

**Evaluación para el Acceso a la Universidad**

**Convocatoria de 2019**

**Materia: MATEMÁTICAS II**

**Instrucciones:** El estudiante deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Dentro de cada opción el estudiante elegirá **cuatro** ejercicios entre los cinco propuestos. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntuá 2,5 puntos. Duración de la prueba: 90 minutos.

**PROPUESTA A**

**1A.** a) Determina el valor de  $a$  y de  $b$  para que la siguiente función  $f(x)$  sea derivable en todo  $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 2 & \text{si } x \leq 1 \\ a\sqrt{x} - \frac{b}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad (1,5 \text{ puntos})$$

b) Comprueba si la función  $f(x) = x^2 - 4$  verifica las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo  $[-3, 3]$ . **(1 punto)**

**2A.** a) Calcula razonadamente el área de los recintos limitados por la función  $g(x) = -x^2 + 2x + 3$ , la recta  $x = -2$  y el eje de abscisas. **(1,5 puntos)**

b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función  $g(x)$  en el punto de abscisa  $x = 4$ . **(1 punto)**

**3A.** a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro  $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcll} ax &+& 2y &= a^2 \\ -x &+& y &= 5 \\ x &-& ay &= -(4+a) \end{array} \quad \left. \right\} \quad (1,5 \text{ puntos})$$

b) Resuélvelo razonadamente para el valor  $a = 1$ . **(1 punto)**

**4A.** Dados los puntos  $A(1, 2, 0)$ ,  $B(0, -1, 2)$ ,  $C(2, -1, 3)$  y  $D(1, 0, 1)$ :

a) Encuentra razonadamente la ecuación general del plano que contiene a la recta que pasa por  $A$  y  $B$  y es paralelo a la recta que pasa por  $C$  y  $D$ . **(1,25 puntos)**

b) Calcula razonadamente el volumen del tetraedro cuyos vértices son los puntos  $A, B, C$  y  $D$ . **(1,25 puntos)**

**5A.** a) Una fábrica A produce el 30% de los tractores que se demandan en una Comunidad Autónoma, una fábrica B produce el 20% y la fábrica C el resto. El controlador de calidad sabe que son defectuosos el 4% de los tractores fabricados por A, el 10% de los fabricados por B y el 2% de los fabricados por C. Elegido un tractor al azar, calcula razonadamente la probabilidad de:

a1) No salga defectuoso. **(0,75 puntos)**

a2) Si resultó defectuoso, que no fuera fabricado por C. **(0,5 puntos)**

b) En una clase hay 16 chicas y 4 chicos. Cada día elijo a un estudiante al azar para que salga a la pizarra. Calcula razonadamente la probabilidad de que los cinco días laborables de la semana salgan a la pizarra:

b1) Tres chicas. **(0,75 puntos)**

b2) Al menos tres chicos. **(0,5 puntos)**

n	k	p	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
5	0		0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313
	1		0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3292	0,3124	0,2592	0,2059	0,1657	0,1563
	2		0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125
	3		0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304	0,2757	0,3060	0,3125
	4		0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0412	0,0488	0,0768	0,1128	0,1470	0,1563
	5		0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102	0,0185	0,0282	0,0313

Junio 2019

Propuesta A

1A) a)  $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 2 & x \leq 1 \\ a\sqrt{x} - \frac{b}{x^2} & x > 1 \end{cases}$  Para que  $f$  sea derivable en  $\mathbb{R}$ , tiene que ser continua en  $\mathbb{R}$ .

Continuidad

- Cada una de las funciones componentes es continua en su dominio por ser funciones elementales bien definidas.

- Continuidad en  $x=1$ : ¿ $\exists \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ ?

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax^2 + bx + 2) = a + b + 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} (a\sqrt{x} - \frac{b}{x^2}) = a - b \end{array} \right\} a + b + 2 = a - b \Rightarrow b = -2 \quad (\text{para que } f \text{ sea continua en } x=1)$$

Derivabilidad

- Cada una de las funciones componentes es derivable en su dominio por ser funciones elementales derivables.

- Derivabilidad en  $x=1$ : ¿ $\exists f'(1)$ ?

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + b & x \leq 1 \\ \frac{a}{2\sqrt{x}} - \frac{2b}{x^3} & x > 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f'(1-) = 2a + b \\ f'(1+) = \frac{a}{2} - 2b \end{cases} \Rightarrow 2a + b = \frac{a}{2} - 2 \quad (\text{para que } \exists f'(1))$$

$$\Rightarrow a = -2/3$$

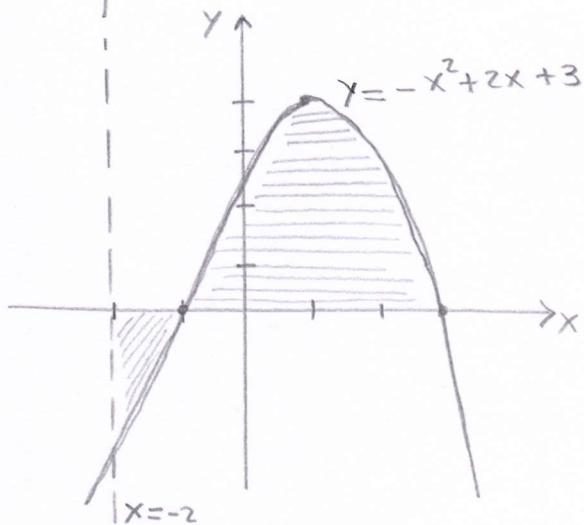
Conclusión: para  $(a, b) = (-\frac{2}{3}, -2)$ , la función  $f(x)$  es derivable en  $\mathbb{R}$ .

b)  $f(x) = x^2 - 4$  en  $[-3, 3]$

$f$  es continua y derivable en  $\mathbb{R}$  (por ser una función polinómica), luego es continua en  $[-3, 3]$  y derivable en  $(-3, 3)$ . Además,  $f(-3) = 5 = f(3)$ , luego  $f$  verifica las hipótesis del teorema de Rolle.

(2A)

a)



$$g(x) = -x^2 + 2x + 3$$

$$\text{Vertice: } x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2 \cdot (-1)} = 1 \quad \boxed{V(1, 4)}$$

$$y_v = 4$$

Puntos de corte con  $OX$

$$g(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{-2} = \begin{cases} -2 \\ 3 \end{cases}$$

$$A = \left| \int_{-2}^{-2} (-x^2 + 2x + 3) dx + \int_{-1}^3 (-x^2 + 2x + 3) dx \right| = \left| \left[ -\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right]_{-2}^{-1} + \left[ -\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right]_{-1}^3 \right| = \frac{7}{3} + \frac{32}{3} = \frac{39}{3} = \boxed{13 \text{ u}^2}$$

b) Recta normal a  $g(x)$  en  $x=4$

$$\left. \begin{array}{l} g(x) = -x^2 + 2x + 3 \\ g'(x) = -2x + 2 \\ g'(4) = -6, \quad g(4) = -5 \end{array} \right\} \quad \begin{aligned} y - g(4) &= -\frac{1}{g'(4)}(x-4) \\ y + 5 &= \frac{1}{6}(x-4) \end{aligned}$$

(3A)

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & | & 2^2 \\ -1 & 1 & 1 & | & 5 \\ 1 & -2 & -1 & | & -(4+2) \end{pmatrix}$$

$$|A| = -2 + 2 - (-2^2 + 2) = 2^2 - 2$$

$$|A| = 0 \Leftrightarrow 2^2 - 2 = 0 \Rightarrow 2 = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

$$\text{Para } \boxed{2=0}: \quad \left| \begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & -4 \end{array} \right| = -8 - (-10) \neq 0 \Rightarrow \text{Rg}(A) = 2 \neq 3 = \text{Rg}(A^*) \Rightarrow \text{S.I.}$$

$$\text{Para } \boxed{2=1}: \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & -5 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} F_1 + F_2 \\ -F_1 + F_3 \end{array}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -6 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} F_2 + F_3 \\ F_2 \end{array}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$\Rightarrow \text{rg}(A^*) = 2 \Rightarrow \text{Rg}(A) = 2 = \text{Rg}(A^*) < 3 = n-k$  incógnitas  $\Rightarrow$  S.C.I.

b)  $\boxed{2=1}$  Hacemos  $z = \lambda$ :  $x + 2y = 1$

$$\begin{array}{l} -x + y + \lambda = 5 \\ \hline 3y + \lambda = 6 \end{array} \Rightarrow y = \frac{6-\lambda}{3}$$

$$\text{Como } x = 1 - 2y = 1 - \frac{12-2\lambda}{3} = \frac{-9+2\lambda}{3}$$

(2)

Soluciones:  $(x, y, z) = \left( \frac{-9+2\lambda}{3}, \frac{6-\lambda}{3}, \lambda \right)$  con  $\lambda \in \mathbb{R}$

Cipri

- 4A a) A(1, 2, 0), B(0, -1, 2), C(2, -1, 3), D(1, 0, 1)

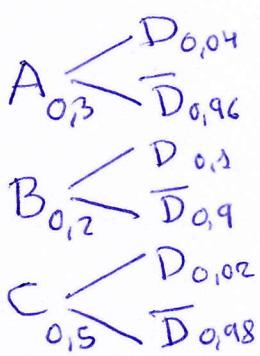
$$\pi \equiv \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \text{recta que pasa por A y por B} \\ \overrightarrow{u_s} = \text{(recta que pasa por C y por D)} \end{cases} \parallel \pi \rightarrow \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{AB} = (-1, -3, 2) \\ \overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{CD} = (-1, 1, -2)$$

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & -1 & -1 \\ y-2 & -3 & 1 \\ z & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 6(x-1) - 2(y-2) - z - (3z + 2(x-1) + 2(y-2)) = 0 \\ 6x - 6 - 2y + 4 - z - 3z - 2x + 2 - 2y + 4 = 0 \\ 4x - 4y - 4z + 4 = 0$$

$$\boxed{\pi \equiv x - y - z + 1 = 0}$$

$$b) \boxed{V_{\text{Tetraedro}}} = \frac{1}{6} \left| \det \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \right| = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} u^3 \quad \text{donde} \quad \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-1, -3, 2) \\ \overrightarrow{AC} = (1, -3, 3) \\ \overrightarrow{AD} = (0, -2, 1) \end{cases}$$

- 5A a) A = tractor producido por la fábrica A  
 B = " " " "  
 C = " " " "  
 D = tractor defectuoso



$$a_1) \boxed{P(\bar{D})} = P(A)P(\bar{D}/A) + P(B)P(\bar{D}/B) + P(C)P(\bar{D}/C) = \\ = 0,3 \cdot 0,96 + 0,2 \cdot 0,9 + 0,5 \cdot 0,98 = \boxed{0,958}$$

$$a_2) \boxed{P(\bar{C}/D)} = 1 - P(C/D)$$

$$P(C/D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{0,5 \cdot 0,02}{1 - 0,958} = 0,238$$

$$\Rightarrow \boxed{P(\bar{C}/D)} = 1 - 0,238 = \boxed{0,762}$$

- b)  $\bar{X} = \text{el estudiante chico sale a la pizarra} , \bar{X} \sim B(5, \frac{4}{20}) = B(5, 0,2)$

$$b_1) \boxed{P(\bar{X}=2)} = \binom{5}{2} \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^3 = \frac{1}{120} \cdot 0,128 = \boxed{0,12048} \quad (\text{mirando en la tabla}) \\ (\text{si las 3 son chicas, es porque han salido 2 chicos})$$

$$b_2) \boxed{P(\bar{X} \geq 3)} = P(\bar{X}=3) + P(\bar{X}=4) = 0,0512 + 0,0064 = \boxed{0,0576} \\ \uparrow \quad \text{solo hay 4 chicas}$$

## Evaluación para el Acceso a la Universidad

Convocatoria de 2019

### Materia: MATEMÁTICAS II

**Instrucciones:** El estudiante deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Dentro de cada opción el estudiante elegirá **cuatro** ejercicios entre los cinco propuestos. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntuá 2,5 puntos. Duración de la prueba: 90 minutos.

### PROPIUESTA B

**1B.** Calcula razonadamente los siguientes límites:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2e^{x-1}}{x+1} \right)^{\frac{x}{x-1}}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-e^{x^2-1} - x}{x^2 + 4x + 3}$$

**(1,25 puntos por límite)**

**2B.** Dadas las funciones  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  y  $g(x) = \frac{x^2}{2}$  con  $x \in \mathbb{R}$ .

- a) Encuentra razonadamente las coordenadas de los extremos relativos de las funciones  $f(x)$  y  $g(x)$ . **(1 punto)**  
 b) Calcula razonadamente el área del recinto cerrado limitado por las gráficas de las funciones  $f(x)$  y  $g(x)$ . **(1,5 puntos)**

**3B.** Dadas matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- a) Calcula razonadamente la matriz inversa de  $A$ . **(1 punto)**  
 b) Calcula razonadamente la matriz  $X$  que verifica que  $A \cdot X - 2B = C$ . **(1,5 puntos)**

**4B.** Sean la recta  $r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$ , el punto  $P(3, 1, -1)$  y el plano  $\pi \equiv 2x + y - z = 0$ .

- a) Calcula la distancia del punto  $P$  a la recta  $r$ . **(1,25 puntos)**  
 b) Encuentra razonadamente las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto  $P$  y por el punto  $Q$ , siendo  $Q$  el punto de corte de la recta  $r$  y el plano paralelo a  $\pi$  que contiene a  $P$ . **(1,25 puntos)**

**5B.** a) Una alarma de seguridad tiene instalados dos sensores. Ante una emergencia los sensores se activan de forma independiente. La probabilidad de que se active el primer sensor es de 0,98 y de que se active el segundo es de 0,96. Calcula razonadamente la probabilidad de que ante una emergencia:

- a1) Se active al menos uno de los dos sensores. **(0,75 puntos)**  
 a2) Se active solo uno de los sensores. **(0,5 puntos)**
- b) El tiempo, en horas, empleado en realizar cierta intervención quirúrgica sigue una distribución normal  $N(10, 2)$ . Calcular razonadamente el porcentaje de estas intervenciones que se pueden realizar:
- b1) Entre 6,5 y 13 horas. **(0,75 puntos)**  
 b2) En menos de siete horas. **(0,5 puntos)**

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
<b>1,5</b>	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
<b>1,6</b>	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
<b>1,7</b>	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
<b>1,8</b>	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
<b>1,9</b>	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767

Junio 2019

Propuesta B

**1B** a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2e^{x-1}}{x+1} \right)^{\frac{x}{x-1}} = [1^\infty] = \lim_{x \rightarrow 1} \left( 1 + \frac{2e^{x-1}-1}{x+1} \right)^{\frac{x}{x-1}} =$   
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \left( 1 + \frac{2e^{x-1}-x-1}{x+1} \right)^{\frac{x}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \left( 1 + \frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{2e^{x-1}-x-1}{x+1}} \right)^{\frac{x+1}{2e^{x-1}-x-1}} =$   
 $= e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(2e^{x-1}-x-1)}{x^2-1}}$   
 $\stackrel{[L'Hôpital]}{=}$   
 $= e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2e^{x-1}-x-1)+x(2e^{x-1}-1)}{2x}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$   
 b)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-e^{x-1}-x}{x^2+4x+3} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-e^{x-1} \cdot 2x-1}{2x+4} = \frac{-1 \cdot (-2)-1}{-2+4} = \frac{1}{2}$

**2B**  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}, g(x) = \frac{x^2}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$

a)  $f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$  }  $\Rightarrow f''(0) = \frac{-2}{1} \neq 0$   
 $f''(x) = \frac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$

$f(0) = 1$

Las coordenadas del extremo relativo de  $f(x)$  son  $(0, 1)$

$g(x) = \frac{x^2}{2} \rightarrow g'(x) = x \rightarrow g'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$  }  $\Rightarrow (\text{como } g(0) = 0)$   
 $g''(x) = 1 \rightarrow g''(0) > 1$

⇒ las coordenadas del extremo relativo de  $g(x)$  son  $(0, 0)$

$$\boxed{2B} b) \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{2} \Rightarrow z = x^2 + x^4 \Rightarrow \begin{cases} x^4 + x^2 - 2 = 0 \\ z = x^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + z - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases} \Rightarrow x = \sqrt{z} \Rightarrow x = \pm 1$$

$$\text{Area} = \left| \int_{-1}^1 \left( \frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2} \right) dx \right| = \left| \arctg x - \frac{x^3}{6} \right|_{-1}^1 = \left| \arctg 1 - \frac{1}{6} - \left( \arctg(-1) + \frac{1}{6} \right) \right| = \left| 2 \arctg 1 - \frac{1}{3} \right| = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3} \simeq 3,24 \text{ u}^2$$

$$\boxed{3B} 3) A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1, A^t = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Adj}(A)^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$b) A\bar{x} - 2B = C \Rightarrow A\bar{x} = 2B + C \Rightarrow \bar{A}^t A \bar{x} = \bar{A}^t (2B + C) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{x} = A^{-1}(2B + C)}$$

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right] = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 4 & 5 & 10 \\ -9 & -12 & -23 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\boxed{4B} \Gamma \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}, P(3,1,-1), \pi \equiv 2x+y-z=0$$

$$\left. \begin{aligned} a) \vec{u}_r &= (3,1,2) \\ A(2,0,-1) &\in \Gamma \\ \vec{AP} &= (2,1,0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow d(P, \Gamma) = \frac{|\vec{u} \times \vec{AP}|}{|\vec{u}|} = \frac{|(-2,4,1)|}{\sqrt{9+1+4}} = \frac{\sqrt{6}}{2} u$$

b) Los planos paralelos a  $\pi$  son de la forma  $2x+y-z=k$ , e imponiendo que  $P(3,1,-1)$  pertenezca al plano, obtenemos  $k$ :

$$6+1+1 = k \Rightarrow k = 8$$

Para encontrar  $Q$ , resolvemos el sistema

$$\begin{cases} \frac{x-1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2} \\ 2x+y-z=8 \end{cases} \Rightarrow$$

↑  
(al final)

$$\Rightarrow (x, y, z) = (4, 1, 1) \Rightarrow Q(4, 1, 1)$$

El punto  $P(3, 1, -1)$  y el vector  $\vec{PQ} = (-2, 0, 2)$  determinan la recta pedida:

$$\boxed{\begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = 1 \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}}$$

**5B** a)  $S_i$  = se activa el sensor  $i$ ,  $i=1, 2$

$$P(S_1) = 0,98, P(S_2) = 0,96$$

a<sub>1</sub>) 
$$\boxed{P(S_1 \cup S_2) = P(S_1) + P(S_2) - P(S_1 \cap S_2) =}$$

$\uparrow$

$$= 0,98 + 0,96 - 0,98 \cdot 0,96 = \boxed{0,9992}$$

$S_1$  y  $S_2$  son indep.

a<sub>2</sub>) 
$$\boxed{P(\overline{S_1 \cap S_2}) = 1 - P(S_1 \cap S_2) = 1 - 0,9408 = \boxed{0,0592}}$$

b)  $X$  = tiempo (en horas) en realizar cierta intervención quirúrgica

$$X \sim N(10, 2)$$

b<sub>1</sub>) 
$$\boxed{P(6,5 \leq X \leq 13) = P\left(\frac{-3,5}{2} \leq Z \leq \frac{3}{2}\right) = P(Z \leq \frac{3}{2}) -}$$

$\left[ 1 - P\left(Z \leq \frac{3,5}{2}\right) \right] = \boxed{0,8931}$

b<sub>2</sub>) 
$$\boxed{P(X < 7) = P(Z < -\frac{3}{2}) = 1 - P(Z < \frac{3}{2}) = 1 - 0,9332 = \boxed{0,0668}}$$

**3B**) Calculamos  $A^{-1}$  por Gaus-Jordan:

$$\begin{array}{l}
 \left( \begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{-F_1} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_1 + F_2 \\ -2F_1 + F_3}} \\
 \longrightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{3F_2 + 2F_3} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 : 2} \\
 \longrightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{-\frac{1}{2}F_3 + F_2 \\ -F_3 + F_2}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{-F_2 + F_3} \\
 \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & -2 \end{array} \right) \Rightarrow A^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}}
 \end{array}$$

**4B**) Resolución del sistema

$$\begin{cases} \frac{x-1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2} \\ 2x + y - z = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x-1}{3} = y \Rightarrow x - 3y = 1 \\ y = \frac{z+1}{2} \Rightarrow 2y - z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l}
 \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 8 \end{array} \right) \xrightarrow{-2F_1 + F_3} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & -1 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow{-7F_2 + 2F_3} \\
 \longrightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{array} \right) \begin{matrix} [1] \\ [2] \\ [3] \end{matrix}
 \end{array}$$

$$\text{De [3]: } 5z = 5 \Rightarrow z = 1$$

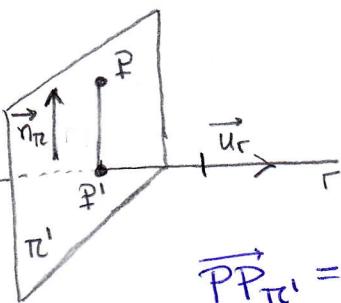
$$\text{Sustituimos en [2]: } 2y - z = 1 \Rightarrow y = \frac{1+1}{2} = 1$$

$$\text{Sustituimos en [1]: } x - 3y = 1$$

$$x = 3 \cdot 1 + 1 = 4$$

$$\text{Solución: } (x, y, z) = (4, 1, 1)$$

**4B) 2)**  $d(P, \Gamma) = d(P, \Pi')$  donde  $\Pi'$  es el punto de corte de  $\Gamma$  y  $\Pi'$  (plano  $\perp$  a  $\Gamma$  t.g.  $P \in \Pi'$ )



Calculamos  $\Pi'$

$$\Pi' \equiv \{P, \vec{n}_{\Pi'} = \vec{u}_r\} \equiv \overrightarrow{PP_{\Pi'}} \cdot \vec{u}_r = 0 \text{ donde } P_{\Pi'} \text{ en un punto genérico de } \Pi'$$

$$\overrightarrow{PP_{\Pi'}} = (x, y, z) - (3, 1, -1) = (x-3, y-1, z+1)$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PP_{\Pi'}} \cdot \vec{u}_r &= 0 \Leftrightarrow (x-3, y-1, z+1) \cdot (3, 1, 2) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3(x-3) + y-1 + 2(z+1) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \Pi' \equiv 3x + y + 2z - 8 = 0 \end{aligned}$$

Calculamos  $P'$

$$P' \equiv \Gamma \cap \Pi' \equiv \begin{cases} x-3y = 1 \\ 2y-z = 1 \\ 3x+y+2z = 8 \end{cases} \Rightarrow P'\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$$

Calculamos la distancia

$$d(P, \Gamma) = d(P, P') = |\overrightarrow{PP'}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ u}$$

$$\overrightarrow{PP'} = \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) - (3, 1, -1) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$$

**1B) 2)** Usando la fórmula

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2e^{x-1}}{x+1} \right)^{\frac{x}{x-1}} = [1^\infty] = e^{1/2} = \sqrt{e}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x-1} \left( \frac{2e^{x-1}}{x+1} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x-1} \left( \frac{2e^{x-1} - x - 1}{x+1} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2xe^{x-1} - x^2 - x}{(x-1)(x+1)} = \left[ \frac{0}{0} \right] \stackrel{\text{regla de L'Hôpital}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2e^{x-1} + 2xe^{x-1} - 2x - 1}{2x} =$$

$$= \frac{4-3}{2} = \frac{1}{2}$$

**Instrucciones:** El estudiante deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Dentro de cada opción el estudiante elegirá **cuatro** ejercicios entre los cinco propuestos. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntuá 2,5 puntos. Duración de la prueba: 90 minutos.

**PROPUESTA A**

**1A.** a) Estudia la continuidad en todo  $\mathbb{R}$  de la función  $f(x) = \frac{2x^3 - x^2 - x}{x^2 - 1}$  indicando los tipos de discontinuidad que aparecen. **(1,5 puntos)**

b) Calcula las coordenadas de los extremos relativos de la función  $g(x) = x e^{-x}$ . **(1 punto)**

**2A.** a) Calcula razonadamente el área del recinto cerrado limitado por las gráficas de las funciones  $f(x) = 16 - x^2$  y  $g(x) = (x + 2)^2 - 4$ . **(1,5 puntos)**

b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función  $f(x) = 16 - x^2$  en el punto de abscisa  $x = 1$ . **(1 punto)**

**3A.** a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro  $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcl} x - (a-2)y - z & = & 1 \\ x - 2y + z & = & -4 \\ x - 3y + az & = & -a^2 \end{array} \left. \right\} \quad \text{(1,5 puntos)}$$

b) Resuélvelo razonadamente para el valor  $a = 3$ . **(1 punto)**

**4A.** Dada la recta  $r \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$  y el plano  $\pi \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = \lambda - \mu \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

a) Determina razonadamente la posición relativa de  $r$  y  $\pi$ . **(1,25 puntos)**

b) Encuentra razonadamente la ecuación general del plano perpendicular al plano  $\pi$  y que contiene a la recta  $r$ . **(1,25 puntos)**

**5A.** a) Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio cuyas probabilidades son  $P(A)=0,75$  y  $P(B)=0,35$ . Calcula razonadamente las probabilidades que deben asignarse a los sucesos  $A \cup B$  y  $A \cap B$  en cada uno de los siguientes casos:

a1) Si A y B fuesen independientes. **(0,75 puntos)**

a2) Si  $P(A | B) = 0,6$ . **(0,5 puntos)**

**Nota:**  $P(A | B)$  denota la probabilidad condicionada.

b) El 1% de los cheques que recibe un banco no tienen fondos. Razona la respuesta de las siguientes preguntas:

b1) Si en una hora recibe cinco cheques, ¿cuál es la probabilidad de que tenga algún cheque sin fondos? Redondea el resultado a la centésima. **(0,75 puntos)**

b2) El banco dispone de cinco sucursales en una ciudad, ¿cuál es la probabilidad de que al menos tres sucursales de esa ciudad reciban algún cheque sin fondos? **(0,5 puntos)**

n k	p	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
5 0		0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313
5 1		0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3292	0,3124	0,2592	0,2059	0,1657	0,1563
5 2		0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125
5 3		0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304	0,2757	0,3060	0,3125
5 4		0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0412	0,0488	0,0768	0,1128	0,1470	0,1563
5 5		0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102	0,0185	0,0282	0,0313

Julio 2019

Propuesta A

1A)  $f(x) = \frac{2x^3 - x^2 - x}{x^2 - 1}$

$f$  es continua en  $\mathbb{R} - \{x : x^2 - 1 = 0\} = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$ , por ser racional.

¡Esta función NO es discontinua en ningún punto!, ya que para que una función sea discontinua en un punto, tiene que estar definida en ese punto.

Supongo que preguntarán por la "discontinuidad" de  $f$  en  $x = \pm 1$ :

$x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - x^2 - x}{x^2 - 1} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x^2 - 2x - 1}{2x} = \frac{3}{2} \quad (\text{también se podrían haber factorizado el numerador y el denominador, y haber simplificado})$$

$f$  tiene en  $x = 1$  una "discontinuidad" evitable, definiendo  $f(1) = \frac{3}{2}$

$x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3 - x^2 - x}{x^2 - 1} = \left[ \frac{-2}{0} \right] \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty \end{cases}$$

$f$  tiene en  $x = -1$  una "discontinuidad" asintótica

b)  $g(x) = xe^{-x}$

$$g'(x) = e^{-x} + xe^{-x}(-1) = e^{-x}(1-x)$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow 1-x=0 \Rightarrow x=1$$

$$g''(x) = e^{-x}(-1)(1-x) + e^{-x}(-1) = e^{-x}(x-2)$$

$$g''(1) \neq 0 \quad (\text{de hecho, } < 0)$$

Las coordenadas del extremo relativo de  $g$  son  $(1, g(1)) = (1, \frac{1}{e})$  (máximo)

**[2A]** a)  $f(x) = 16 - x^2$

$$g(x) = (x+2)^2 - 4$$

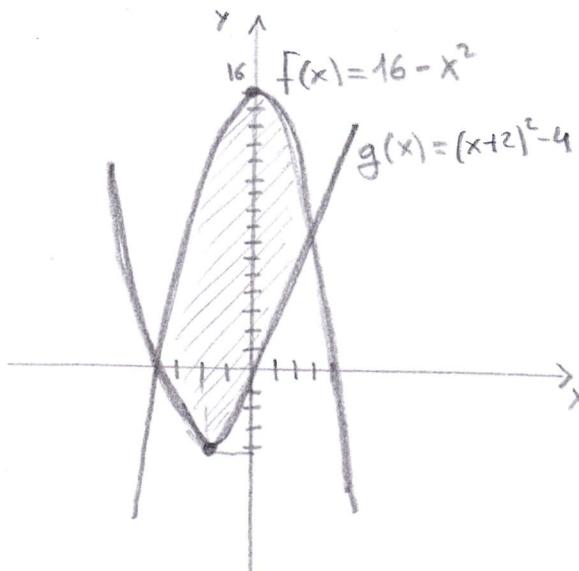
$$f(x) = 16 - x^2$$

Vértice:  $x_v = \frac{-b}{2a} = 0$

$$y_v = 16 - 0^2 = 16 \quad \left\{ V_f(0, 16) \right.$$

Puntos de corte con OX

$$16 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 4$$



$$g(x) = (x+2)^2 - 4$$

Vértice:  $V_g(-2, -4)$

Puntos de corte con OX

$$(x+2)^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ -4 \end{cases}$$

Puntos de corte de  $f$  y  $g$

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 16 - x^2 = (x+2)^2 - 4 =$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 4x - 16 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 2 \\ -4 \end{cases}$$

Área

$$A = \int_{-4}^2 (f(x) - g(x)) dx = \int_{-4}^2 (2x^2 + 4x - 16) dx =$$

$$= \left. \frac{2x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} - 16x \right|_{-4}^2 = \boxed{72 \text{ u}^2}$$

b) Ecación de la recta tangente

$$y - f(a) = f'(a)(x-a)$$

$$f(x) = 16 - x^2 \Rightarrow f(1) = 15$$

$$f'(x) = -2x \Rightarrow f'(1) = -2$$

$$\boxed{y - 15 = -2(x-1)}$$

**[3A]** a) Discusión

$$x - (a-2)y - z = 1$$

$$x - 2y + z = -4$$

$$x - 3y + az = -a^2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -(a-2) & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & a \end{pmatrix}, \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -(a-2) & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 1 & -3 & a & -a^2 \end{pmatrix}$$

$$|A| = -2a + 3 - (a-2) - 2 + 3 + (a-2)a =$$

$$= a^2 - 5a + 6 = 0 \Rightarrow a = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$$

Caso  $\boxed{a=2}$ :  $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \neq 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -4 \\ 1 & -3 & -4 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{rg}(A) = 2 \neq \operatorname{rg}(\tilde{A}) = 3$$

Caso  $\boxed{a=3}$ :  $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

$$\left. \begin{array}{l} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -4 \\ 1 & -3 & -4 \end{vmatrix} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{rg}(A) = 2 = \text{rg}(\tilde{A})$$

Discusión

Si  $a \neq \{2, 3\} \Rightarrow \text{rg}(A) = 3 = \text{rg}(\tilde{A}) = \text{nº de incógnitas} \Rightarrow \text{S.C.D.}$

Si  $a = 2 \Rightarrow \text{rg}(A) = 2 \neq \text{rg}(\tilde{A}) = 3 \Rightarrow \text{S.I.}$

Si  $a = 3 \Rightarrow \text{rg}(A) = 2 = \text{rg}(\tilde{A}) < 3 = \text{nº de incógnitas} \Rightarrow \text{S.C.I.}$

b) Resolución para  $a=3$ 

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 1 & -3 & 3 & -9 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} F_1+F_2 \\ -F_1+F_3 \end{array}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & 4 & -10 \end{array} \right) \xrightarrow{-2F_2+F_3} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{matrix} [1] \\ [2] \\ [3] \end{matrix}$$

Llamamos  $z = \lambda \in \mathbb{R}$ .

Sustituimos en [2]:  $-y + 2\lambda = -5 \Rightarrow y = 2\lambda + 5$

Sustituimos en [1]:  $x - (2\lambda + 5) - \lambda = 1 \Rightarrow x = 3\lambda + 6$

Soluciones:  $(x, y, z) = (3\lambda + 6, 2\lambda + 5, \lambda)$  con  $\lambda \in \mathbb{R}$

HA  $\Gamma \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$  ;  $\Pi \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = \lambda - \mu \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}$  con  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

De otra forma  
al final

Escribimos la recta como intersección de dos planos

$$\Gamma \equiv \begin{cases} x-1 = -y \\ 2y = z \end{cases}$$

Escribimos el plano en forma general:  $\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ y & 1 & -1 \\ z+1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \Pi \equiv 2x - 2y - 2 = 0$$

Formamos el sistema y lo discutimos:

$$\begin{cases} x+y = 1 \\ 2y-z = 0 \\ 2x-2y = 2 \end{cases}, M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{array} \right| = -2 - 2 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(M) = 3 = \text{rg}(\tilde{M}) \Rightarrow \text{S.C.D.} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \Gamma$  y  $\Pi$  se cortan en un punto

b) Dicho plano está determinado por  $\{\vec{P}_r, \vec{U}_r, \vec{n}_{TL}\}$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{P}_r(1,0,0) \\ \vec{U}_r = (-1,1,2) \\ \vec{n}_{TL} = (2,-2,0) \end{array} \right\} \quad \text{TL}^1 = \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 2 \\ y & 1 & -2 \\ z & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{TL}^1 \equiv 4x + 4y - 4 = 0$$

$$\boxed{\text{TL}^1 \equiv x + y - 1 = 0}$$

5A a)  $P(A) = 0,75, P(B) = 0,35$

a1) A y B independientes  $\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0,75 \cdot 0,35 = 0,2625$

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,75 + 0,35 - 0,2625 = 0,8375}$$

a2)  $P(A/B) = 0,6 \Rightarrow P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) =$

$$= P(A/B) P(B) = 0,6 \cdot 0,35 = 0,21$$

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,75 + 0,35 - 0,21 = 0,89}$$

b)  $\Sigma = \text{nº de cheques que recibe el banco y no tienen fondos}$

$$\Sigma \sim B(5, 0,05)$$

b1)  $\boxed{P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P(\Sigma = 0) = 1 - 0,95^{10} = 0,05}$

A = algún cheque sin fondos

mirando en la tabla

$\bar{A}$  = ningún cheque sin fondos

b2)  $\boxed{P(\Sigma \geq 3) = P(\Sigma = 3) + P(\Sigma = 4) + P(\Sigma = 5) = 0 + 0 + 0 = 0}$

mirando en la tabla

4A

a)  $\Gamma \equiv \{P, \vec{u}_\Gamma\}, \pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$   
 $\vec{n}_\pi = (A, B, C)$

Posiciones relativas

- $\vec{u}_\Gamma \neq \vec{n}_\pi \Leftrightarrow \Gamma \text{ y } \pi \text{ son secantes (se cortan en un punto)}$
- $\vec{u}_\Gamma \perp \vec{n}_\pi \begin{cases} P \in \pi \Rightarrow \Gamma \subset \pi \text{ (r contenida en } \pi) \\ P \notin \pi \Rightarrow \Gamma \parallel \pi \text{ (r y } \pi \text{ son paralelos)} \end{cases}$

$$\vec{u}_\Gamma = (-1, 1, 2)$$

$$\vec{n}_\pi = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{k} + 2\vec{j} - \vec{k} + 2\vec{i} = (2, 2, -2)$$

$$\vec{u}_\Gamma \cdot \vec{n}_\pi = (-1, 1, 2) \cdot (2, 2, -2) = -4 \neq 0 \Rightarrow \vec{u}_\Gamma \neq \vec{n}_\pi \Rightarrow$$

$\Rightarrow \Gamma \text{ y } \pi \text{ son secantes.}$

## Evaluación para el Acceso a la Universidad

Convocatoria de 2019

Materia: MATEMÁTICAS II

**Instrucciones:** El estudiante deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Dentro de cada opción el estudiante elegirá **cuatro** ejercicios entre los cinco propuestos. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntuá 2,5 puntos. Duración de la prueba: 90 minutos.

### PROPIUESTA B

**1B.** a) Demuestra que la ecuación  $\sin x - 2x + 1 = 0$  tiene al menos una solución real en el intervalo  $[0, \pi]$ . **(1,5 puntos)**

b) Calcula razonadamente el número exacto de soluciones de la ecuación anterior cuando  $x \in [-200, 200]$ . **(1 punto)**

**2B.** Calcula razonadamente las siguientes integrales:

$$\text{a)} \int_0^1 (x+1)e^{-x} dx \quad \text{b)} \int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx \quad \text{(1,25 puntos por integral)}$$

**Nota:** En la integral b) puedes ayudarte haciendo el cambio de variable  $t = \sqrt{x}$ .

**3B.** Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & a+2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcula razonadamente el rango de la matriz  $A$  según los valores del parámetro  $a \in \mathbb{R}$ . **(1 punto)**  
 b) Para  $a = 1$  calcula razonadamente la matriz  $X$  que verifica que  $X \cdot A = B - X$ . **(1,5 puntos)**

**4B.** a) Dados los vectores  $\vec{u} = (-1, 0, -2)$ ,  $\vec{v} = (a, b, 1)$  y  $\vec{w} = (2, 5, c)$ , halla razonadamente el valor de  $a$ ,  $b$  y  $c$  para que los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  sean ortogonales y para que el vector  $\vec{w}$  sea igual al producto vectorial de  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ . **(1,5 puntos)**

b) Determina razonadamente las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto  $P(-1, 3, 1)$  y es perpendicular al plano  $\pi \equiv x + y + 2z - 3 = 0$ . Comprueba si los puntos  $Q(1, 5, 5)$  y  $R(0, 4, 2)$  pertenecen o no a la recta. **(1 punto)**

**5B.** a) En la sala de pediatría de un hospital el 70 % de los pacientes son niñas. De los niños el 40 % son menores de 36 meses y de las niñas el 30 % tienen menos de 36 meses. Un pediatra entra en la sala y selecciona un paciente al azar. Calcula razonadamente la probabilidad de:

a1) Que no tenga menos de 36 meses. **(0,75 puntos)**

a2) Si el paciente resulta ser menor de 36 meses, que sea niña. **(0,5 puntos)**

b) En una de las pruebas de acceso al cuerpo de ingenieros de la Administración Pública se realiza un test de 100 ítems a 450 opositores. Cada ítem vale un punto y se supera la prueba si se obtienen al menos 75 puntos. Suponiendo que las puntuaciones obtenidas por los opositores siguen una distribución normal de media 60 puntos y desviación típica 10 puntos, calcula razonadamente:

b1) La probabilidad de obtener 75 o más puntos. **(0,75 puntos)**

b2) El número de opositores que obtuvieron menos de 75 puntos. **(0,5 puntos)**

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
<b>1,5</b>	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
<b>1,6</b>	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
<b>1,7</b>	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
<b>1,8</b>	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
<b>1,9</b>	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767

Julio 2019

## Propuesta B

**B1** a)  $\operatorname{sen} x - 2x + 1 = 0$  una solución en  $[0, \pi]$

Consideramos  $f(x) = \operatorname{sen} x - 2x + 1$  que verifica:

1)  $f$  es continua en  $\mathbb{R}$  (luego en particular en  $[0, \pi]$ ) por ser suma de funciones continuas.

2)  $f(0) = \operatorname{sen} 0 - 2 \cdot 0 + 1 = 1 > 0$

$$f(\pi) = \operatorname{sen} \pi - 2\pi + 1 = 0 - 2\pi + 1 < 0$$

Aplicando el teorema de Bolzano,  $\exists c \in (0, \pi)$  t.q.  $f(c) = 0$ , esto es, la ecuación  $\operatorname{sen} x - 2x + 1 = 0$  tiene una solución en  $(0, \pi)$ .

b)  $f'(x) = \cos x - 2 < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$  ya que  $|\cos x| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ , luego  $f$  es estrictamente decreciente y, como consecuencia, solo tiene una solución real. En particular, tiene una única solución en  $[-200, 200]$ .

**B2** a)  $\int_0^1 (x+1)e^{-x} dx$

$$\int (x+1)e^{-x} dx = \left[ u = x+1 \rightarrow du = dx \atop dv = e^{-x} dx \rightarrow v = -e^{-x} \right] = -(x+1)e^{-x} + \int e^{-x} dx =$$

$$= -(x+1)e^{-x} - e^{-x} = (-x-2)e^{-x}$$

$$\left[ \int_0^1 (x+1) e^{-x} dx = \left[ f(x) = -(-x-2)e^{-x} \right]_0^1 = -3e^{-1} - (-2) = 2 - \frac{3}{e} \right].$$

b)  $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx = \left[ t = \sqrt{x} \rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \atop t^2 = x \right] = \int \frac{1}{1+t^2} dt =$ 

$$= 2 \operatorname{arctg} t = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x} + C$$

**B3**  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2+2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$3) |A| = \lambda(\lambda+2) = 0 \Rightarrow \lambda = \begin{cases} 0 \\ -2 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

Conclusion: Si  $\lambda \neq \begin{cases} 0 \\ -2 \end{cases} \Rightarrow \text{rango } A = 3$

Si  $\lambda = \begin{cases} 0 \\ -2 \end{cases} \Rightarrow \text{rango } A = 2$

$$b) XA = B - X \Rightarrow XA + X = B \Rightarrow X(A + I) = B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X(A + I)(A + I)^{-1} = B(A + I)^{-1} \Rightarrow X = B(A + I)^{-1}$$

Para  $\lambda = 1$

$$A + I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}F_2 : 2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2F_1 + F_3}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{16}F_3 + F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 : (-8)}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-4F_3 + F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (I | (A + I)^{-1})$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}}$$

**[B4]** 2)  $\vec{u} = (-1, 0, -2)$ ,  $\vec{v} = (2, b, 1)$ ,  $\vec{w} = (2, 5, c)$  t.g.  $\begin{cases} \vec{u} \perp \vec{v} \\ \vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} \end{cases}$

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow (-1, 0, -2) \cdot (2, b, 1) = 0 \Rightarrow -2 - 2 = 0 \Rightarrow 2 = -2$$

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & b & 1 \end{vmatrix} = 2b\vec{i} + 5\vec{j} - b\vec{k} = (2b, 5, -b) = (2, 5, c) \Rightarrow \begin{cases} 2b = 2 \Rightarrow b = 1 \\ 5 = 5 \\ c = -b \Rightarrow c = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (a, b, c) = (-2, 1, -1)$$

b)  $\Gamma \text{ t.q. } \begin{cases} P(-1, 3, 1) \in \Gamma \\ \Gamma \perp \pi \equiv x + y + 2z - 3 = 0 \end{cases}$

El vector normal a  $\pi$  es un vector director de  $\Gamma$ :

$$\vec{n}_\pi = (1, 1, 2) = \vec{u}_\Gamma$$

y, por tanto, la recta es

$$\boxed{\Gamma \equiv \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 3 + \lambda \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}}$$

¿ Q(1, 5, 5) y R(0, 4, 2) están en  $\Gamma$  ?

$$\Gamma \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-1}{2} \Rightarrow \begin{cases} Q(1, 5, 5) = \frac{1+1}{1} = \frac{5-3}{1} = \frac{5-1}{2} \Rightarrow \\ \qquad \Rightarrow \boxed{Q \in \Gamma} \\ R(0, 4, 2) = \frac{0+1}{1} = \frac{4-3}{1} \neq \frac{2-1}{2} \Rightarrow \\ \qquad \Rightarrow \boxed{R \notin \Gamma} \end{cases}$$

**B5** a) A = paciente niño

$\bar{A}$  = paciente niño

B = tienen menos de 36 meses

$$A_{0,7} \begin{cases} \nearrow B_{0,3} \\ \searrow \bar{B}_{0,7} \end{cases}$$

$$\bar{A}_{0,3} \begin{cases} \nearrow B_{0,4} \\ \searrow \bar{B}_{0,6} \end{cases}$$

31)  $P(\bar{B}) = P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap \bar{B}) =$

$$= P(A)P(\bar{B}/A) + P(\bar{A})P(\bar{B}/\bar{A}) = 0,7 \cdot 0,7 + 0,3 \cdot 0,6 = \\ = 0,67$$

32)  $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B/A)}{P(B)} = \frac{0,7 \cdot 0,3}{0,33} = \widehat{0,63}$

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - 0,67 = \\ = 0,33$$

b)  $Z$  = puntuación obtenida en el test

$$Z \sim N(60, 10)$$

b1)  $P(Z \geq 75) = P(Z \geq \frac{75-60}{10}) = P(Z \geq 1,5) = 1 - P(Z < 1,5) = \\ = 1 - 0,9332 = \widehat{0,0668}$  (mirando en la tabla)

b2)  $P(Z < 75) = 1 - 0,9332 = 0,0668$

$450 \cdot 0,9332 = 419,94 \simeq 420$  opositores obtuvieron menos de 75 puntos