café
y = " de un refresco
z = " de una infusión

$$\left\{\begin{array}{l}4x+6y+2z=15{,}40\\5x+4y+3z=14{,}40\\3x+8y+z=18\end{array}\right\}$$

b) Para razonar que hay un error, vamos a demostrar que el sistema es incompatible

$$\left(\begin{array}{ccc|c}4&6&2&15{,}40\\5&4&3&14{,}40\\3&8&1&18\end{array}\right)\xrightarrow{F_1:4}\left(\begin{array}{ccc|c}1&3/2&1/2&7{,}70\\5&4&3&14{,}40\\3&8&1&18\end{array}\right)\xrightarrow[-3F_1+F_3]{-5F_1+F_2}$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&3/2&1/2&7{,}70\\0&-7/2&1/2&-24{,}1\\0&7/2&-1/2&-5{,}1\end{array}\right)\xrightarrow{F_2+F_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&3/2&1/2&7{,}70\\0&-7/2&1/2&-24{,}1\\0&0&0&-29{,}2\end{array}\right)\Rightarrow 0z=-29{,}2$$

$\Rightarrow$ Sistema incompatible.

4B) $r\equiv\frac{x}{2}=y+1=\frac{z-1}{3}$ y $s\equiv\begin{cases}x=\lambda\\y=\lambda\\z=1-\lambda\end{cases}$ con $\lambda\in\mathbb{R}$

a) Posición relativa

$$r\equiv\frac{x}{2}=y+1=\frac{z-1}{3}\Rightarrow\begin{cases}\frac{x}{2}=y+1\Rightarrow x-2y-2=0\\\frac{x}{2}=\frac{z-1}{3}\Rightarrow 3x-2z+2=0\end{cases}$$

$$s\equiv x=y=\frac{z-1}{-1}\Rightarrow\begin{cases}x=y\Rightarrow x-y=0\\x=\frac{z-1}{-1}\Rightarrow -x-z+1=0\end{cases}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{rango } M = 3$$

$$|\tilde{M}| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & -2 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -2 & 8 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 10 \neq 0 \Rightarrow \text{rango } \tilde{M} = 4$$

Por tanto, <u>r y s se cruzan</u>.

b) $$d(r,s) = \left| \frac{\det(\vec{u}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_sP_r})}{|\vec{u}_r \times \vec{u}_s|} \right|$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u}_r = (2,1,3) \\ \vec{u}_s = (1,1,-1) \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \overrightarrow{P_sP_r} = (0,-1,1) - (0,0,1) = (0,-1,0) \\ P_r(0,-1,1) \\ P_s(0,0,1) \end{array}$$

$$\vec{u}_r \times \vec{u}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k} = (-4,5,1)$$

$$|\vec{u}_r \times \vec{u}_s| = \sqrt{(-4)^2 + 5^2 + 1^2} = \sqrt{42}$$

$$\det(\vec{u}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_sP_r}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -5$$

Por tanto:

$$\boxed{d(r,s) = \left| \frac{-5}{\sqrt{42}} \right| = \frac{5\sqrt{42}}{42} \, u}$$