Derivadas y Aplicaciones

1. Determina los valores de $a,b \in \mathbb{R}$ para que la siguiente función sea derivable en $\mathbb{R}$.

$$f(x)=\begin{cases} e^{bx}\cos(ax) & \text{si} \quad x<0 \\ \log(e+x)^a & \text{si} \quad x\geq 0 \end{cases}$$

Nos piden los valores para que la función sea derivable, pero en la función hay dos parámetros, luego hay que tener en cuenta que al ser derivable también es continua.

Cada una de las funciones componentes es continua y derivable es su dominio, por ser funciones elementales bien definidas.

Continuidad en $x=0$: ¿$\exists \lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$?

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0-}\left[e^{bx}\cos(ax)\right]=e^0\cdot 1=1 \\ &\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0+}\left[\log(e+x)^a\right]=a=f(0) \end{aligned}\right\}\Rightarrow a=1$$

Derivabilidad en $x=0$: ¿$\exists f'(0)$?

$$\left.\begin{aligned} &f'_-(0)=b \\ &\qquad y=e^{bx}\cos(ax) \\ &\qquad y'=be^{bx}\cos(ax)+e^{bx}\left[-a\,\text{sen}(ax)\right] \\ &f'_+(0)=\frac{1}{e} \\ &\qquad y=\log(e+x)^a \\ &\qquad y'=\frac{1}{(e+x)^a}a(e+x)^{a-1} \end{aligned}\right\}\Rightarrow b=\frac{1}{e}$$

Conclusión: para $(a,b)=\left(1,\frac{1}{e}\right)$ la función es derivable en $\mathbb{R}$.

2. Calcula la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a $f(x)=x^2-4x$ en el punto de abscisa $x=1$.

La ecuación de la recta tangente en $x=a$ es: $y-f(a)=f'(a)(x-a)$

$$\left.\begin{aligned} &f(1)=-3 \\ &f'(x)=2x-4 \\ &f'(1)=-2 \end{aligned}\right\}\Rightarrow y-(-3)=-2(x-1)\Rightarrow y+3=-2(x-1)$$

La ecuación de la recta normal en $x=a$ es: $y-f(a)=\dfrac{-1}{f'(a)}(x-a)$

$$y+3=\frac{-1}{-2}(x-1)\Rightarrow y+3=\frac{1}{2}(x-1)$$

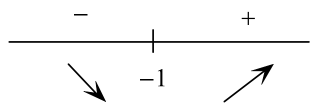
3. Estudia el crecimiento/decrecimiento de la siguiente función:

$$f(x)=xe^x$$

Hay que estudiar el signo de f': $\begin{cases} f'>0\Rightarrow f \text{ estrictamente creciente} \\ f'<0\Rightarrow f \text{ estrictamente dereciente} \end{cases}$

$f'(x)=e^x+xe^x=e^x(1+x)$

$f'(x)>0\Rightarrow 1+x>0\Rightarrow x>-1$



f es estrictamente $\begin{cases} \text{creciente en } (-1,+\infty) \\ \text{decreciente en } (-\infty,-1) \end{cases}$

4. Estudia los extremos relativos de la siguiente función:

$$f(x)=\frac{x^2-2x+2}{x-1}$$

Posibles extremos relativos: [$f'(x)=0$]

$$f'(x)=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow x^2-2x=0\Rightarrow x=\begin{cases}0\\2\end{cases}$$

Criterio de la derivada segunda: $f''(a)\begin{cases} >0\Rightarrow x=a \text{ es un mínimo relativo de } f \\ <0\Rightarrow x=a \text{ es un máximo relativo de } f \end{cases}$

$$f''(x)=\frac{(2x-2)(x-1)^2-(x^2-2x)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^3}$$

$f''(0)=-2<0\Rightarrow x=0$ es un máximo relativo de f, de coordenadas $(0,f(0))=(0,-2)$

$f''(2)=2>0\Rightarrow x=2$ es un mínimo relativo de f, de coordenadas $(2,f(2))=(2,2)$

5. Estudia la curvatura (concavidad/convexidad) de la siguiente función:

$$f(x)=x^2\log x$$

(donde $\log x$ es el logaritmo natural o neperiano).

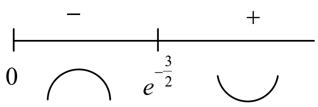
Hay que estudiar el signo de f'': $\begin{cases} f''>0\Rightarrow f \text{ convexa } (\cup) \\ f''<0\Rightarrow f \text{ cóncava } (\cap) \end{cases}$

$f'(x)=x(2\log x+1)$

$f''(x)=2\log x+3$

$$f''(x)>0\Rightarrow 2\log x+3>0\Rightarrow \log x>-\frac{3}{2}\Rightarrow x>e^{-\frac{3}{2}}$$

(Hay que tener en cuenta que el dominio de $f(x)$ es $(0,+\infty)$)



$$f \text{ es } \begin{cases} \text{cóncava en } \left(0, e^{-\frac{3}{2}}\right) \\ \text{convexa en } \left(e^{-\frac{3}{2}}, +\infty\right) \end{cases}$$

Estudia los puntos de inflexión de la siguiente función:

$$f(x)=x^3-3x^2+3x+2$$

Posibles puntos de inflexión: [$f''(x)=0$]

$f'(x)=3x^2-6x+3$

$f''(x)=6x-6$

$$f''(x)=0\Rightarrow 6x-6=0\Rightarrow x=1$$

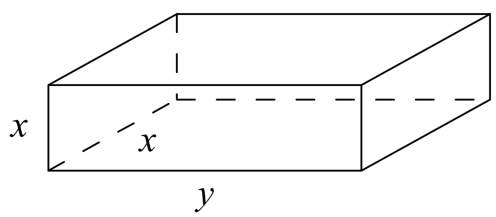
Criterio de la derivada tercera:

$$f'''(a)\begin{cases} >0\Rightarrow x=a \text{ es un punto de inflexión (cóncavo-convexo) de } f \\ <0\Rightarrow x=a \text{ es un punto de inflexión (convexo-cóncavo) de } f \end{cases}$$

$f'''(x)=6$

$f'''(1)\neq 0\Rightarrow x=1$ es un punto de inflexión de f, de coordenadas $(1,f(1))=(1,3)$

6. En una oficina de correos sólo admiten paquetes con forma de paralelepípedo rectangular, tales que la anchura sea igual a la altura y, además, la suma de sus tres dimensiones debe ser de 72 cm. Halla las dimensiones del paralelepípedo para que el volumen sea máximo.



El problema a resolver es:

$$\begin{cases} x+x+y=72 \\ v\equiv x^2y \ \text{ máximo} \end{cases}$$

Como $2x+y=72\Rightarrow y=72-2x$ y sustituyendo en la expresión de v:

$$v=x^2(72-2x)=72x^2-2x^3=v(x)$$

Maximizamos $v(x)$:

$$v'(x)=144x-6x^2$$

$$v'(x)=0\Leftrightarrow x(144-6x)=0\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \ \text{ (No vale)} \\ x=\frac{144}{6}=24 \end{cases}$$

$$v''(x)=144-12x$$

$v''(24)=-144<0\Rightarrow x=24$ es un máximo

Por tanto, las dimensiones de la caja son: $24\times 24\times 24$ (cm).

7. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{e^x - 1}$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\log x}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \left(x^3 \log x\right)$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{e^x - 1} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = (\text{L'Hôpital}) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{e^x} = \dfrac{1}{1} = 1$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\log x}{x} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = (\text{L'Hôpital}) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{1} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \left(x^3 \log x\right) = [0\cdot\infty] = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log x}{\frac{1}{x^3}} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{-3}{x^4}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-x^3}{3} = 0$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}} = \left[\infty^0\right] = \exp\left\{\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} \log x\right\} = e^0 = 1$ (donde exp es e)

ya que $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} \log x = [0\cdot\infty] = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\log x}{x} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{1} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$