Junio 2013

UCLM
UNIVERSIDAD DE CASTILLA-LA MANCHA

Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado.

Bachillerato L. O. E.

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Puedes utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.

PROPUESTA A

1A. a) Enuncia el Teorema de Bolzano. **(0,5 puntos)**

b) Razona que las gráficas de las funciones $f(x) = 3x^5 - 10x^4 + 10x^3 + 3$ y $g(x) = e^x$ se cortan en algún punto con coordenada de abscisa entre -1 y 0. **(1 punto)**

c) Calcula los puntos de inflexión de $f(x)$. **(1 punto)**

2A. Calcula el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, para que el valor (en unidades de superficie) del área de la región determinada por la parábola $f(x) = -x^2 + a^2$ y el eje de abscisas, coincida con la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = -a$. **(2,5 puntos)**

3A. a) Encuentra dos matrices A, B cuadradas de orden 2 que cumplan:

- Su suma es la matriz identidad de orden 2.
- Al restar a la matriz A la matriz B se obtiene la traspuesta de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(1,5 puntos)

b) Si M es una matriz cuadrada de orden 2 tal que $|M| = 7$, razona cuál es el valor de los determinantes $|M^2|$ y $|2M|$. **(1 punto)**

4A. a) Estudia la posición relativa del plano $\pi \equiv x - y - z = a$ y la recta

$$r \equiv \begin{cases} 2x + y + az = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$. **(1,25 puntos)**

b) Calcula la distancia entre π y r para cada valor de $a \in \mathbb{R}$. **(1,25 puntos)**

(sigue a la vuelta)

Junio 2013

Propuesta A

1A a) **Teorema de Bolzano**

Si $f(x)$ es continua en el intervalo $[a,b]$, y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo ($\text{sig}\, f(a) \neq \text{sig}\, f(b)$), entonces $\exists c \in (a,b)$ tal que $f(c)=0$.

b) Consideramos la función

$$h(x) = f(x) - g(x) = 3x^5 - 10x^4 + 10x^3 + 3 - e^x$$

La función $h(x)$ verifica:

h es continua en $[-1,0]$, ya que es continua en $\mathbb{R}$, por ser suma de una función polinómica y una exponencial.

$$h(-1) = 3(-1)^5 - 10(-1)^4 + 10(-1)^3 + 3 - e^{-1} = -20 - \frac{1}{e} < 0$$

$$h(0) = 3\cdot 0^5 - 10\cdot 0^4 + 10\cdot 0^3 + 3 - e^0 = 2 > 0$$

Aplicando el teorema de Bolzano, $\exists c \in (-1,0)$ t.q. $h(c)=0$, esto es $f(c)-g(c)=0 \Rightarrow f(c)=g(c)$, es decir, c es el punto de corte de f y g.

c) $f'(x) = 15x^4 - 40x^3 + 30x^2$

$f''(x) = 60x^3 - 120x^2 + 60x = 60x(x^2 - 2x + 1)$

$$f''(x)=0 \Rightarrow \left.\begin{cases} 60x=0 \Rightarrow x=0 \\ x^2-2x+1=0 \Rightarrow x=1 \end{cases}\right\} \Rightarrow x=0 \text{ y } x=1 \text{ son posibles puntos de inflexión.}$$

$f'''(x) = 180x^2 - 240x + 60$

$$\left.\begin{aligned} f'''(0) = 60 \neq 0 \\ f'''(1) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{f \text{ tiene un punto de inflexión en } x=0}$$

2A **Puntos de corte con el eje OX**

$f(x)=0 \Rightarrow -x^2+a^2=0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{a^2} = \pm a$

Signo de $f(x)$

$f(0) = a^2 > 0 \Rightarrow f(x) > 0$ en $(-a,a)$

Área

$$A = \int_{-a}^{a} (-x^2 + a^2)\,dx = -\frac{x^3}{3} + a^2 x \Big]_{-a}^{a} = -\frac{a^3}{3} + a^3 - \left(-\frac{-a^3}{3} - a^3\right) =$$

$$= -\frac{a^3}{3} + a^3 - \frac{a^3}{3} + a^3 = \frac{4a^3}{3}$$

Pendiente

$$f'(x) = -2x$$

$$f'(-a) = 2a$$

Solución

$$\frac{4a^3}{3} = 2a \Rightarrow 4a^3 - 6a = 0 \Rightarrow 2a(2a^2 - 3) = 0 \Rightarrow a = \begin{cases} 0 \\ \pm\frac{\sqrt{6}}{2} \end{cases}$$

Por tanto, $\boxed{a = \frac{\sqrt{6}}{2}}$

3A a) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{aligned} A+B &= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ A-B &= \begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a_{11} + b_{11} = 1 & [1] \\ a_{12} + b_{12} = 0 & [2] \\ a_{21} + b_{21} = 0 & [3] \\ a_{22} + b_{22} = 1 & [4] \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11} - b_{11} = 1 & [5] \\ a_{12} - b_{12} = 3 & [6] \\ a_{21} - b_{21} = 2 & [7] \\ a_{22} - b_{22} = 4 & [8] \end{cases}$$

[1]+[5]: $2a_{11} = 2 \Rightarrow a_{11} = 1$

Sustituimos en [1]: $b_{11} = 0$

[2]+[6]: $2a_{12} = 3 \Rightarrow a_{12} = \frac{3}{2}$

Sustituimos en [2]: $b_{12} = -\frac{3}{2}$

[3]+[7]: $2a_{21} = 2 \Rightarrow a_{21} = 1$

Sustituimos en [3]: $b_{21} = -1$

[4]+[8]: $2a_{22} = 5 \Rightarrow a_{22} = \frac{5}{2}$

Sustituimos en [4]: $b_{22} = -\frac{3}{2}$

Por tanto, $\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 1 & 5/2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 & -3/2 \\ -1 & -3/2 \end{pmatrix}}$

b) $\boxed{|M^2| = |MM| = |M||M| = 7^2 = 49}$

$\boxed{|2M| = 2^2|M| = 4 \cdot 7 = 28}$

(4A) a) Si el producto escalar del vector normal del plano y el vector director de la recta es nulo, la recta y el plano son paralelos o la recta está contenida en el plano. En este último caso, tendrán algún punto en común.
De no ser cero el producto escalar, la recta y el plano se cortan en un plano.

- $x = 2y \Rightarrow 2\cdot 2y + y + az = 0 \Rightarrow 5y + az = 0 \Rightarrow z = -\frac{5}{a}y \Rightarrow$

  $\Rightarrow \vec{u}_r = \left(2, 1, -\frac{5}{a}\right)$

- $\vec{n}_\pi = (1, -1, -1)$

- $\vec{n}_\pi \cdot \vec{u}_r = (1,-1,-1)\cdot\left(2,1,-\frac{5}{a}\right) = 2 - 1 + \frac{5}{a} = 1 + \frac{5}{a}$

  $\vec{n}_\pi \cdot \vec{u}_r = 0 \Rightarrow a = -5$

- Si $a = -5 \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 2a\lambda = -10\lambda \\ y = a\lambda = -5\lambda \\ z = -5\lambda \end{cases} \Rightarrow R(0,0,0) \in r$ y sustituyendo en la ecuación del plano: $0 - 0 - 0 \neq -5 \Rightarrow R \notin \pi$

Discusión:
Si $a \neq -5 \Rightarrow r$ y π se cortan en un punto.
Si $a = -5 \Rightarrow r$ y π son paralelos

b) $\forall a \in \mathbb{R} - \{-5\}$, r y π se cortan en un punto $\Rightarrow d(r,\pi) = 0$

Si $a = -5 \Rightarrow x - y - z = -5 \Rightarrow \pi \equiv x - y - z + 5 = 0$

$$d(r,\pi) = d(R,\pi) = \frac{|0 - 0 - 0 + 5|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}\ u$$

Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado.

Bachillerato L. O. E.

Materia: MATEMÁTICAS II

PROPUESTA B

1B. a) Calcula los valores de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ para que la función

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx}{x + 1}$$

tenga como asíntota oblicua la recta $y = 2x + 3$. **(1,5 puntos)**

b) Para los valores encontrados, escribe la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisas $x = 0$. **(1 punto)**

2B. Calcula las siguientes integrales:

$$\int \frac{2\,\mathrm{sen}x\,\cos x}{1 + \mathrm{sen}^2 x}\,dx, \qquad \int \frac{x^2 + x - 4}{x^3 - 4x}\,dx \qquad \textbf{(1,25 puntos por integral)}$$

3B. a) Sabiendo que

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = 2$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$, calcula los determinantes

$$\begin{vmatrix} a-1 & b-1 & c-1 \\ a^2-1 & b^2-1 & c^2-1 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} (a+1)^2 & (b+1)^2 & (c+1)^2 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

indicando las propiedades que usas en cada caso para justificar tu respuesta. **(2 puntos)**

b) Razona que, puesto que $|A| = 2$, los parámetros a, b y c deben ser distintos entre sí (no puede haber dos iguales). **(0,5 puntos)**

4B. a) Estudia la posición relativa de las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + y - 2z = 1 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x - z = 0 \\ x + 2y - z = 12 \end{cases} \qquad \textbf{(1,25 puntos)}$$

b) Calcula la distancia entre las rectas r y s. **(1,25 puntos)**

Junio 2013

Propuesta B

1B a) $y = mx + n = 2x + 3$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{ax^2+bx}{x+1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{ax^2+bx}{x(x+1)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{ax^2+bx}{x^2+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{ax^2}{x^2}+\frac{bx}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{a+\frac{b}{x}}{1+\frac{1}{x}} = \boxed{a = 2}$$

$$n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{2x^2+bx}{x+1} - 2x\right] = [\infty - \infty] =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^2+bx-2x(x+1)}{x+1}\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^2+bx-2x^2-2x}{x+1}\right) =$$

$$= \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{bx}{x}-\frac{2x}{x}}{\frac{x+1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{b-2}{1+\frac{1}{x}} = b-2 = 3 \Rightarrow \boxed{b = 5}$$

b) $f(x) = \dfrac{2x^2+5x}{x+1}$

$$f'(x) = \frac{(4x+5)(x+1) - (2x^2+5x)\cdot 1}{(x+1)^2}$$

$f'(0) = 5$, $f(0) = 0$ } La ec. de la recta tangente a f en $x=0$ es:

$$y - f(0) = f'(0)(x-0)$$

$$\boxed{y = 5x}$$

2B a) $\displaystyle\int \frac{2\operatorname{sen} x \cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\,dx = \left[\begin{matrix} t = 1+\operatorname{sen}^2 x \\ dt = 2\operatorname{sen} x \cos x\, dx \end{matrix}\right] = \int \frac{dt}{t} = \log t =$

$$= \boxed{\log(1+\operatorname{sen}^2 x) + C}$$ donde log es el logaritmo natural.

b) $\displaystyle\int \frac{x^2+x-4}{x^3-4x}\,dx$

Descomponemos $\dfrac{x^2+x-4}{x^3-4x}$ en fracciones simples:

$$x^3 - 4x = x(x^2-4) = x(x+2)(x-2)$$

$$\frac{x^2+x-4}{x^3-4x} = \frac{x^2+x-4}{x(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2} = \frac{A(x-2)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-2)}{x(x-2)(x+2)}$$

$$\Rightarrow A(x-2)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-2) = x^2+x-4$$

$x=2 \Rightarrow A(2-2)(2+2)+2B(2+2)+2C(2-2) = 2^2+2-4 \Rightarrow B = \frac{1}{4}$

$x=0 \Rightarrow A(0-2)(0+2)+B\cdot 0(0+2)+C\cdot 0(0-2) = 0^2+0-4 \Rightarrow A = 1$

$x=-2 \Rightarrow A(-2-2)(-2+2)+B(-2)(-2+2)+C(-2)(-2-2) = (-2)^2+(-2)-4 \Rightarrow C = -\frac{1}{4}$

$$\frac{x^2+x-4}{x^3-4x} = \frac{1}{x} + \frac{\frac{1}{4}}{x-2} + \frac{-\frac{1}{4}}{x+2}$$

Calculamos la integral:

$$\int \frac{x^2+x-4}{x^3-4x}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx + \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-2}\,dx - \frac{1}{4}\int \frac{1}{x+2}\,dx =$$

$$= \boxed{\log x + \frac{1}{4}\log(x-2) - \frac{1}{4}\log(x+2) + C}$$ donde log es el logaritmo natural

3B a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = 2$

$$\begin{vmatrix} a-1 & b-1 & c-1 \\ a^2-1 & b^2-1 & c^2-1 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} \underset{[1]}{=} \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2-1 & b^2-1 & c^2-1 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2-1 & b^2-1 & c^2-1 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$\underset{[1]}{=} \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ -1 & -1 & -1 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$\underset{[2]\,[3]\,[4]}{=} 5\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} + 5(-1)\underbrace{\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}_{=0} + 5\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}_{=0} + (-1)\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}}_{=0} =$$

$$= 5\cdot 2 = \boxed{10}$$

[1]: Un determinante, con una fila o columna formada por la suma de dos números, puede descomponerse en suma de otros dos determinantes que tienen las mismas filas o columnas restantes y, en lugar de aquella, otra formada por los primeros y segundos sumandos, respectivamente.

[2]: Si multiplicamos una fila o columna por un nº, el valor del determinante queda multiplicado por dicho número.

[3]: El determinante de una matriz con dos filas o columnas iguales es cero.

[4]: Si se intercambian dos filas o dos columnas, cambia el signo del determinante.

$$\begin{vmatrix} (a+1)^2 & (b+1)^2 & (c+1)^2 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2+2a+1 & b^2+2b+1 & c^2+2c+1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} =$$

$$\overset{[1]}{\overset{[3]}{=}} \underbrace{\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}}_{=0} + \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} =$$

$$\overset{[2]}{\overset{[3]}{=}} 2 \underbrace{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}}_{=0} + 2 = \boxed{2}$$

b) $$2 = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \overset{\substack{-aF_1+F_2 \\ -a^2F_1+F_3}}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ (b+a)(b-a) & (c+a)(c-a) \end{vmatrix} = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+a & c+a \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a)[c+a-(b+a)] = (b-a)(c-a)(c-b) = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b-a \neq 0 \Rightarrow \boxed{b \neq a} \\ c-a \neq 0 \Rightarrow \boxed{c \neq a} \\ c-b \neq 0 \Rightarrow \boxed{c \neq b} \end{cases}$$

4B

a) $$r \equiv \begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+y-2z=1 \end{cases} \Rightarrow y=1 \Rightarrow x+1-z=1 \Rightarrow x=z \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=1 \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{u}_r = (1,0,1)$$

$$s \equiv \begin{cases} x-z=0 \\ x+2y-z=12 \end{cases} \Rightarrow x=z \Rightarrow z+2y-z=12 \Rightarrow y=6 \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x=\mu \\ y=6 \\ z=\mu \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{u}_s = (1,0,1)$$

Como $\vec{u}_r = \vec{u}_s$ y $P_r(0,1,0) \notin s$, se tiene que **las rectas son paralelas**

b) $R(0,1,0)$

$\vec{n}_\pi = \vec{u}_r = \vec{u}_s = (1,0,1)$

$\overrightarrow{RG} = (x,y,z) - (0,1,0) = (x, y-1, z)$

$G \in \pi$ (genérico)

$\left.\begin{array}{l} \vec{n}_\pi = \vec{u}_r = \vec{u}_s = (1,0,1) \\ \overrightarrow{RG} = (x,y,z) - (0,1,0) = (x, y-1, z) \\ G \in \pi \text{ (genérico)} \end{array}\right\} \vec{n}_\pi \perp \overrightarrow{RG} \Rightarrow \vec{n}_\pi \cdot \overrightarrow{RG} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (1,0,1)\cdot(x, y-1, z) = 0 \Rightarrow$

$\pi \equiv x + z = 0$

Como $\pi \equiv x + z = 0 \Rightarrow \mu + \mu = 0 \Rightarrow \mu = 0 \Rightarrow S \begin{cases} x = 0 \\ y = 6 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow S(0,6,0)$

Se tiene que:

$$\boxed{d(r,s) = d(R,S) = \sqrt{(0-0)^2 + (6-1)^2 + (0-0)^2} = 5u}$$

Septiembre 2013

UCLM
UNIVERSIDAD DE CASTILLA-LA MANCHA

Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado.

Bachillerato L. O. E.

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Puedes utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.

PROPUESTA A

1A. a) Calcula el valor de $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, para que la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - e^{-x}}{ax}, & \text{si } x < 0 \\ \left(\dfrac{2x+7}{2x+1}\right)^x, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

sea continua en $x = 0$. **(1,25 puntos)**

b) Calcula el límite

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \qquad \textbf{(1,25 puntos)}$$

2A. Calcula las siguientes integrales:

$$\int \frac{1 + x + \sqrt{x}}{x^2}\, dx, \qquad \int \frac{e^x}{e^{2x} - 3e^x + 2}\, dx \qquad \textbf{(1,25 puntos por integral)}$$

Observación: El cambio de variable $t = e^x$ puede ayudarte a calcular la segunda integral.

3A. a) Despeja X en la ecuación matricial $X \cdot A - B = 2X$, donde A, B y X son matrices cuadradas de orden 3. **(1,25 puntos)**

b) Calcula X, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(1,25 puntos)}$$

4A. a) Estudia la posición relativa de las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x - 2z = 1 \\ y - z = 2 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad s \equiv \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y + 2z = a \end{cases}$$

en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$. **(2 puntos)**

b) Encuentra el punto de corte de las rectas en el caso en que sean secantes. **(0,5 puntos)**

(sigue a la vuelta)

Septiembre 2013

Propuesta A

1A $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-e^{-x}}{ax} & \text{si } x<0\\ \left(\dfrac{2x+7}{2x+1}\right)^x & \text{si } x\geq 0\end{cases}$$

a) Cada una de las funciones componentes es continua en su dominio, por ser funciones elementales, cuyos denominadores no se anulan.

Continuidad en $x=0$: ¿$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$?

$$\lim_{x\to 0} f(x)\begin{cases}\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\dfrac{e^x-e^{-x}}{ax}=\left[\dfrac{0}{0}\right]\overset{\text{l'Hôpital}}{=}\lim_{x\to 0^-}\dfrac{e^x+e^{-x}}{a}=\dfrac{2}{a}\\ \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\dfrac{2x+7}{2x+1}\right)^x=7^0=1=f(0)\end{cases}\Rightarrow a=2$$

Para $\boxed{a=2}$, f es continua.

b) $$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+7}{2x+1}\right)^x=[1^\infty]=e^\alpha \text{ donde}$$

$$\alpha=\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{2x+7}{2x+1}-1\right)=[\infty\cdot 0]=\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\cancel{2x}+7-\cancel{2x}-1}{2x+1}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x}{2x+1}=\frac{6}{2}=3$$

Por tanto, $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=e^3}$

2A a) $$\int\frac{1+x+\sqrt{x}}{x^2}dx=\int\frac{1}{x^2}dx+\int\frac{x}{x^2}dx+\int\frac{\sqrt{x}}{x^2}dx=$$

$$=\int x^{-2}dx+\int\frac{1}{x}dx+\int x^{-3/2}dx=\frac{x^{-1}}{-1}+\log x+\frac{x^{-1/2}}{-\frac{1}{2}}=$$

$$=\boxed{-\frac{1}{x}+\log x-2\frac{1}{\sqrt{x}}+C}$$

b) $$\int\frac{e^x}{e^{2x}-3e^x+2}dx=\left[\begin{matrix}t=e^x\\ dt=e^x dx\end{matrix}\right]=\int\frac{dt}{t^2-3t+2}$$

Descomponemos en fracciones simples

$$\frac{1}{t^2-3t+2}=\frac{1}{(t-1)(t-2)}=\frac{A}{t-1}+\frac{B}{t-2}=\frac{A(t-2)+B(t-1)}{(t-1)(t-2)}=$$

$$= \frac{At - 2A + Bt - B}{(t-1)(t-2)} = \frac{(A+B)t + (-2A-B)}{(t-1)(t-2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (A+B)t + (-2A-B) = 1 \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \Rightarrow A=-B \\ -2A-B=1 \end{cases} \Downarrow$$

$$+2B-B=1 \Rightarrow B=1 \Rightarrow A=-1$$

Calculamos la integral

$$\int \frac{dt}{t^2-3t+2} = \int \frac{-1}{t-1}\,dt + \int \frac{1}{t-2}\,dt = -\log(t-1) + \log(t-2) =$$

$$= \boxed{-\log(e^x-1) + \log(e^x-2) + C}$$ donde log es el logaritmo natural.

(3A) a) $XA - B = 2X \Rightarrow XA - 2IX = B \Rightarrow XA - X(2I) = B \Rightarrow$

$\Rightarrow X(A-2I) = B \Rightarrow X(A-2I)(A-2I)^{-1} = B(A-2I)^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{X = B(A-2I)^{-1}}$

Calculamos $A-2I$

$$A-2I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos $(A-2I)^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-F_1+F_3]{-2F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-2F_2+F_3}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Calculamos X

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & -2 \\ 11 & -7 & 3 \end{pmatrix}}$$

4A a) $r \equiv x = 1 + 2z \Rightarrow y = 2 + z \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

$s \equiv 3y - z = 1 - a \Rightarrow z = a - 1 + 3y \Rightarrow x + y + a - 1 + 3y = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = -a + 2 - 4y \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = -a + 2 - 4\mu \\ y = \mu \\ z = a - 1 + 3\mu \end{cases}$

$$\begin{cases} 1 + 2\lambda = -a + 2 - 4\mu \\ 2 + \lambda = \mu \\ \lambda = a - 1 + 3\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda + 4\mu = 1 - a \\ \lambda - \mu = -2 \\ \lambda - 3\mu = a - 1 \end{cases}$$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 1-a \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -3 & a-1 \end{array}\right)$$

$$\det(A|B) = -2(a-1) - 3(1-a) - 8 + 1 - a - 12 - 4(a-1) =$$
$$= -2a + 2 - 3 + 3a - 8 + 1 - a - 12 - 4a + 4 =$$
$$= -4a - 16 = 0 \Rightarrow a = -4$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Así, si $a = -4 \Rightarrow$ rango A = 2 = rango $(A|B)$ = nº de incógnitas $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ S.C.D. $\Rightarrow$ r y s se cortan en un punto

si $a \neq -4 \Rightarrow$ rango $A = 2 < 3 =$ rango $(A|B) \Rightarrow$ S.I. $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ r y s se cruzan.

b) Si $a = -4 \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda + 4\mu = 5 \\ \lambda - \mu = -2 \\ \lambda - 3\mu = -5 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-1)} \begin{array}{r} -\lambda + \mu = 2 \\ \lambda - 3\mu = -5 \\ \hline -2\mu = -3 \Rightarrow \mu = \frac{3}{2} \Rightarrow \end{array}$

$\Rightarrow \lambda = -2 + \mu = -2 + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$

El punto de corte es: $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda = 1 - 1 = 0 \\ y = 2 + \lambda = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ z = \lambda = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\left(0, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)}$

Comprobación: sustituimos en s:

$$\begin{array}{l} x = -(-4) + 2 - 4\frac{3}{2} = 0 \\ y = \frac{3}{2} \\ z = -4 - 1 + 3\frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \end{array} \Rightarrow \left(0, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado.

Bachillerato L. O. E.

Materia: MATEMÁTICAS II

PROPUESTA B

1B. a) Interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto. **(1 punto)**

b) Halla el punto de la gráfica de la función $f(x) = x^3+3x^2+1$ donde la recta tangente tiene pendiente mínima. **(1,5 puntos)**

2B. a) Esboza la región encerrada entre las gráficas de las funciones $f(x) = 1/x$ y $g(x) = -2x + 3$. **(0,5 puntos)**

b) Calcula el área de la región anterior. **(2 puntos)**

3B. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x + y - 5z = -1 \\ 2x - y - 3z = 1 - m \\ x - 2y + 2z = m \end{cases}$$ **(1,5 puntos)**

b) Calcula la solución cuando el sistema sea compatible indeterminado. **(1 punto)**

4B. a) Dados los puntos $P(4, 2, 3)$ y $Q(2, 0, -5)$, da la ecuación implícita del plano π de modo que el punto simétrico de P respecto a π es Q. **(1,25 puntos)**

b) Calcula el valor del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ para que el plano determinado por los puntos P, Q y $R(\lambda, 1, 0)$ pase por el origen de coordenadas. **(1,25 puntos)**

Septiembre 2013

Propuesta B

1B a) La derivada de una función $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = a$, es igual a la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto.

b) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$

$f'(x) = 3x^2 + 6x$

$f'(x) = 0 \iff 3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow 3x(x+2) = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ -2 \end{cases}$

$f''(x) = 6x + 6$

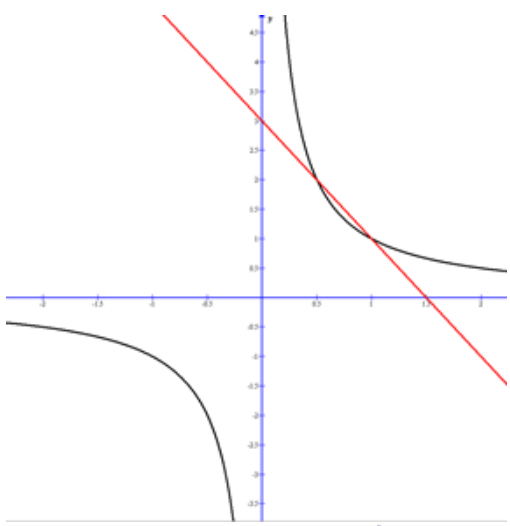
$f''(0) = 6 > 0 \Rightarrow x = 0$ es un mínimo (relativo) de f

$f''(x) = 0 \iff 6x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1$

$f'''(x) = 6$

$f'''(-1) = 6 > 0 \Rightarrow$ $x = -1$ es un mínimo (relativo) de la pendiente de la recta tangente.

2B a)



$f(x) = \frac{1}{x}$

x	y
1	1
0,1	10
10	0,1
−1	−1
−0,1	−10
−10	−0,1

$g(x) = -2x + 3$

x	y
0	3
1	1

b) Puntos de corte entre las funciones

$f(x) = g(x) \Rightarrow \frac{1}{x} = -2x + 3 \Rightarrow 1 = -2x^2 + 3x \Rightarrow 0 = -2x^2 + 3x - 1$

$\Rightarrow x = \begin{cases} 1 \\ 1/2 \end{cases}$

Área

$$A = \int_{1/2}^{1} (g(x) - f(x))\,dx = \int_{1/2}^{1} \left(-2x + 3 - \frac{1}{x}\right) dx = -2\frac{x^2}{2} + 3x - \log x \Big]_{1/2}^{1} =$$

$$= -1^2 + 3\cdot 1 - \log 1 - \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3\cdot\frac{1}{2} - \log\frac{1}{2}\right) = \boxed{\left(\frac{3}{4} + \log\frac{1}{2}\right) u^2}$$

$$= \frac{3}{4} + \log 1 - \log 2 = \boxed{\left(\frac{3}{4} - \log 2\right) u^2}$$

3B

$$\begin{cases} x + y - 5z = -1 \\ 2x - y - 3z = 1 - m \\ x - 2y + 2z = m \end{cases}$$

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 1-m \\ 1 & -2 & 2 & m \end{array}\right) \xrightarrow[-F_1 + F_3]{-2F_1 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -5 & -1 \\ 0 & -3 & 7 & 3-m \\ 0 & -3 & 7 & m+1 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_2 + F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -5 & -1 \\ 0 & -3 & 7 & 3-m \\ 0 & 0 & 0 & 2m-2 \end{array}\right) [1]$$

De [1]: $2m - 2 = 0 \Rightarrow m = 1$

Discusión:

Si $m \neq 1 \Rightarrow$ rango $A = 2 \neq$ rango $(A|B) = 3 \Rightarrow$ S.I.

Si $m = 1 \Rightarrow$ rango $A = 2 =$ rango $(A|B) < 3 =$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ S.C.I.

b) $m = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -5 & -1 \\ 0 & -3 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} [1] \\ [2] \end{matrix}$$

Llamamos $z = \lambda$ y sustituimos en [2]: $-3y + 7\lambda = 2 \Rightarrow y = \frac{2 - 7\lambda}{-3} = \frac{-2 + 7\lambda}{3}$

Sustituimos en [1]: $x + y - 5z = -1$

$$x = -1 - y + 5z = -1 - \frac{-2 + 7\lambda}{3} + 5\lambda = \frac{8\lambda - 1}{3}$$

Soluciones: $\boxed{(x, y, z) = \left(\frac{8\lambda - 1}{3}, \frac{7\lambda - 2}{3}, \lambda\right) \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}}$

4A a) $\overrightarrow{PQ}$ es el vector normal del plano π, que es perpendicular a $\overrightarrow{SG}$, donde S es el punto medio de $\overline{PQ}$ (y pertenece al plano buscado) y G es un pto genérico del plano.

$$S \begin{cases} x_S = \frac{4+2}{2} = 3 \\ y_S = \frac{2+0}{2} = 1 \\ z_S = \frac{3+(-5)}{2} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{n}_\pi = \overrightarrow{PQ} = (2, 0, -5) - (4, 2, 3) = (-2, -2, -8) \\ \overrightarrow{SG} = (x, y, z) - (3, 1, -1) = (x-3, y-1, z+1) \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \vec{n}_{\pi} \cdot \overrightarrow{SG} = 0 \Rightarrow (-2,-2,-8)\cdot(x-3, y-1, z+1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -2(x-3) - 2(y-1) - 8(z+1) = 0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv x + y + 4z = 0}$

b) $\pi' \equiv \begin{cases} \overrightarrow{PQ} = (-2,-2,-8) \\ \overrightarrow{PR} = (\lambda, 1, 0) - (4,2,3) = (\lambda-4, -1, -3) \\ \overrightarrow{PG} = (x,y,z) - (4,2,3) = (x-4, y-2, z-3) \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \pi' \equiv \begin{vmatrix} x-4 & y-2 & z-3 \\ \lambda-4 & -1 & -3 \\ -2 & -2 & -8 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 8(x-4) - 2(\lambda-4)(z-3) + 6(y-2) - 2(z-3) - 6(x-4) + 8(\lambda-4)(y-2) = 0 \equiv \pi'$$

Imponemos que $(0,0,0) \in \pi'$ para calcular λ:

$8(0-4) - 2(\lambda-4)(0-3) + 6(0-2) - 2(0-3) - 6(0-4) + 8(\lambda-4)(0-2) =$

$= -32 + 6\lambda - 24 - 12 + 6 + 24 - 16\lambda + 64 = 0 \Rightarrow 26 - 10\lambda = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{26}{10} = \frac{13}{5}}$

Reserva 1 de 2013

Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado.

Bachillerato L. O. E.

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Puedes utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.

PROPUESTA A

1A. a) Enuncia el Teorema de Rolle. **(1 punto)**

b) Razona que existe al menos un punto en el intervalo $(1, 2)$ donde la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 4x + 12$ tiene pendiente nula. **(1,5 puntos)**

2A. Calcula el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, para que el área de la región comprendida entre las gráficas de las parábolas $f(x) = -x^2 + a^2$ y $g(x) = -4x^2 + 4a^2$ sea 32 unidades de superficie. **(2,5 puntos)**

3A. a) Despeja X en la ecuación matricial $A \cdot X = I_3 - 2B \cdot X$, donde I_3 es la matriz identidad de orden 3 y A, B y X son matrices cuadradas de orden 3. **(1,25 puntos)**

b) Calcula X, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ **(1,25 puntos)**

4A. Dados los planos $\pi \equiv ax + 2y + z = 4$, $a \in \mathbb{R}$, y $\pi' \equiv 2x - 4y - 2z = b$, $b \in \mathbb{R}$:

a) Razona para qué valores de $a, b \in \mathbb{R}$ son π y π' coincidentes. **(1 punto)**

b) Razona para qué valores de $a, b \in \mathbb{R}$ son π y π' paralelos no coincidentes. **(0,75 puntos)**

a) Razona para qué valores de $a, b \in \mathbb{R}$ son π y π' perpendiculares. **(0,75 puntos)**

(sigue a la vuelta)

Reserva 1 - 2013

Propuesta A

1A a) **Teorema de Rolle**

Si $f(x)$ es una función continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y tal que $f(a)=f(b)$, entonces $\exists\, c\in(a,b)$ t.q. $f'(c)=0$.

b) La función $f(x)=x^5+3x^4-5x^3-15x^2+4x+12$ es continua y derivable en $\mathbb{R}$ (por ser una función polinómica), luego en particular, es continua en $[1,2]$ y derivable en $(1,2)$. Además

$$f(1)=1^5+3\cdot1^4-5\cdot1^3-15\cdot1^2+4\cdot1+12=0=$$
$$=2^5+3\cdot2^4-5\cdot2^3-15\cdot2^2+4\cdot2+12=f(2)$$

Aplicando el teorema de Rolle, $\exists\, c\in(1,2)$ t.q. $f'(c)=0$, esto es, en c la pendiente de la recta tangente es nula.

2A **Puntos de corte entre las funciones**

$$-x^2+a^2=-4x^2+4a^2 \Rightarrow -3x^2+3a^2=0 \Rightarrow x=a^2 \Rightarrow x=\pm a$$

Como $0\in(-a,a)$:

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=a^2 \\ g(0)=4a^2 \end{array}\right\} \Rightarrow g(x)>f(x)$$

Área (hay que tener en cuenta que $a>0$)

$$32=\int_0^a [g(x)-f(x)]\,dx=\int_0^a [-4x^2+4a^2-(-x^2+a^2)]\,dx=$$
$$=\int_0^a (-3x^2+3a^2)\,dx=-3\frac{x^3}{3}+3a^2x\Big]_0^a=-a^3+3a^3=2a^3=32 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a^3=16 \Rightarrow \boxed{a=\sqrt[3]{16}=2\sqrt[3]{2}}$$

3A a) $AX=I-2BX \Rightarrow AX+2BX=I \Rightarrow (A+2B)X=I \Rightarrow$

$$\Rightarrow (A+2B)^{-1}(A+2B)X=(A+2B)^{-1}I \Rightarrow \boxed{X=(A+2B)^{-1}I=(A+2B)^{-1}}$$

b) **Cálculo de $A+2B$**

$$A+2B=\begin{pmatrix}1&0&1\\-2&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\-2&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&2&0\\2&0&2\\2&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&0\\2&0&3\end{pmatrix}$$

Cálculo de $(A+2B)^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-2F_1+F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{4F_2+F_3}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_3+F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 3 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-2F_2+F_1}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 & 5 \end{array}\right)$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}}$$

4A a) Los vectores normales de ambos planos tienen que ser iguales o proporcionales, y además tienen que tener puntos en común.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n}_{\pi} = (a, 2, 1) \\ \vec{n}_{\pi'} = (2, -4, -2) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{2}{-4} = \frac{1}{-2} \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{1}{-2} \Rightarrow \boxed{a = -1}$$

$P_{\pi}(1,2,z) \in \pi \Rightarrow z: -1+2\cdot 2+z-4=0 \Rightarrow z=1 \Rightarrow P_{\pi}(1,2,1)$

El pto $P_{\pi} \in \pi' \Rightarrow 2\cdot 1-4\cdot 2-2\cdot 1=b \Rightarrow \boxed{b=-8}$

b) En este caso, los vectores normales tienen que ser iguales o proporcionales y no tener ningún punto en común.

De otra forma: rango $A=1$ y rango $(A|B)=2$

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \text{ y } (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 2 & 1 & 4 \\ 2 & -4 & -2 & b \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} a & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -4a-4 \Rightarrow \boxed{a=-1} \Rightarrow \text{rango } A = 1 \text{ ya que } \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & b \end{vmatrix} = b+8 \Rightarrow b=-8$$

$$\boxed{\text{Si } a=-1 \text{ y } b \neq -8 \Rightarrow \pi \parallel \pi'}$$

c) $\pi \perp \pi' \Leftrightarrow \vec{n}_\pi \perp \vec{n}_{\pi'} \Leftrightarrow \vec{n}_\pi \cdot \vec{n}_{\pi'} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (a,2,1)\cdot(2,-4,-2) = 0 \Rightarrow 2a - 8 - 2 = 0 \Rightarrow a = 5$

Si $a = 5$ y $b \in \mathbb{R}$, se tiene que $\pi \perp \pi'$.

Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado.

Bachillerato L. O. E.

Materia: MATEMÁTICAS II

PROPUESTA B

1B. a) Calcula para qué valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ se verifica la igualdad

$$\lim_{x\to 0}(\cos(ax))^{\frac{1}{x^2}} = e^{-2} \qquad \textbf{(1,25 puntos)}$$

b) Calcula el límite

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right) \qquad \textbf{(1,25 puntos)}$$

2B. Calcula las siguientes integrales:

$$\int \frac{2\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\,dx, \qquad \int (x^2+2x)\ln x\,dx \qquad \textbf{(1,25 puntos por integral)}$$

3B. Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ -4x - 2y + mz = 0 \\ 3x + y + 2z = 0 \end{cases} \qquad m \in \mathbb{R}$$

a) ¿Existe algún valor del parámetro m para el que el sistema sea incompatible? **(0,5 puntos)**

b) Estudia para qué valor del parámetro m el sistema tiene alguna solución distinta de la trivial $x = y = z = 0$. **(1 punto)**

c) Resuelve el sistema para todos los valores de $m \in \mathbb{R}$. **(1 punto)**

4B. Dados el punto $P(1,0,1)$ y la recta

$$r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = 2+\lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

a) Da unas ecuaciones paramétricas de la recta s que corta perpendicularmente a r y pasa por el punto P. **(1,25 puntos)**

b) Calcula el punto simétrico Q de P respecto a r. **(1,25 puntos)**

Reserva 1 - 2013

Propuesta B

1B a) $\lim_{x\to 0} [\cos(ax)]^{1/x^2} = e^{-2}$

$[1^\infty] = e^\alpha$ donde $\alpha = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}(\cos(ax)-1) = [\infty \cdot 0] =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos(ax)-1}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-a\,\text{sen}(ax)}{2x} = \left[\frac{0}{0}\right] \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-a^2\cos(ax)}{2} = \frac{-a^2}{2}$

Por tanto, $e^{-a^2/2} = e^{-2} \Rightarrow -\frac{a^2}{2} = -2 \Rightarrow -a^2 = -4 \Rightarrow \boxed{a = \pm 2}$

b) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}\right) = \infty \cdot (\infty - \infty) =$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}\left(x+1-(x-1)\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} =$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}{\sqrt{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}+\sqrt{\frac{x}{x}-\frac{1}{x}}} =$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}} = \boxed{1}$

2B a) $\int \frac{2\cos x}{1+\text{sen}^2 x}\,dx = \left[\begin{matrix} t = \text{sen}\,x \\ dt = \cos x\,dx \end{matrix}\right] = 2\int \frac{dt}{1+t^2} = 2\,\text{arctg}(t) =$

$= \boxed{2\,\text{arctg}(\text{sen}\,x) + C}$

b) $\int (x^2+2x)\ln x\,dx = \left[\begin{matrix} u = \ln x \longrightarrow du = \frac{1}{x}dx \\ dv = (x^2+2x)\,dx \longrightarrow v = \frac{x^3}{3}+x^2 \end{matrix}\right] = \left(\frac{x^3}{3}+x^2\right)\ln x -$

$- \int \left(\frac{x^3}{3}+x^2\right)\frac{1}{x}\,dx = \left(\frac{x^3}{3}+x^2\right)\ln x - \int\left(\frac{x^2}{3}+x\right)dx =$

$= \boxed{\left(\frac{x^3}{3}+x^2\right)\ln x - \frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{2} + C}$

3B

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ -4x-2y+mz=0 \\ 3x-2y+mz=0 \end{cases}$$

a) Es un sistema homogéneo, luego $\boxed{\nexists\, m\in\mathbb{R}}$ t.q. el sistema sea incompatible.

b) Si no hay solución trivial, el sistema tiene que ser <u>compatible indeterminado</u>, luego rango A = rango $(A|B) \leq 2$, ya que el sistema tiene 3 incógnitas.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & m \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & m-4 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & m-4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 10+2m-8=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{m=-1}$$

Si $m=-1 \Rightarrow |A|=0 \Rightarrow$ rango A = rango $(A|B) = 2 < 3 = $ nº de incógnitas $\Rightarrow$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$$

$\Rightarrow$ el sistema es compatible indeterminado.

c) $m=-1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -4 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[-3F_1+F_3]{4F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2+F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & +2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

De la segunda ecuación: $\left.\begin{array}{r} 2y-5z=0 \\ z=\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow y=\frac{5}{2}\lambda$

Sustituimos en la 1ª ecuación:

$$x+y-z=0 \Rightarrow x=-y+z=-\frac{5}{2}\lambda+\lambda=\frac{-3}{2}\lambda$$

$$\boxed{\text{Solución: } (x,y,z)=\left(-\tfrac{3}{2}\lambda, \tfrac{5}{2}\lambda, \lambda\right),\ \lambda\in\mathbb{R}}$$

4B

$$r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=2+\lambda \end{cases}, \quad \lambda\in\mathbb{R}$$

a) $$s \equiv \begin{cases} \text{Punto: } P(1,0,1) \\ \text{Vector director: } \overrightarrow{PR} \text{ donde } R \text{ es un punto genérico de } r \end{cases}$$

Se tiene que $\overrightarrow{PR} \perp \vec{u}_r = (1,1,1)$ (vector director de r)

$$\overrightarrow{PR} = (\lambda, 1+\lambda, 2+\lambda) - (1,0,1) = (\lambda-1, \lambda+1, \lambda+1)$$

$\vec{u_r} \cdot \vec{PR} = 0 \Rightarrow (2,1,1)\cdot(\lambda-1, \lambda+1, \lambda+1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2(\lambda-1) + \lambda + 1 + \lambda + 1 = 0 \Rightarrow 4\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow R\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow R(0,1,2)$

$\Rightarrow \vec{PR} = (0,1,2) - (1,0,1) = (-1,1,1)$

$$s \equiv \begin{cases} x = 1 - \mu \\ y = \mu \\ z = 1 + \mu \end{cases} \text{ con } \mu \in \mathbb{R}$$

b) El punto R hallado en el apartado anterior, es el punto medio entre P y Q.

$$\left.\begin{array}{l} 0 = \dfrac{1 + x_Q}{2} \Rightarrow x_Q = -1 \\ 1 = \dfrac{0 + y_Q}{2} \Rightarrow y_Q = 2 \\ 2 = \dfrac{1 + z_Q}{2} \Rightarrow z_Q = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{Q(-1,2,3)}$$

UCLM
UNIVERSIDAD DE CASTILLA-LA MANCHA

Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado.

Bachillerato L. O. E.

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Puedes utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.

PROPUESTA A

1A. Si la media aritmética de dos números reales positivos es 24, calcula el valor de dichos números para que el producto de uno de ellos por el cuadrado del otro sea máximo. **(2,5 puntos)**

2A. Calcula las siguientes integrales:

$$\int \left(\frac{2\ln x}{x} + \ln x \right) dx, \qquad \int 3\sqrt{2x+1}\, dx \qquad \textbf{(1,25 puntos por integral)}$$

3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} & & 2y & - & z & = & m \\ 3x & & & - & 2z & = & 11 \\ & & y & + & z & = & 6 \\ 2x & + & y & - & 4z & = & m \end{cases} \qquad \textbf{(1,5 puntos)}$$

b) Calcula la solución cuando el sistema sea compatible determinado. **(1 punto)**

4A. Dado el plano $\pi \equiv x - z = 0$ y las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 \\ z = -1 - \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R} \qquad \text{y} \qquad s \equiv \begin{cases} x + y = 2 \\ 4y + 2z = 6 \end{cases}$$

a) Halla el ángulo que forman π y r. Razona cuántos planos hay perpendiculares a π que contengan la recta r. **(1,25 puntos)**

b) Halla la posición relativa de π y s. Razona cuántos planos hay perpendiculares a π que contengan la recta s. **(1,25 puntos)**

(sigue a la vuelta)

Reserva 2 - 2013

Propuesta A

1A Sean x e y los números que buscamos.

$$\frac{x+y}{2} = 24 \longrightarrow y = 48 - x$$

$$P = xy^2$$

$$p(x) = x(48-x)^2$$

$$p'(x) = (48-x)^2 + x \cdot 2(48-x)(-1) = 3x^2 - 192x + 2304$$

$$p'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 192x + 2304 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 48 \\ 16 \end{cases}$$

$$p''(x) = 6x - 192$$

$$p''(48) = 6 \cdot 48 - 192 = 96 > 0$$

$$p''(16) = 6 \cdot 16 - 192 = -96 < 0 \Rightarrow x = 16 \text{ es un máx. (relativo)}$$

Por tanto, **los nºs buscados son 16 y 48 − 16 = 32.**

2A a) $$\int \left(\frac{2\ln x}{x} + \ln x\right) dx = 2\int \frac{\ln x}{x}\,dx + \int \ln x\,dx =$$

$$= 2\underbrace{\int \ln x \cdot \frac{1}{x}\,dx}_{\text{inmediata}} + \int \ln x\,dx = \left[\begin{array}{l} \text{Para la 2ª integral:} \\ u = \ln x \rightarrow du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx \rightarrow v = x \end{array}\right] =$$

$$= 2\frac{\ln^2 x}{2} + x\ln x - \int x\,\frac{dx}{x} = \boxed{\ln^2 x + x\ln x - x + C}$$

b) $$\int 3\sqrt{2x+1}\,dx = \left[\begin{array}{l} t^2 = 2x+1 \\ dx = t\,dt \end{array}\right] = \int 3t \cdot t\,dt = 3\frac{t^3}{3} = \boxed{\sqrt{(2x+1)^3} + C}$$

3A a)
$$\begin{cases} 2y - z = m \\ 3x - 2z = 11 \\ y + z = 6 \\ 2x + y - 4z = m \end{cases}$$

$$|(A|B)| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 & m \\ 3 & 0 & -2 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -4 & m \end{vmatrix} \overset{-2F_3+F_1}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -3 & m-12 \\ 3 & 0 & -2 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -4 & m \end{vmatrix} = (-1)\cdot \begin{vmatrix} 0 & -3 & m-12 \\ 3 & -2 & 11 \\ 2 & -5 & m-6 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)\left[-15(m-12) - 66 + 4(m-12) + 9(m-6)\right] =$$

$$= (-1)\cdot\left[-15m + 180 - 66 + 4m - 48 + 9m - 54\right] = 2m - 12 = 0 \Rightarrow m = 6$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 - 6 = -9 \neq 0$$

Discusión:

Si $m = 6 \Rightarrow$ rango A = rango (A|B) = 3 = nº de incógnitas $\Rightarrow$ S.C.D.

Si: $m \neq 6 \Rightarrow$ rango A = 3 < 4 = rango (A|B) $\Rightarrow$ S.I.

b) $m = 6$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -1 & 6 \\ 3 & 0 & -2 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -4 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{-2F_2 + 3F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -1 & 6 \\ 3 & 0 & -2 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 11 & 22 \end{array}\right) \begin{matrix} [1] \\ [2] \\ [3] \end{matrix}$$

De [3]: $11z = 22 \Rightarrow z = 2$

Sustituimos en [2]: $y + z = 6 \Rightarrow y = 4$

Sustituimos en [1]: $3x - 2z = 11 \Rightarrow x = \frac{11 + 2z}{3} = \frac{11 + 4}{3} = 5$

Solución: $(x, y, z) = (5, 4, 2)$

4A a) $\left.\begin{array}{l} \vec{u}_\pi = (1, 0, -1) \\ \vec{u}_r = (1, 0, -1) \end{array}\right\}$ $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{|\vec{u}_\pi \cdot \vec{u}_r|}{|\vec{u}_\pi|\,|\vec{u}_r|} = \dfrac{|(1,0,-1)\cdot(1,0,-1)|}{\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}\,\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}} = 1$

$\Rightarrow \boxed{\alpha = \operatorname{arcsen} 1 = 90^\circ} \Rightarrow \pi$ y r son perpendiculares.

Hay infinitos planos que son perpendiculares al plano π y que contengan a la recta r: el haz de planos que genera dicha recta.

Ec. de la recta r:

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+1}{1} \Rightarrow \begin{cases} y - 2 = 0 \\ x - 1 = z - 1 \Rightarrow x - z = 0 \end{cases} \begin{cases} y - z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

Haz de planos generados por r: $\boxed{x - z + \lambda(y - z) = 0}$

b) $\left.\begin{cases} x+y=2 \\ 4x+2z=6 \\ x-z=0 \equiv \pi \end{cases}\right\} \equiv s \qquad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2+4=6 \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ rango A = rango (A|B) = 3 = nº de incógnitas $\Rightarrow$ S.C.D. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ **la recta y el plano se cortan en un punto.**

El plano o los planos perpendiculares a π están generados por el vector normal al plano, el vector director de la recta s y el vector $\overrightarrow{PG}$, donde P es el punto de corte del plano y la recta y, G es un punto genérico del plano.

$x = 2-y \Rightarrow 4y+2z=6 \Rightarrow 2y+z=3 \Rightarrow z=3-2y \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x=2-\lambda \\ y=\lambda \\ z=3-2\lambda \end{cases}$

Punto P: $2-\lambda-(3-2\lambda)=0 \Rightarrow 2-\lambda-3+2\lambda=0 \Rightarrow \lambda=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow P \begin{cases} x=2-1=1 \\ y=1 \\ z=3-2\cdot 1=1 \end{cases} \Rightarrow P(1,1,1)$

$\left.\begin{cases} \vec{n}_\pi = (1,0,-1) \\ \vec{u}_r = (-1,1,-2) \\ \overrightarrow{PG} = (x,y,z)-(1,1,1) = (x-1, y-1, z-1) \end{cases}\right\} \pi' \equiv \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ x-1 & y-1 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ **$\pi' \equiv x+3y+z-5=0$**

UCLM
UNIVERSIDAD DE CASTILLA-LA MANCHA

Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado.

Bachillerato L. O. E.

Materia: MATEMÁTICAS II

PROPUESTA B

1B. a) Enuncia el Teorema del valor medio de Lagrange. **(1,25 puntos)**

b) Calcula un punto del intervalo $[-2, 2]$ en el que la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 3x + 2$ sea paralela a la recta que pasa por los puntos $(-2, 0)$ y $(2, 12)$. **(1,25 puntos)**

2B. El área del recinto encerrado entre la gráfica de la parábola $f(x) = a(x^2 - 2x)$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, y el eje de abscisas, es de 12 unidades de superficie. Calcula el valor de a. **(2,5 puntos)**

3B. Évariste Galois, Niels Abel y Srinivasa Ramanujan fueron tres genios matemáticos que antes de sus prematuras muertes dejaron desarrollada una importante obra matemática. Calcula las edades que tenían cuando fallecieron, sabiendo que su suma es 78, que su media aritmética coincide con la edad de Abel, y que cuatro veces la edad de Ramanujan más dos veces la de Abel es nueve veces la edad de Galois.
(1,25 puntos por plantear un sistema de ecuaciones lineales con los datos del problema y 1,25 puntos por calcular las edades)

4B. a) Determina el valor del parámetro $k \in \mathbb{R}$ para que la recta

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = k - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

esté contenida en el plano $\pi \equiv x + 2y + z = 7$. **(1,25 puntos)**

b) Para el valor de k obtenido en el apartado anterior, obtén la ecuación implícita de un plano π' que corte perpendicularmente a π, de modo que la intersección de ambos planos sea r. **(1,25 puntos)**

Reserva 2 - 2013

Propuesta B

1B a) **Teorema del valor medio o de Lagrange**

Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), entonces $\exists c \in (a,b)$ t.q. $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.

b) Como $f(x)=x^2+3x+2$ es continua y derivable en $\mathbb{R}$, por ser una función polinómica, es continua en $[-2,2]$ y derivable en $(-2,2)$. Aplicando el teorema del valor medio de Lagrange $\exists c \in (-2,2)$ t.q. $f(2)-f(-2)=f'(c)[2-(-2)]$

$$f(2)=2^2+3\cdot 2+2=12$$
$$f(-2)=(-2)^2+3\cdot(-2)+2=0$$
$$\Rightarrow 12-0=f'(c)[2-(-2)] \Rightarrow f'(c)=\frac{12}{4}=3=m$$

$$f'(c)=2c+3=m=3 \Rightarrow 2c+3=3 \Rightarrow \boxed{c=0}$$

2B $f(x)=a(x^2-2x)$, $a>0$

Puntos de corte con OX: $y=0 \Rightarrow a(x^2-2x)=0 \Rightarrow x=\begin{cases}0\\2\end{cases}$

$1 \in (0,2) \Rightarrow f(1)=a(1^2-2\cdot 1)=-a<0 \Rightarrow f(x)<0$

Área:

$$12=\left|\int_0^2 a(x^2-2x)\,dx\right| \Rightarrow 12=-\int_0^2 a(x^2-2x)\,dx=$$
$$=-\left(a\frac{x^3}{3}-a\frac{2x^2}{2}\right]_0^2\Big)=-\left(a\frac{8}{3}-4a\right)=-\frac{8a}{3}+4a=12 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{4a}{3}=12 \Rightarrow 4a=36 \Rightarrow \boxed{a=\frac{36}{4}=9}$$

3B Sean $\begin{cases} G=\text{edad a la que murió Galois}\\ A=\text{" " " " " " Abel}\\ R=\text{" " " " " " Ramanujan}\end{cases}$

$$\begin{cases} G+A+R=78\\ \dfrac{G+A+R}{3}=A\\ 4R+2A=9G\end{cases} \longrightarrow \begin{cases} G+A+R=78\\ G-2A+R=0\\ 9G-2A-4R=0\end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 78 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 9 & -2 & -4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[-9F_1+F_3]{-F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 78 \\ 0 & -3 & 0 & -78 \\ 0 & -11 & -13 & -702 \end{array}\right) \begin{matrix}[1]\\[2]\\[3]\end{matrix}$$

De [2]: $-3A = -78 \Rightarrow A = \frac{-78}{-3} = 26$

Sustituimos en [3]: $-11A - 13R = -702$

$$R = \frac{-702 + 11\cdot 26}{-13} = 32$$

Sustituimos en [1]:

$$G + A + R = 78$$

$$G = 78 - 26 - 32 = 20$$

Solución: Galois murió con 20 años, Abel con 26 y Ramanujan con 32.

4B a) Si r está contenida en π ($r \subset \pi$), entonces $\vec{u}_r \perp \vec{n}_\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{u}_r \cdot \vec{n}_\pi = 0$

$\left.\begin{array}{l} \vec{n}_\pi = (1,2,1) \\ \vec{u}_r = (1,-1,1) \end{array}\right\} \vec{u}_r \cdot \vec{n}_\pi = (1,-1,1)\cdot(1,2,1) = 1 - 2 + 1 = 0 \Rightarrow r \subset \pi.$

Además, $R(1,k,0) \in r \subset \pi \Rightarrow R \in \pi \Rightarrow 1 + 2k + 0 = 7 \Rightarrow \boxed{k = 3}$

b) El plano π', es aquel que perteneciendo al haz de planos generados por la recta, tenga vector normal perpendicular al del plano π.

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-1} = z \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = z \\ y - 3 = z \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x - z - 1 = 0 \\ y + z - 3 = 0 \end{cases}$$

Haz de rectas: $x - z - 1 + \mu(y + z - 3) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \pi_{H_r} \equiv x + \mu y + (\mu - 1)z - 1 - 3\mu = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{n}_\pi = (1,2,1) \\ \vec{n}_{\pi_{H_r}} = (1,\mu,\mu-1) \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_\pi \perp \vec{n}_{\pi_{H_r}} \Rightarrow (1,2,1)\cdot(1,\mu,\mu-1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu = 0 \Rightarrow x + 0\cdot y + (0-1)z - 1 - 3\cdot 0 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi' \equiv x - z - 1 = 0}$$