Junio 2014

UCLM UNIVERSIDAD DE CASTILLA-LA MANCHA

Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado.

Bachillerato L. O. E.

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Puedes utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.

PROPUESTA A

1A. a) Calcula los valores de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ para que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + a & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + be^x + 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

sea continua y derivable en $x = 0$. **(1,5 puntos)**

b) Para los valores encontrados, calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$. **(1 punto)**

2A. Calcula la integral definida

$$\int_0^1 (x^2 + x + 1)e^{-x}\, dx \qquad \textbf{(2,5 puntos)}$$

3A. a) Sabiendo que A es una matriz cuadrada de orden 2 tal que $|A| = 5$, calcula razonadamente el valor de los determinantes

$$|-A|, \qquad |A^{-1}|, \qquad |A^T|, \qquad |A^3| \qquad \textbf{(1 punto)}$$

b) Sabiendo que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

calcula, usando las propiedades de los determinantes,

$$\begin{vmatrix} 3-a & -b & 1-c \\ 1+a & 1+b & 1+c \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2a & 2b & 2c \\ 0 & 30 & 0 & 10 \\ 1 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} \qquad \textbf{(1,5 puntos)}$$

4A. a) Halla $a \in \mathbb{R}$ para que las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ -x + y - 3z = 2 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x + y = 0 \\ 3x + 2y + z = a \end{cases}$$

se corten en un punto. **(1,25 puntos)**

b) Para dicho valor de a, da la ecuación implícita de un plano π que contenga a r y s. **(1,25 puntos)**

(sigue a la vuelta)

PROPUESTA A

1A a) $f(x) = \begin{cases} x^2-2x+a & x \leq 0 \\ x^2+be^x+3 & x>0 \end{cases}$

Imponemos las condiciones que nos dan:

- f continua en $x=0$: ¿$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$?

$$\lim_{x\to 0} f(x) \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x\to 0^-} (x^2-2x+a) = a \\ \lim_{x\to 0^+} (x^2+be^x+3) = b+3 \end{array} \right\} \Rightarrow a = b+3$$

- f derivable en $x=0$: ¿$\exists f'(0)$?

$$f'(0) \left\{ \begin{array}{l} f'(x-) = 2x-2 \longrightarrow f'(0-) = -2 \\ f'(x+) = 2x+be^x \longrightarrow f'(0+) = b \end{array} \right\} b = -2$$

Resolvemos el sistema $\begin{cases} a = b+3 \\ b = -2 \end{cases}$ $a = -2+3 = 1$

Por tanto, $\boxed{a = 1 \text{ y } b = -2}$.

b) $f(x) = \begin{cases} x^2-2x+1 & x \leq 0 \\ x^2-2e^x+3 & x>0 \end{cases}$

Ec. de la recta tangente a f en $x=0$: $y-y_0 = f'(0)(x-x_0)$

$$\left. \begin{array}{l} (x_0,y_0) = (0,1) \\ f'(0) = -2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} y-1 = -2(x-0) \\ y-1 = -2x \\ \boxed{y = -2x+1} \end{array}$$

2A $\int_0^1 (x^2+x+1)e^{-x}\,dx$

$$\int (x^2+x+1)e^{-x}dx = \int x^2e^{-x}dx + \int xe^{-x}dx + \int e^{-x}dx$$

$$\int e^{-x}dx = -\int e^{-x}dx = -e^{-x} + C_1$$

$$\int xe^{-x}dx = \left[\begin{array}{l} u = x \longrightarrow du = dx \\ dv = e^{-x}dx \longrightarrow v = -e^{-x} \end{array} \right] = -xe^{-x} - \int -e^{-x}dx =$$

$$= -xe^{-x} - e^{-x} + C_2$$

$$\int x^2 e^{-x}\,dx = \begin{bmatrix} u = x^2 \longrightarrow du = 2x\,dx \\ dv = e^{-x}dx \longrightarrow v = -e^{-x} \end{bmatrix} = -x^2e^{-x} - \int -2xe^{-x}\,dx =$$

$$= -x^2e^{-x} + 2\underbrace{\int xe^{-x}\,dx}_{\text{la hemos calculado antes}} = -x^2e^{-x} + 2\left(-xe^{-x} - e^{-x}\right) =$$

$$= e^{-x}\left(-x^2 - 2x - 2\right) + C_3$$

Así $\displaystyle\int_0^1 (x^2+x+1)e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^1 + \left(-xe^{-x} - e^{-x}\right)\Big|_0^1 +$

$$+ e^{-x}\left(-x^2 - 2x - 2\right)\Big|_0^1 = -\frac{1}{e} + 1 + \left(\frac{-2}{e}\right) + 1 + \left(\frac{-5}{e}\right) + 2 =$$

$$= \frac{-1 + e - 2 + e - 5 + 2e}{e} = \boxed{\frac{4e-8}{e}\ u}$$

$\boxed{3A}$ a) $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ t.q. $|A| = 5$

$\boxed{|-A| = |A| = 5}$ ya que si multiplicamos una fila o una columna por un nº real, el valor del determinante queda multiplicado por dicho nº, y al calcular $-A$ estamos multiplicando dos filas (o columnas) por -1.

$$\boxed{|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{5}}$$

$$\boxed{|A^T| = |A| = 5}$$

$$\boxed{|A^3| = |AAA| = |A||A||A| = 5\cdot 5\cdot 5 = 125}$$

b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$

$$\begin{vmatrix} 3-a & -b & 1-c \\ 1+a & 1+b & 1+c \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-a & -b & 1-c \\ 1 & 1 & 1 \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3-a & -b & 1-c \\ a & b & c \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix} + 3\underbrace{\begin{vmatrix} 3-a & -b & 1-c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{vmatrix}}_{=0} = 3\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix} -$$

$$-3\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3\cdot 2 = \boxed{-6}$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2a & 2b & 2c \\ 0 & 30 & 0 & 10 \\ 1 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} = +5 \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 30 & 0 & 10 \\ 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} = +5\cdot 2\cdot 10\cdot 4 \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -400 \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -400 \cdot 2 = \boxed{-800}$$

$\boxed{4A}$ a) $r \equiv \begin{cases} x+2y-z=1 \\ -x+y-3z=2 \end{cases}$ $\quad s \equiv \begin{cases} x+y=0 \\ 3x+2y+z=a \end{cases}$

Para que r y s se corten en un punto el sistema tiene que ser compatible determinado, esto es, rango M = rango $\tilde{M} = 3$ donde M es la matriz de coeficientes y $\tilde{M}$ la matriz ampliada.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & a \end{pmatrix}$$

$$|\tilde{M}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & a \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & a \end{vmatrix} =$$

$$= -6a+1-4+6-4+a-(-3a-1-6+9-2-a) =$$

$$= -5a-1+4a = -a-1 = 0 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow \text{rango } \tilde{M} \leq 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2-3 = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{rango } \tilde{M} = 3 = \text{rango } M$$

b) π queda determinado por $\vec{u}_r = (-5,4,3)$, $\vec{u}_s = (-1,1,1)$ y $\overrightarrow{RP}$ donde $R(-1,1,0)$ es un punto cualquiera de la recta r y P es un punto genérico del plano: $P(x,y,z)$

$$\overrightarrow{RP} = (x,y,z)-(-1,1,0) = (x+1, y-1, z)$$

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z \\ -5 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4(x+1)-3(y-1)-5z+4z-3(x+1)+5(y-1) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi \equiv x+2y-z-1=0}$$

PROPUESTA B

1B. a) Calcula los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = 1 + x^2 e^{-x^2}$. **(1,5 puntos)**
b) Calcula las asíntotas de $f(x)$. **(1 punto)**

2B. Para cada $c \geq 2$ definimos $A(c)$ como el área de la region encerrada entre la gráfica de

$$f(x) = \frac{1 + x^2}{x^4}$$

el eje de abscisas, y las rectas $x = 1$ y $x = c$.
a) Calcula $A(c)$. **(1,5 puntos)**
b) Calcula

$$\lim_{c \to +\infty} A(c) \qquad \textbf{(1 punto)}$$

3B. a) Se sabe que el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & 3z & = & 4 \\ 2x & - & y & + & z & = & 8 \\ x & - & 5y & + & az & = & 4 \end{array} \right. \qquad a \in \mathbb{R}$$

es compatible indeterminado. Calcula a y resuelve el sistema para dicho valor del parámetro. **(2 puntos)**
b) Para el valor de a encontrado, da una solución particular del sistema tal que $x = y$. **(0,5 puntos)**

4B. Dados el plano $\pi \equiv x - y = 4$ y la recta

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x + z = 1 \\ 2x + y + az = 0 \end{array} \right. \qquad a \in \mathbb{R},$$

se pide:
a) Estudia si existe algún valor del parámetro a para el que r y π sean paralelos. **(0,75 puntos)**
b) Estudia si existe algún valor del parámetro a para el que r y π se corten perpendicularmente. **(0,75 puntos)**
c) Para $a = 1$, da la ecuación implícita de un plano π' que contenga a r y corte perpendicularmente a π. **(1 punto)**

PROPUESTA B

1B a) Monotonía de f

$$f'(x) = 2xe^{-x^2} + (-2x)x^2e^{-x^2} = 2xe^{-x^2}(1-x^2)$$

$$f'(x) = 0 \iff 2xe^{-x^2}(1-x^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ 1-x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

	-1		0		1	
$-$		$+$		$-$		$+$
$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$$\boxed{f \text{ es } \begin{cases} \text{creciente en } (-1,0) \cup (1,+\infty) \\ \text{decreciente en } (-\infty,-1) \cup (0,1) \end{cases}}$$

$$f''(x) = 2e^{-x^2}(1-3x^2) + 4x^2e^{-x^2}(x^2-1)$$

$f''(-1) > 0 \Rightarrow$ $x = -1$ es un mín. rel. de f.

$f''(0) < 0 \Rightarrow$ $x = 0$ es un máx. rel. de f

$f''(1) > 0 \Rightarrow$ $x = 1$ es un mín. rel. de f

b) Asíntotas

A.V. $f(x) = 1 + \dfrac{x^2}{e^{x^2}} = \dfrac{e^{x^2} + x^2}{e^{x^2}}$

Como $e^{x^2} > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $\nexists\, a \in \mathbb{R}$ t.q. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ y por tanto,

$\boxed{f(x) \text{ no tiene A.V.}}$

A.H. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x^2} + x^2}{e^{x^2}} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2xe^{x^2} + 2x}{2xe^{x^2}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x(e^{x^2}+1)}{2xe^{x^2}} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x^2}+1}{e^{x^2}} = \lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \dfrac{1}{e^{x^2}} = 1 + 0 = 1 \Rightarrow \boxed{y = 1 \text{ es una A.H.}}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{x^2} + x^2}{e^{x^2}} = \ldots = \lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \dfrac{1}{e^{x^2}} = 1$

A.O. $\boxed{\text{No tiene}}$, ya que tiene asíntota horizontal.

2B a) $\boxed{A(c)} = \int_1^c f(x)dx = \int_1^c \frac{1+x^2}{x^4}dx = \int_1^c \frac{1}{x^4}dx + \int_1^c \frac{x^2}{x^4}dx =$

$= \int_1^c x^{-4}dx + \int_1^c x^{-2}dx = -\frac{1}{3}x^{-3}\Big|_1^c + (-1)x^{-1}\Big|_1^c =$

$= -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{c^3} - \frac{1}{1^3}\right) + (-1)\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{1}\right) = \frac{c^3-1}{3c^3} + \frac{c-1}{c} = \boxed{\frac{4c^3-3c^2-1}{3c^3}}$

b) $\boxed{\lim_{c\to\infty} A(c) = \lim_{c\to\infty} \frac{4c^3-3c^2-1}{3c^3} = \frac{4}{3}}$ resolviendo la indeterminación correspondiente

3B a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \\ 1 & -5 & a & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[-F_1+F_3]{-2F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & -3 & a-3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2+F_3}$

$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & a-8 & 0 \end{array}\right)$

Para que el sistema sea compatible indeterminado $a-8=0 \Rightarrow \boxed{a=8}$

Solución

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} [1] \\ [2] \\ \end{array}$ Hacemos $z=\lambda$

De [2]: $3y-5\lambda=0 \Rightarrow y=\frac{5}{3}\lambda$

Sustituyendo en [1]:

$x - 2\frac{5}{3}\lambda + 3\lambda = 4 \Rightarrow x = 4 + \frac{1}{3}\lambda$

Solución: $\boxed{(x,y,z) = \left(4+\frac{1}{3}\lambda, \frac{5}{3}\lambda, \lambda\right), \text{ con } \lambda\in\mathbb{R}}$

b) Si $x=y \Rightarrow 4+\frac{1}{3}\lambda = \frac{5}{3}\lambda \Rightarrow \frac{4}{\frac{4}{3}} = \lambda \Rightarrow \lambda = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{(x,y,z) = (5,5,3)}$

4B a) $r \parallel \pi \Rightarrow \vec{u}_r \perp \vec{u}_\pi \Rightarrow \vec{u}_r \cdot \vec{u}_\pi = 0$

Vector director de r: $\vec{u}_r$

$x+z=1 \Rightarrow z = 1-x \Rightarrow$ (sust. en la otra ec.) $2x+y+a(1-x)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y+2x-ax+a=0 \Rightarrow y=(a-2)x-a \Rightarrow \vec{u}_r = (1, a-2, -1)$

Vector normal de π: $\vec{u}_\pi$

$\vec{u}_\pi = (1,-1,0)$

Producto escalar

$\vec{u}_r \cdot \vec{u}_\pi = (1, a-2, -1)\cdot(1,-1,0) = 0 \Rightarrow 1 - a + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{a = 3}$

b) Si son perpendiculares, el vector director de la recta y el normal del plano tienen que ser iguales o proporcionales

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u}_r = (1, a-2, -1) \\ \vec{u}_\pi = (1,-1,0) \end{array}\right\} \frac{1}{1} \neq \frac{-1}{0} \Rightarrow \boxed{\text{No pueden ser perpendiculares}}$$

c) $\pi' \begin{cases} \vec{u}_r \equiv \text{vector director de } r \\ \vec{u}_\pi \equiv \text{vector normal de } \pi \\ \overrightarrow{RP} \text{ donde } R \in r \text{ (cualquiera) y } P(x,y,z) \in \pi \text{ (genérico)} \end{cases}$

$R(0,-1,1)$

$\overrightarrow{RP} = (x,y,z) - (0,-1,1) = (x, y+1, z-1)$

$$\pi' \equiv \begin{vmatrix} x & y+1 & z-1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -(y+1) - (z-1) + (z-1) - x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi' \equiv x + y + 1 = 0}$$

Septiembre 2014

Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado.

Bachillerato L. O. E.

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Puedes utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.

PROPUESTA A

1A. a) Calcula los intervalos de concavidad y convexidad de la función

$$f(x) = \frac{x-1}{2x+2}$$

Estudia si tiene puntos de inflexión. **(1,5 puntos)**
b) ¿En qué puntos de la gráfica de $f(x)$ la recta tangente es paralela a la recta $y = x - 2$? **(1 punto)**

2A. a) Esboza la región encerrada entre las gráficas de las funciones $f(x) = \text{sen}x$, $g(x) = -\text{sen}x$, y las rectas $x = \pi/2$ y $x = 3\pi/2$. **(0,5 puntos)**
b) Calcula el área de la región anterior. **(2 puntos)**

3A. a) Discute, en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$, el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ m+1 & 3 & m-1 \\ m-1 & m+3 & -1 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(2 puntos)}$$

b) ¿Para qué valores del parámetro $m \in \mathbb{R}$ existe la matriz inversa de A? **(0,5 puntos)**

4A. a) Estudia la posición relativa de las rectas

$$r \equiv x = -y = z \qquad \text{y} \qquad s \equiv x = y = z - 2. \qquad \textbf{(1,25 puntos)}$$

b) Calcula la distancia entre r y s. **(1,25 puntos)**

(sigue a la vuelta)

Septiembre 2014

Propuesta A

1A a) Curvatura (concavidad/convexidad): signo de f''

$$f(x)=\frac{x-1}{2x+2} \qquad Dom(f)=\mathbb{R}-\{-1\}$$

$$f'(x)=\frac{2x+2-(x-1)\cdot 2}{(2x+2)^2}=\frac{4}{(2x+2)^2}$$

$$f''(x)=\frac{-4\cdot 2(2x+2)\cdot 2}{(2x+2)^4}=\frac{-16(2x+2)}{(2x+2)^4}$$

$$f''(x)>0 \iff -16(2x+2)>0 \Rightarrow 2x+2<0 \Rightarrow x<-1$$

$$\boxed{f \text{ es } \begin{cases} \text{convexa si } x<-1, \text{ es decir, en } (-\infty,-1) \\ \text{cóncava si } x>-1, \text{ es decir, en } (-1,+\infty) \end{cases}}$$

No tiene puntos de inflexión, ya que los puntos de inflexión son los puntos en los que la función pasa de cóncava a convexa, o viceversa.

b) $y=x-2$ tiene pendiente 1

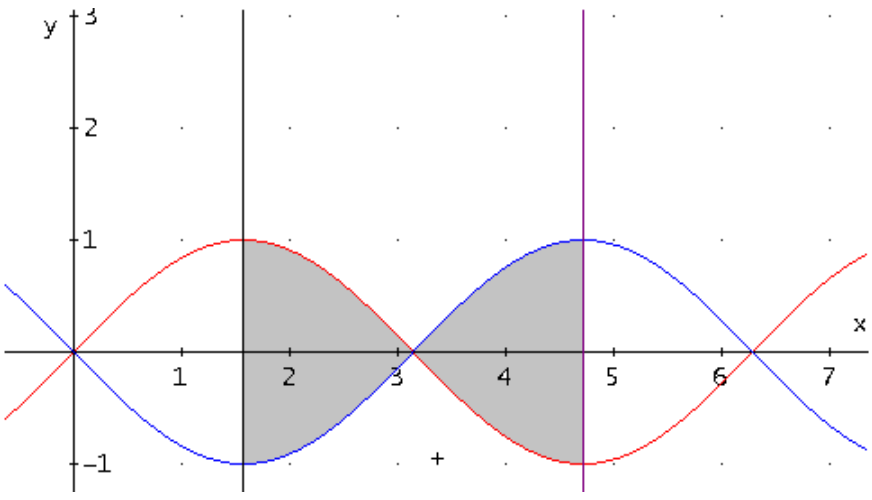
Por tanto, buscamos los puntos en los que f' valga 1:

$$f'(x)=1 \iff \frac{4}{(2x+2)^2}=1 \Rightarrow 4=(2x+2)^2 \Rightarrow 4=4x^2+4+8x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x^2+8x=0 \Rightarrow 4x(x+2)=0 \Rightarrow x=\begin{cases}0\\-2\end{cases}$$

$$\boxed{\text{Así, la gráfica de } f(x) \text{ tiene recta tangente paralela a } y=x-2 \text{ en } (0,f(0))=\left(0,-\tfrac{1}{2}\right) \text{ y en } (-2,f(-2))=\left(-2,\tfrac{3}{2}\right)}$$

2A a) Esbozo de la gráfica



b) $$A=\int_{\pi/2}^{2\pi}(\operatorname{sen}x-(-\operatorname{sen}x))\,dx+$$

$$+\int_{2\pi}^{3\pi/2}(-\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}x)\,dx=$$

$$=\int_{\pi/2}^{2\pi}2\operatorname{sen}x\,dx-2\int_{2\pi}^{3\pi/2}\operatorname{sen}x\,dx=$$

$$=2\left(\cos x\Big|_{\pi/2}^{2\pi}\right)-2\left(\cos x\Big|_{2\pi}^{3\pi/2}\right)=$$

$$=\boxed{4\,u^2}$$

3A a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ m+1 & 3 & m-1 \\ m-1 & m+3 & -1 \end{pmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ m+1 & 3 & m-1 \\ m-1 & m+3 & -1 \end{vmatrix} = -3-(m+1)(m+3)+3(m-1)^2+3(m-1)-(m+3)(m-1)+$$
$$+3(m+1) = m^2-6m = 0 \Rightarrow m(m-6)=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow m = \begin{cases} 0 \\ 6 \end{cases}$$

Si $m \neq \begin{cases} 0 \\ 6 \end{cases} \Rightarrow rg\,A = 3$

$m=0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ y $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rg\,A = 2$

$m=6 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 7 & 3 & 5 \\ 5 & 9 & -1 \end{pmatrix}$ y $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rg\,A = 2$

Discusión: Si $m \neq \begin{cases} 0 \\ 6 \end{cases} \Rightarrow rg\,A = 3$

Si $m = \begin{cases} 0 \\ 6 \end{cases} \Rightarrow rg\,A = 2$

b) $\boxed{\exists A^{-1} \Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \begin{cases} 0 \\ 6 \end{cases}}$

4A a) $r \equiv x = -y = z \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -y \Rightarrow x+y=0 \\ x = z \Rightarrow x-z=0 \end{cases}$

$s \equiv x = y = z-2 \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = y \Rightarrow x-y=0 \\ x = z-2 \Rightarrow x-z=-2 \end{cases}$

$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

Rango de M

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1-1 \neq 0 \Rightarrow rg\,M = 3$

Rango de $\tilde{M}$

$|\tilde{M}| = -2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rg\,\tilde{M} = 4$

$\Rightarrow$ $\boxed{r \text{ y } s \text{ se cruzan}}$

De otra forma

$\vec{u}_r = (1,-1,1)$

$\vec{u}_s = (1,1,1)$

$P_r(0,0,0) \in r$, $P_s(0,0,2)$, $\overrightarrow{P_rP_s} = (0,0,2)$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ r y s se cruzan

b) $d(r,s) = \left| \dfrac{\det(\vec{u}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_rP_s})}{|\vec{u}_r \times \vec{u}_s|} \right|$

$$\vec{u}_r \times \vec{u}_s = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -2\vec{i} + 2\vec{k} = (-2, 0, 2)$$

$$|\vec{u}_r \times \vec{u}_s| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{8}$$

$$\boxed{d(r,s) = \frac{4}{\sqrt{8}} = \frac{4\sqrt{8}}{8} = \frac{\sqrt{8}}{2} = \sqrt{2}\ u}$$

PROPUESTA B

1B. Para la función $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$
a) Estudia sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como sus extremos relativos. **(1,5 puntos)**
b) Estudia si tiene asíntota oblicua cuando $x \to +\infty$. **(1 punto)**

2B. Calcula las integrales

$$\int \frac{e^x}{e^x - e^{-x}}\, dx, \qquad \int \frac{2}{4 + x^2}\, dx \qquad \textbf{(1,25 puntos por cada integral)}$$

Nota: En la primera integral puede ayudarte hacer el cambio de variable $t = e^x$.

3B. Encuentra dos matrices A, B cuadradas de orden 2 que sean solución del sistema matricial

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} 2A & + & B & = & C^2 \\ A & - & B & = & C^{-1} \end{array} \right.$$

siendo

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(2,5 puntos)}$$

4B. a) Estudia, en función del valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$, la posición relativa de los planos

$$\pi_1 \equiv x + y - z = 3$$

$$\pi_2 \equiv x - y + az = -1$$

$$\pi_3 \equiv ax + y - z = 5$$

(1,5 puntos)
b) Calcula, en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$, la distancia entre los planos π_1 y π_3. **(1 punto)**

Septiembre 2014

Propuesta B

1B $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$ $\quad Dom(f)=\mathbb{R}$

a) Monotonía (crecimiento/decrecimiento): signo de f'

$$f'(x)=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$f'(x)>0 \iff 2x+1>0 \iff x>-\frac{1}{2}$$

$$f'(x)<0 \iff 2x+1<0 \iff x<-\frac{1}{2}$$

$$\boxed{f \text{ es } \begin{cases} \text{creciente en } \left(-\frac{1}{2},+\infty\right) \\ \text{decreciente en } \left(-\infty,-\frac{1}{2}\right) \end{cases}}$$

Como f es continua en $\mathbb{R}$ por ser composición de funciones continuas y en $x=-\frac{1}{2}$ pasa de ser decreciente a ser creciente, se tiene que $\boxed{x=-\frac{1}{2} \text{ es un mínimo relativo.}}$

b) La asíntota oblicua, si existe, es de la forma $y=mx+n$ con

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} \quad y \quad n=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx)$$

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}=1$$

$$n=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+x+1}-x\right]=[\infty-\infty]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x+1}-x)(\sqrt{x^2+x+1}+x)}{\sqrt{x^2+x+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}=$$

$$=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{2}$$

Así, $\boxed{\text{la asíntota oblicua es } y=x+\frac{1}{2}}$

2B a) $$\int\frac{e^x}{e^x-e^{-x}}\,dx=\begin{bmatrix} t=e^x \\ dt=e^x\,dx\end{bmatrix}=\int\frac{1}{t^2-1}\,dt\underset{(*)}{=}$$

$$=\int\frac{\frac{1}{2}}{t-1}\,dt+\int\frac{\frac{1}{2}}{t+1}\,dt=\frac{1}{2}\log|t-1|+\frac{1}{2}\log|t+1|=$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}\log|e^x-1| + \frac{1}{2}\log|e^x+1| + C}$$ donde log ≡ logaritmo natural

$$(*)\quad \frac{1}{t^2-1} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} \Rightarrow 1 = A(t+1) + B(t-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t=1 \Rightarrow 1 = 2A \Rightarrow A = \frac{1}{2} \\ t=-1 \Rightarrow -1 = -2B \Rightarrow B = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{t^2-1} = \frac{\frac{1}{2}}{t-1} + \frac{\frac{1}{2}}{t+1}$$

<u>De otra forma</u>: $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x - e^{-x}}\,dx = \int \frac{e^x}{e^x - \frac{1}{e^x}}\,dx = \int \frac{e^{2x}}{e^{2x}-1}\,dx =$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2e^{2x}}{e^{2x}-1}\,dx = \boxed{\frac{1}{2}\log|e^{2x}-1| + C}$$

b) $\displaystyle\int \frac{2}{4+x^2}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{2}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\,dx = \boxed{\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + C}$

$\boxed{3B}$ $2A + B = C^2$

$A - B = C^{-1}$

Sumamos $3A = C^2 + C^{-1} \Rightarrow A = \frac{1}{3}(C^2 + C^{-1})$

Como $A - B = C^{-1} \Rightarrow B = A - C^{-1} = \frac{1}{3}(C^2 + C^{-1}) - C^{-1}$

<u>Calculamos C^2</u>

$$C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 18 \\ 12 & 31 \end{pmatrix}$$

<u>Calculamos C^{-1}</u>

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-2F_1+F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(-1)F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{-3F_2+F_1}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

<u>Calculamos A</u>

$$\boxed{A = \frac{1}{3}\left[\begin{pmatrix} 7 & 18 \\ 12 & 31 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 21 \\ 14 & 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 7 \\ 14/3 & 10 \end{pmatrix}}$$

<u>Calculamos B</u>

$$\boxed{B = A - C^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & 7 \\ 14/3 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17/3 & 4 \\ 8/3 & 11 \end{pmatrix}}$$

4B

$\pi_1 \equiv x+y-z=3$

$\pi_2 \equiv x-y+az=-1$

$\pi_3 \equiv ax+y-z=5$

a) Posición relativa

$$M=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&-1&a\\a&1&-1\end{pmatrix},\quad \tilde{M}=\begin{pmatrix}1&1&-1&3\\1&-1&a&-1\\a&1&-1&5\end{pmatrix}$$

$$|M| = 1-1+a^2-a-a+1 = a^2-2a+1 = (a-1)^2 = 0 \Rightarrow a=1$$

Si $\boxed{a\neq 1} \Rightarrow rg\,M = 3 = rg\,\tilde{M} \Rightarrow$ Los 3 planos son secantes en un punto

$\boxed{a=1} \Rightarrow \begin{pmatrix}1&1&-1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix}1&1\\1&-1\end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow rg\,M=2$

$$\begin{pmatrix}1&1&-1&3\\1&-1&1&-1\\1&1&-1&5\end{pmatrix} \xrightarrow[-F_1+F_3]{-F_1+F_2} \begin{pmatrix}1&1&-1&3\\0&-2&2&-4\\0&0&0&2\end{pmatrix} \Rightarrow rg\,\tilde{M}=3$$

Estudiamos los rangos de las submatrices de orden 2x3 de M

$$\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix}1&1\\1&-1\end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow \text{rango}=2$$

$$\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&1&-1\end{pmatrix} \xrightarrow{-F_1+F_2} \begin{pmatrix}1&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix} \Rightarrow \text{rango}=1$$

Dos planos son paralelos y el tercero los corta según dos rectas paralelas

b) $\boxed{d(\pi_1,\pi_3)} = d(P_{\pi_1},\pi_3) = \dfrac{|0+0+3-5|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \boxed{\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\,u}$

$P_{\pi_1}(0,0,3)$