

Aplicaciones del teorema de Rolle

1. Comprobar que la función $f(x) = x^3 - 4x + 3$ verifica las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0, 2]$.

Solución:

Sabemos que f es derivable en \mathbb{R} , por ser una función polinómica, luego es continua en $[0, 2]$ y derivable en $(0, 2)$.

Además, $f(0) = 3 = f(2)$, luego por el teorema de Rolle, $\exists c \in (0, 2)$ tal que $f'(c) = 0$.

En este caso, además podemos calcular el valor de c :

$$f'(x) = 3x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Así, } c = \frac{2\sqrt{3}}{3} \in (0, 2) \text{ y } f'\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = 0.$$

2. Demostrar, aplicando el teorema de Rolle, que la ecuación $x^4 - 8x^2 + k = 0$ no tiene más de una solución en $[0, 2]$ para cualquier $k \in \mathbb{R}$.

Solución:

Supongamos que dicha ecuación tiene dos soluciones en el intervalo $[0, 2]$, esto es, $\exists \alpha, \beta \in [0, 2]$ con $\alpha < \beta$ tales que $f(\alpha) = 0 = f(\beta)$, donde $f(x) = x^4 - 8x^2 + k$ es una función derivable en \mathbb{R} , por ser una función polinómica, luego:

- i) f es continua en $[\alpha, \beta]$ y derivable en (α, β)
- ii) $f(\alpha) = 0 = f(\beta)$

Así, por el teorema de Rolle, $\exists c \in (\alpha, \beta)$ tal que $f'(c) = 0$ (además, $c \in (0, 2)$), pero las soluciones

$$\text{de } f'(x) = 4x^3 - 16x = 0 \text{ son } x = \begin{cases} -2 \\ 0 \\ 2 \end{cases} \text{ y ninguna de ellas está en el intervalo } (0, 2), \text{ contradicción.}$$

Como consecuencia, la ecuación $x^4 - 8x^2 + k = 0$ tiene una o ninguna solución en $[0, 2]$ para cualquier $k \in \mathbb{R}$.

3. Calcular p , m y n para que la función

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + px & \text{si } -1 \leq x \leq 3 \\ mx + n & \text{si } 3 < x \leq 5 \end{cases}$$

verifique las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[-1, 5]$.

Solución:

Estudiamos la continuidad de f en $x = 3$: $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$?

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} (-x^2 + px) = -9 + 3p = f(3) \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} (mx + n) = 3m + n \end{aligned} \right\} \Rightarrow -9 + 3p = 3m + n \text{ para que } f \text{ sea continua en } x = 3$$

Estudiamos ahora la derivabilidad de f en $x = 3$: $\exists f'(3)$?

$$\left. \begin{aligned} f'_-(3) &= -6 + p \\ y &= -x^2 + px \\ y' &= -2x + p \\ f'_+(3) &= m \\ y &= mx + n \\ y' &= m \end{aligned} \right\} \Rightarrow -6 + p = m \text{ para que } f \text{ sea derivable en } x = 3$$

Por último, imponemos que $f(-1) = f(5)$:

$$\left. \begin{aligned} f(-1) &= -1 - p \\ f(5) &= 5m + n \end{aligned} \right\} \Rightarrow -1 - p = 5m + n$$

Resolvemos el sistema $\begin{cases} -9 + 3p = 3m + n \\ -6 + p = m \\ -1 - p = 5m + n \end{cases} \Rightarrow (p, m, n) = \left(\frac{10}{3}, -\frac{8}{3}, 9\right)$

Además, en este caso podemos calcular el valor de c :

$$f'(x) = \begin{cases} -2x + \frac{10}{3} & \text{si } -1 \leq x \leq 3 \\ -\frac{8}{3} & \text{si } 3 < x \leq 5 \end{cases}$$

luego $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$ ($c = \frac{5}{3}$).

4. [Modelo de 2020, 3b = Junio de 2019, 3b] Comprueba si la función $f(x) = x^2 - 4$ verifica las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[-3, 3]$.

Solución:

La función f es continua y derivable en \mathbb{R} , por ser una función polinómica, luego:

- i) f es continua en $[-3, 3]$
- ii) f es derivable en $(-3, 3)$

Además, $\left. \begin{aligned} f(-3) &= (-3)^2 - 4 = 5 \\ f(3) &= 3^2 - 4 = 5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(-3) = f(3).$

Por tanto, cumple las hipótesis del teorema de Rolle, esto es, $\exists c \in (-3, 3)$ tal que $f'(c) = 0$.

5. [Junio de 2018, propuesta B, 1B, a) y b)] a) Prueba que cualquiera que sea la constante a , la función $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x + a$ cumple las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[1, 3]$.

b) Calcula razonadamente un punto del intervalo abierto $(1,3)$ cuya existencia asegura el teorema de Rolle.

Solución:

a) Como f es una función derivable (por ser una función polinómica), es continua y derivable en \mathbb{R} , luego en particular es continua en $[1,3]$ y derivable en $(1,3)$.

Veamos si $f(1) = f(3)$:

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = 1 - 5 + 7 + a = 3 + a \\ f(3) = 27 - 5 \cdot 9 + 7 \cdot 3 + a = 3 + a \end{array} \right\} \Rightarrow f(1) = f(3)$$

Por tanto, cumple las hipótesis del teorema de Rolle $\forall a \in \mathbb{R}$, en $[1,3]$.

$$b) f'(x) = 3x^2 - 10x + 7 \stackrel{(1)}{=} 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 1 \\ \frac{7}{3} \end{cases} \text{ (donde en (1) hemos usado el teorema de Rolle).}$$

Así, el punto pedido es $c = \frac{7}{3} \in (1,3)$.

6. [Junio de 2017, propuesta A, 1A, b)] Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a & \text{si } x \leq 2 \\ -x^2 + bx - 9 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- Calcula razonadamente los parámetros a y b para que $f(x)$ sea derivable en todo \mathbb{R} .
- Enuncia el teorema de Rolle y comprueba si, para los valores hallados en el apartado anterior, la función $f(x)$ verifica las hipótesis del teorema en el intervalo $[-2,6]$.

Solución:

b) Teorema de Rolle

Si $f(x)$ es una función continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y tal que $f(a) = f(b)$, entonces $\exists c \in (a,b): f'(c) = 0$.

Los valores de a y b calculados en el apartado a) son: $a = -1$ y $b = 8$.

La función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq 2 \\ -x^2 + 8x - 9 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

es continua y derivable en \mathbb{R} (demostrado en el apartado anterior), luego en particular es continua en $[-2,6]$ y derivable en $(-2,6)$. Además,

$$\left. \begin{array}{l} f(-2) = (-2)^2 - 1 = 3 \\ f(6) = -6^2 + 8 \cdot 6 - 9 = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow f(-2) = f(6)$$

Aplicando el teorema de Rolle, $\exists c \in (-2,6)$ tal que $f'(c) = 0$.

7. [Junio de 2016, propuesta B, 1B, b)] a) Enuncia los teoremas de Bolzano y de Rolle.

b) Razona que la ecuación $3e^x + x^5 = 0$ tiene al menos una solución real.

c) Razona que, de hecho, dicha solución es única.

Solución:

a) Teorema de Bolzano

Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y en los extremos del intervalo toma valores de signo contrario $[\text{signo } f(a) \neq \text{signo } f(b)]$, entonces $\exists c \in (a, b): f(c) = 0$.

Teorema de Rolle

Si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y tal que $f(a) = f(b)$, entonces $\exists c \in (a, b): f'(c) = 0$.

b) La función es continua en \mathbb{R} (por ser suma de funciones continuas), luego continua en $[-1, 0]$.

Además:

$$\left. \begin{array}{l} f(-1) = \frac{2}{e} - 1 < 0 \\ f(0) = 2 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{signo } f(-1) \neq \text{signo } f(0)$$

Aplicando el teorema de Bolzano, $\exists c \in (-1, 0): f(c) = 0$, esto es, c es una solución de la ecuación $3e^x + x^5 = 0$.

c) Como $f'(x) = 2e^x + 5x^4 > 0$ en $(-1, 0)$, resulta que $3e^x + x^5 = 0$ tiene una única solución en $(-1, 0)$ (Ya que es estrictamente creciente en dicho intervalo y, por tanto, si corta al eje OX, solo lo puede cortar una vez).

De otra forma:

Supongamos, por reducción al absurdo, que $\exists c_1, c_2 \in (-1, 0)$ soluciones de $3e^x + x^5 = 0$.

La función $f(x) = 3e^x + x^5$ verifica el teorema de Rolle:

- f es continua en $[c_1, c_2]$
- f es derivable en (c_1, c_2)
- $f(c_1) = 0 = f(c_2)$ (ya que c_1 y c_2 son soluciones de la ecuación)

luego $\exists c \in (c_1, c_2)$ tal que $f'(c) = 0$, pero $f'(x) = 2e^x + 5x^4 > 0$ en (c_1, c_2) . Contradicción.

8. [Septiembre de 2012, propuesta A, 1A] a) Enuncia los teoremas de Bolzano y de Rolle.

b) Demuestra, usando el Teorema de Bolzano, que existen al menos tres raíces reales distintas de la ecuación $x^5 - 5x + 3 = 0$.

c) Demuestra, usando el Teorema de Rolle, que la ecuación anterior no puede tener más de tres raíces reales distintas.

Solución:

a) Teorema de Bolzano

Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y en los extremos del intervalo toma valores de signo contrario $[\text{signo } f(a) \neq \text{signo } f(b)]$, entonces $\exists c \in (a, b): f(c) = 0$.

Teorema de Rolle

Si $f(x)$ es una función continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y tal que $f(a) = f(b)$, entonces $\exists c \in (a,b): f'(c) = 0$.

b) Sea $f(x) = x^5 - 5x + 3$, que es continua en \mathbb{R} .

f es continua en $[-2,0]$
 $f(-2) < 0$ y $f(0) > 0$ } \Rightarrow (teorema de Bolzano) $x^5 - 5x + 3 = 0$ tiene una solución, c_1 , en $(-2,0)$

f es continua en $[0,1]$
 $f(0) > 0$ y $f(1) < 0$ } \Rightarrow (teorema de Bolzano) $x^5 - 5x + 3 = 0$ tiene una solución, c_2 , en $(0,1)$

f es continua en $[1,2]$
 $f(1) < 0$ y $f(2) > 0$ } \Rightarrow (teorema de Bolzano) $x^5 - 5x + 3 = 0$ tiene una solución, c_3 , en $(1,2)$

c) Supongamos, por reducción al absurdo, que $\exists c_4 \in (-2,2)$ solución de $x^5 - 5x + 3 = 0$ distinta de las anteriores, y que las soluciones están ordenadas como sigue: $-2 < c_1 < c_2 < c_3 < c_4 < 2$ (si hace falta se pueden reordenar, y argumento que sigue seguirá siendo cierto). Entonces,

$$f(c_1) = f(c_2) = f(c_3) = f(c_4) = 0$$

y aplicando el teorema de Rolle:

$$\exists \alpha_1 \in (c_1, c_2): f'(\alpha_1) = 0$$

$$\exists \alpha_2 \in (c_2, c_3): f'(\alpha_2) = 0$$

$$\exists \alpha_3 \in (c_3, c_4): f'(\alpha_3) = 0$$

esto es, $f'(x) = 0$ tiene, al menos, tres soluciones reales en el intervalo $(c_1, c_4) \subset (-2,2)$, pero

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 5x^4 - 5 = 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt[4]{1} = \pm 1$$

es decir, $f'(x) = 0$ solo tiene dos soluciones reales en dicho intervalo. Contradicción.

Así, $x^5 - 5x + 3 = 0$ solo tiene tres raíces reales.

9. [Septiembre de 2011, propuesta B, 1B] a) Enuncia los teoremas de Bolzano y de Rolle.

b) Demuestra que la ecuación $e^x + x^7 = 0$ tiene al menos una solución real.

c) Demuestra que, de hecho, dicha solución es única.

Solución:

a) Teorema de Bolzano

Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$ y en los extremos del intervalo toma valores de signo contrario $[\text{signo } f(a) \neq \text{signo } f(b)]$, entonces $\exists c \in (a,b): f(c) = 0$.

Teorema de Rolle

Si $f(x)$ es una función continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y tal que $f(a) = f(b)$, entonces $\exists c \in (a,b): f'(c) = 0$.

b) La función $f(x) = e^x + x^7$ es continua en \mathbb{R} (por ser suma de funciones continuas), luego también lo es en $[-1,1]$ y, además, $\text{signo } f(-1) \neq \text{signo } f(1)$. Aplicando el teorema de Bolzano, $\exists c \in (-1,1): f(c) = 0$, esto es, c es solución de la ecuación $e^x + x^7 = 0$.

c) Como $f(x) = e^x + x^7$ es continua en \mathbb{R} y $f'(x) = e^x + 7x^6 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, luego $e^x + x^7 = 0$ tiene una única solución real, ya que corta al eje OX y es estrictamente creciente.

De otra forma:

Como $f(x) = e^x + x^7$ es continua en \mathbb{R} y

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + x^7) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + x^7) = +\infty$$

aplicando el teorema de Bolzano, $\exists c \in \mathbb{R}$ solución de $f(x) = 0$.

Supongamos, por reducción al absurdo, que $\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R} : f(c_1) = f(c_2) = 0$. Como

- f es continua en $[c_1, c_2]$
- f es derivable en (c_1, c_2)
- $f(c_1) = 0 = f(c_2)$ (ya que c_1 y c_2 son soluciones de la ecuación)

$\exists c \in (c_1, c_2)$ tal que $f'(c) = 0$, pero las soluciones de $f'(x) = e^x + 7x^6 = 0$ no son reales, ya que $f'(x) > 0$. Contradicción.

Por tanto, $f(x) = 0$ tiene una única solución real.

10. [Septiembre de 2011, propuesta B, 1B] Enuncia el teorema de Rolle. En los ejemplos siguientes $f(-2) = f(2)$ pero no hay ningún valor $c \in (-2,2)$ tal que $f'(c) = 0$. Justifica en cada caso porque no contradicen el teorema de Rolle.

a) $f(x) = \frac{1}{x^4}$ b) $g(x) = 2 - |x|$

Solución:

Teorema de Rolle

Si $f(x)$ es una función continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y tal que $f(a) = f(b)$, entonces $\exists c \in (a,b): f'(c) = 0$.

a) Como $f(x)$ no es derivable en $x=0$, se tiene que $f(x)$ no es derivable en $[-2,2]$ y, por tanto, no se cumplen las hipótesis del teorema de Rolle, luego no hay contradicción.

b) $g(x) = 2 - |x| = g(x) = \begin{cases} 2-x & \text{si } x \geq 0 \\ 2+x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Continuidad en $x=0$: ¿ $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0)$?

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2+x) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2-x) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 2 = g(0) \Rightarrow g \text{ es continua en } x=0$$

Derivabilidad en $x=0$: ¿ $\exists g'(0)$?

$$\left. \begin{array}{l} g'_-(0) = -1 \\ y = 2-x \\ y' = -1 \\ g'_+(0) = 1 \\ y = 2+x \\ y' = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \nexists g'(0) \Rightarrow g \text{ no es derivable en } x=0$$

Por tanto, no se cumplen las hipótesis del teorema de Rolle, luego no hay contradicción.